Sezione B: introduzione all'*oggetto quantistico* di Feynman

Questa sezione ci introduce nel cuore del metodo della somma dei molti cammini di Feynman. Seguiremo, con una certa libertà, la prima parte del popolare libro di Feynman, "QED, la strana teoria della luce", secondo la traccia indicata da E.F.Taylor, Computers in Physics 12, 1998, 190, che per primo propose un modello grafico basato su un software accattivante per implementarlo. Tutto il corso di Taylor è reperibile nel sito web http://www.eftaylor.com/download.html. Noi useremo invece dei semplici fogli excel, che sono un po' meno accattivanti, ma hanno il pregio di essere facilmente sviluppabili e ampliabili a nuove applicazioni.

L'obiettivo è di acquisire famigliarità con le proprietà peculiari dell'*oggetto quantistico* di Feynman che sono in parte comuni a quelle delle onde esaminate nella sezione A (in particolare il "principio di sovrapposizione"), in parte diverse (in particolare la "probabilità quantistica")

L'organizzazione di questa sezione è la seguente.
Viene presentato anzitutto l'*oggetto quantistico*, che contiene il cuore del metodo: vengono discusse le ipotesi, le regole e l'impostazione del calcolo per poterle applicare ai singoli casi. L'oggetto quantistico con cui si parte è un elettrone e non un fotone, perché con un elettrone appare più naturale ragionare in termini di "corpuscolo" e quindi scoprire come i nuovi comportamenti creati dalle ipotesi del modello di Feynman siano facilmente introducibili e conciliabili con il modello.
Svilupperemo poi in dettaglio tutti i calcoli con l'aiuto di semplici fogli excel nel <u>*Tutorial*</u>: sono i primi calcoli che hanno lo scopo principale di far acquistare famigliarità con i "molti cammini" dell'oggetto quantistico, con i relativi vettori di fase e con le regole per "sovrapporli" in modo da ottenere la "probabilità quantistica" di rivelare l'oggetto. I concetti di "sovrapposizione" e di "probabilità" sono i due concetti chiave, tipicamente quantistici, che questo foglio permette di approfondire. I cammini iniziano in un punto A (sorgente) e terminano in un punto B (rivelatore) dopo essere passati attraverso una fenditura lasciata aperta fra due ostacoli.

Materiali

1. *L'oggetto quantistico:* contiene la descrizione delle ipotesi e delle regole per il calcolo del moto dell'oggetto quantistico di Feynman
2. *Tutorial:* contiene la descrizione dettagliata dell'applicazione delle regole di calcolo all'esempio sviluppato nei fogli excel "Tutorial-calcolo"
3. *Consigli per il tutorial:* contiene alcuni consigli per l'uso del foglio e suggerimenti di esercizi utili
4. *Tutorial-calcolo:* si tratta di due fogli excel con i primi calcoli per prendere famigliarità con le ipotesi e regole del metodo dei molti cammini
    - Fey-s-tutorial.xls: si inizia con una <u>fenditura stretta</u>, per la quale passa un solo cammino e poi la si allarga aggiungendo via via cammini ai bordi
    - Fey-l-tutorial.xls: si inizia con una <u>fenditura larga</u> e si analizzano ordinatamente i cammini a partire da uno dei bordi

Punto 1 *L'oggetto quantistico: ipotesi e regole*

L'*oggetto quantistico* è, per così dire, un'invenzione di Feynman.

Fin dall'inizio del suo libro *"QED, la strana teoria della luce"*, Feynman infatti dice chiaramente che, se vogliamo capire come avviene il moto nelle condizioni estreme in cui è **obbligatorio** ricorrere alle leggi della meccanica quantistica, perché le leggi classiche sono inadeguate, dobbiamo staccarci, anche nel linguaggio, dal modo di esprimersi proprio della meccanica classica, che è anche quello a noi più congegnale, dato che, in fondo, anche noi siamo degli oggetti "classici". Vediamo che cosa dice Feynman:

> *"Noi sappiamo quale è il comportamento degli elettroni e della luce. Ma come potrei chiamarlo? Se dico che si comportano come particelle, dò un'impressione errata, ma anche se dico che si comportano come onde. Essi si comportano nel loro proprio modo inimitabile che tecnicamente potrebbe essere chiamato il "modo quanto-meccanico". Si comportano in un modo che non assomiglia a nulla che possiate aver mai visto prima. La vostra esperienza con cose che avete visto prima è incompleta. Il comportamento delle cose su scala molto piccola è* ***semplicemente diverso****".*

Dato che le associazioni mentali, evocate dall'uso di certe parole come "onda" o "corpuscolo", sono fuorvianti, chiameremo per brevità *oggetto quantistico* l'oggetto che si comporta in un "modo quanto-meccanico". Potrà essere l'elettrone o la luce o un atomo o anche un oggetto molto complesso con massa elevata, perché il comportamento quanto-meccanico è osservabile non solo in particelle elementari o molto semplici, ma in via di principio in qualunque oggetto, basta mettersi nelle condizioni adatte ed avere la tecnica di rivelazione adatta[1].

<u>*Le ipotesi*</u>

L'ipotesi di partenza di Feynman è la relazione di Planck che lega l'*energia E* alla *frequenza f* attraverso il *quanto di azione h*:

$$E = hf \qquad (1)$$

Esaminiamo prima il comportamento di un oggetto massivo, perché classicamente sappiamo descriverlo più facilmente con la meccanica newtoniana, in particolare facciamo l'ipotesi che nello spazio in cui andiamo a esaminare il suo moto non ci siano campi di forza, quindi il moto è, classicamente, "rettilineo-uniforme". Per fissare le idee pensiamo a un elettrone, ma nei calcoli lasceremo poi la possibilità di variare la massa m dell'oggetto per esplorare che cosa succede per masse diverse.

Supponiamo di avere in un certo punto **A** una sorgente da cui partono gli elettroni con una certa energia cinetica E, e di mettere in un punto **B**, posto a una certa distanza D, un rivelatore: per fissare le idee, la sorgente potrebbe essere un filamento caldo come quello di un tubo televisivo, e il rivelatore una emulsione fotografica o uno schermo fosforescente, o un qualunque dispositivo che segnala l'arrivo dell'elettrone.

Le dimensioni della sorgente in **A** e del rivelatore in **B** siano completamente trascurabili rispetto alla distanza D e a qualunque altra distanza che entrerà in gioco.

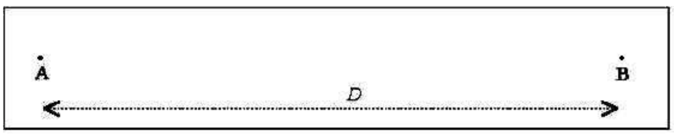


Figura 1

---

[1] L'oggetto più massivo e più complesso per il quale sono stati finora rivelati comportamenti quanto-meccanici è il *fullerene*, che è una molecola formata da 60 atomi di carbonio, cioè da 60 nuclei di carbonio e da 360 elettroni!

Vediamo prima che cosa ci aspettiamo per un elettrone che ha un comportamento classico e che segue quindi una traiettoria rettilinea (per semplicità supponiamo che fra **A** e **B** non ci sono campi di forza): perché arrivi in **B** basta che sia emesso da **A** con una direzione della velocità compresa in un cono che intercetta la zona in cui c'è il rivelatore.

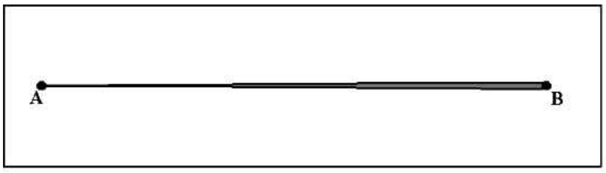


Figura 2

Se mettiamo, nella zona fra **A** e **B**, degli ostacoli che possano bloccare interamente un elettrone di quella energia, possono succedere solo due cose, nettamente distinte:

- nessun ostacolo intercetta la traiettoria dell'elettrone e allora l'elettrone arriva in **B** come se gli ostacoli non ci fossero (Figura 3a),
- uno degli ostacoli la intercetta e allora l'elettrone non arriva più per nulla (Figura 3b).

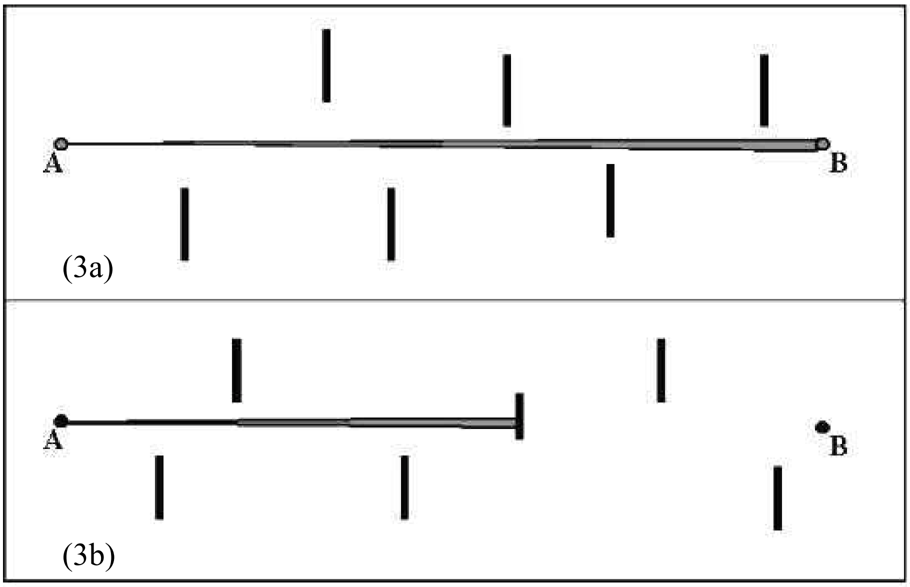


Figura 3

L'effetto è quindi di tipo "**SI o NO**": non ci sono situazioni intermedie (con il rivelatore vedremmo che l'intensità del segnale resta immutata oppure che va a zero).
Nel seguito, faremo riferimento a una situazione semplificata, schematizzata in Figura 4, in cui c'è un ostacolo, posto a distanza D_A dalla sorgente, con una fenditura di larghezza D_{trasv} proprio in corrispondenza della traiettoria dell'elettrone: l'elettrone passa, indipendentemente della larghezza della fenditura, quindi siamo nella situazione di tipo "**SI**". Se però la larghezza fosse così piccola da bloccarlo, si passerebbe bruscamente alla situazione di tipo"**NO**".

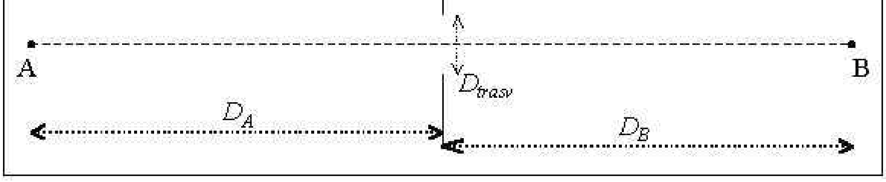


Figura 4

Per un "oggetto quantistico" invece non si può pensare a niente di simile a una "traiettoria", cioè a una sequenza di posizioni ben definite e perfettamente determinabili se si conosce la velocità iniziale e il campo di forze. Per Feynman l'oggetto quantistico di energia E è definito, oltre che dalle grandezze già note dalla meccanica classica, quali massa, velocità e quantità di moto, anche dalla *frequenza f*, legata all'energia E dalla relazione di Planck (eq. 1).

E' proprio questa frequenza la *caratteristica nuova* dell'oggetto quantistico, che manca assolutamente nell'oggetto classico e dalla quale seguono le proprietà peculiari dell'oggetto quantistico che ne determinano il moto.

- La prima proprietà è che, avendo una frequenza propria, l'oggetto quantistico ha una "periodicità intrinseca", con un periodo T pari all'inverso della frequenza. Feynman infatti parla di un *"orologio interno"* ("stopwatch"), che gira nel tempo con un periodo $T=1/f$.
- La seconda proprietà è che, come per tutti i fenomeni periodici, lo stato dell'oggetto quantistico si ripete in modo identico solo a distanza di un periodo, ma, all'interno del periodo, lo stato passa attraverso *fasi* diverse, che si ripetono identicamente nel periodo successivo (come fanno ad esempio le oscillazioni verticali di una molla, che passano per una fase in cui l'ampiezza dell'oscillazione è massima verso il basso, poi tornano alla posizione di equilibrio iniziale per proseguire con una oscillazione verso l'alto e così via). Feynman suggerisce di visualizzare la fase pensando alla lancetta dell'immaginario orologio e definire la fase φ come l'angolo fra una direzione di riferimento e la direzione a cui essa punta a un certo istante, come in figura 5. Chiameremo *vettore di fase* il vettore di lunghezza unitaria associato a questa lancetta ideale.

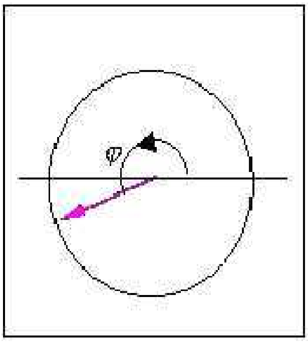


Figura 5

- La terza caratteristica è il *cammino λ percorso dall'oggetto quantistico mentre la sua fase fa un giro completo* di 2π. Tale cammino dipende dalla quantità di moto p dell'oggetto e si calcola dalla relazione di de Broglie [nota **a**]:

$$\lambda = h / p \qquad (2)$$

Naturalmente non dobbiamo prendere alla lettera la rappresentazione dell'orologio interno e immaginare l'oggetto quantistico come una specie di "signore" che viaggia effettivamente con un orologio al collo e guarda continuamente dove punta la sua lancetta! Si tratta solo di un artifizio per rendere più chiaro il significato del calcolo matematico e nel seguito lo utilizzeremo proprio in questo senso, cioè come una rappresentazione "pittorica" della fase. Un esempio è visualizzato in Figura 6: l'oggetto quantistico è diventato un omino che parte da **A** e viaggia con il suo orologio e relativo vettore di fase, il cammino che segue non è necessariamente rettilineo, ciò che importa è che, mentre percorre il cammino, l'orologio gira passando periodicamente per le stesse fasi e dopo un percorso pari a l torna ad avere la stessa fase.

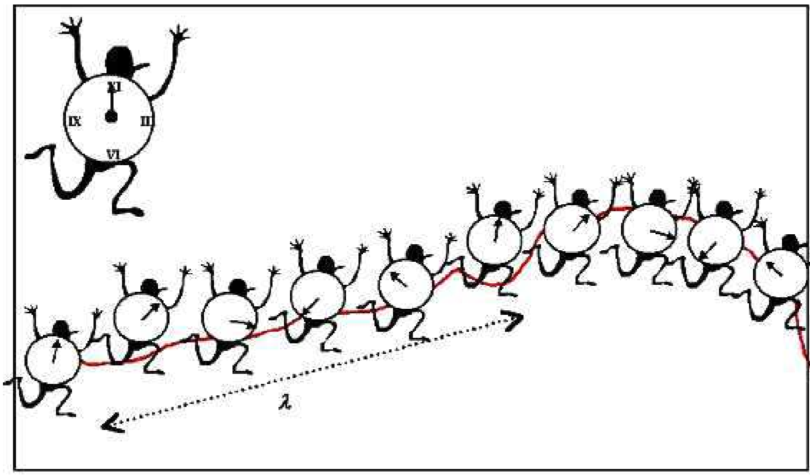


Figura 6

Le regole
Vediamo ora come da queste tre caratteristiche si calcola, nel modello di Feynman, il moto dell'oggetto quantistico. Le regole per il calcolo sono giustificate dal fatto che, applicandole, si riesce a descrivere tutti i dati sperimentali relativi al moto degli oggetti e che si ritrova la descrizione classica del moto nelle condizioni in cui si può considerare trascurabile l'effetto della costante di Planck (cioè quando le variazioni dell'azione coinvolte nel moto sono molto più grandi della costante di Planck: questo è il *principio di corrispondenza*). Le regole sono le seguenti.

a. *I cammini*
   Anzitutto, partendo da **A**, l'oggetto quantistico non è obbligato a seguire una traiettoria particolare, come farebbe l'oggetto classico (ad esempio la linea retta in assenza di forze, oppure la traiettoria calcolabile con la legge della meccanica newtoniana in presenza di forze), ma *esplora tutti i cammini possibili*: questo perché, abbandonando la legge di Newton, non c'è più nessun motivo di imporre che la posizione a un certo istante sia necessariamente quella calcolabile a partire dalla posizione nell'istante precedente secondo la legge di Newton. In Figura 7, mostriamo un esempio di cammini possibili, che conducono da **A** a **B** (ma ce ne sono molti altri, che non disegniamo sia per chiarezza sia perché sarebbe impossibile tracciarli proprio *tutti*!)

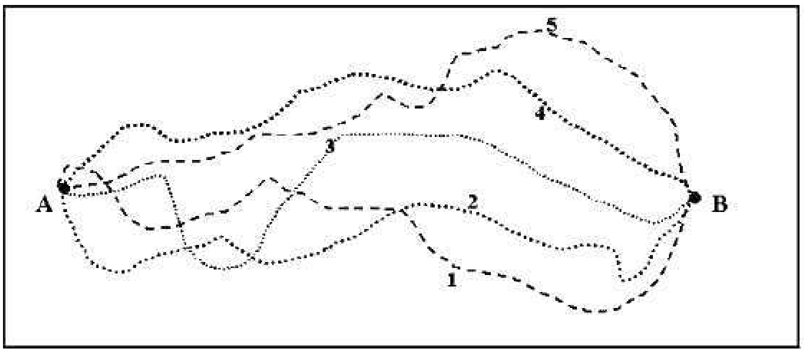


Figura 7

b. *I vettori di fase*
   Lungo ogni cammino, il vettore di fase gira e compie un giro intero ogni tratto pari a λ quindi i vettori di fase, con cui l'oggetto quantistico arriva in **B**, sono diversi per i diversi cammini, come mostrato in Figura 8, perché i cammini hanno lunghezze diverse.

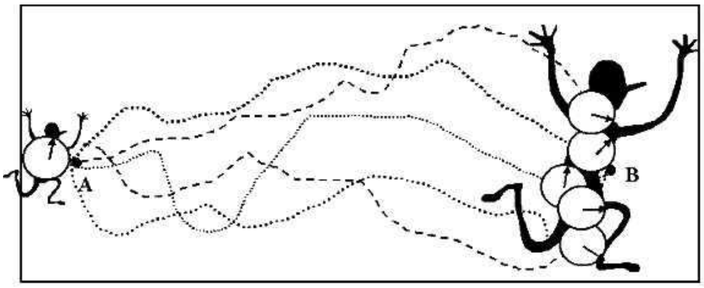


Figura 8

Attenzione: è lo stesso oggetto che ha *contemporaneamente* tutti i diversi vettori di fase quando arriva in **B**, non sono 5 diversi oggetti quantistici! Questo è ovviamente difficile da capire per la nostra mentalità classica, perché non riusciamo a immaginare come qualche oggetto possa avere contemporaneamente delle caratteristiche diverse, ma è una delle "regole del gioco" che va accettata: da essa infatti dipende la regola di "sovrapposizione" che discuteremo più avanti.

c. *Cammini obbligatori e cammini proibiti*

Come fa l'oggetto quantistico a scegliere i cammini da percorrere? La regola è semplice: deve percorrere tutti i cammini che non sono esplicitamente proibiti. Sono proibiti quei cammini lungo i quali c'è un ostacolo impenetrabile. In Figura 9, ad esempio, mostriamo degli ostacoli che non intercettano i cammini 1, 2, 4, 5, mentre intercettano il cammino 3: in **B**, all'oggetto quantistico mancherà quindi il vettore di fase che corrispondeva a questo cammino.

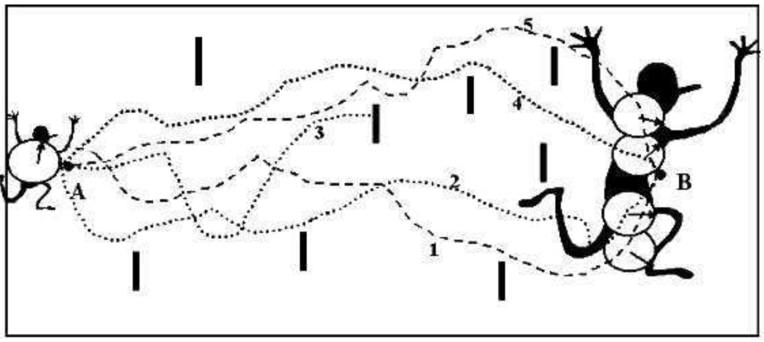


Figura 9

Attenzione: i cammini non esplicitamente proibiti dalla presenza di un ostacolo non solo sono permessi, ma anzi sono *obbligatori*! Anche questa regola è difficile da capire per la nostra mentalità classica, ma dovremo tenerne conto quando faremo i calcoli, perché dovremo essere sicuri di includere *tutti i cammini possibili*

d. *La probabilità quantistica*

Se confrontiamo la figura 9 con le analoghe figure del caso classico (Figura 3), vediamo subito che, in presenza di ostacoli, la situazione quantistica è molto diversa da quella classica: infatti non potranno mai esserci dei casi semplici di ostacoli che non disturbano *per niente* la traiettoria (come in Figura 3a) o che la *distruggono totalmente* (come in Figura 3b), ma ci saranno sempre degli ostacoli che disturbano *qualche cammino*, ma non tutti, mentre sarà difficile che un ostacolo sia completamente innocuo, perché intercetterà sicuramente almeno qualche cammino. La situazione quantistica quindi non potrà essere una situazione netta di "**SI**" o "**NO**" come quella dell'oggetto classico, che "arriva" o "non arriva" al rivelatore posto in **B** a seconda della posizione degli ostacoli che possono bloccarlo, ma sarà necessariamente sfumata. Avremo cioè solo una *risposta probabilistica*, nel senso che si potrà solo calcolare la *probabilità che il rivelatore segnali il passaggio dell'oggetto*, cioè la probabilità che ci sia un'interazione fra l'oggetto e il rivelatore posto nel punto **B**.

e. *La sovrapposizione dei vettori di fase*
Siamo così giunti alla regola finale, che ci permetterà di calcolare la probabilità quantistica che il rivelatore segnali il passaggio dell'oggetto: *la probabilità dipende dai diversi cammini che l'oggetto può esplorare* per arrivare in **B.** Ogni cammino dà infatti un contributo, che dipende dal valore della sua *fase* nel punto **B**, e che può essere sia positivo che negativo: questo è l'aspetto tipicamente quantistico ed è legato proprio al fatto che, come visto sopra, l'oggetto ha un suo orologio interno, il quale gira mentre l'oggetto viaggia accumulando diversi sfasamenti lungo i diversi cammini che hanno lunghezze diverse, e quindi arriva in **B** con *diversi vettori di fase*. Poiché però l'*oggetto è unico*, la sua interazione con il rivelatore non dipende da un particolare vettore di fase, ma dalla *sovrapposizione di tutti i vettori* (*principio di sovrapposizione*): sommando tutti i vettori di fase, si ottiene un *vettore risultante* il cui modulo al quadrato è *proporzionale alla probabilità* che l'oggetto quantistico interagisca con il rivelatore posto in **B** (nel seguito chiameremo brevemente "sovrapposizione" S il modulo a quadrato del vettore risultante). In figura 10 mostriamo, come esempio, la sovrapposizione dei vettori di fase dei 5 cammini ipotizzati nel caso di Figura 8:

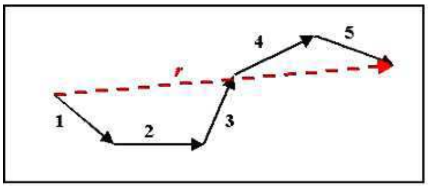


Figura 10

Si vede chiaramente che i vettori 3 e 4 sono parzialmente in controfase rispetto ai vettori 1 e 5, per cui i contributi in parte cancellano e il vettore risultante **r** non ha il massimo valore che potrebbe avere se tutti e 5 i vettori fossero completamente in fase fra di loro. Che significato ha il valore della sovrapposizione S, cioè del modulo al quadrato del vettore **r**? La regola ci dice che S è proporzionale alla probabilità, ma per calcolare la probabilità occorrerebbe conoscere la costante di proporzionalità, cioè sommare tutti i possibili vettori di fase. Ciò è ovviamente molto difficile, quel che faremo sarà invece di calcolare la *probabilità relativa*, confrontando la sovrapposizione in situazioni diverse, ad esempio in presenza di ostacoli diversi. In Figura 11 è mostrata ad esempio la sovrapposizione calcolata con il foglio "Fey-l-tutorial.xls", calcolata lasciando aperti tutti i cammini oppure bloccandone alcuni:

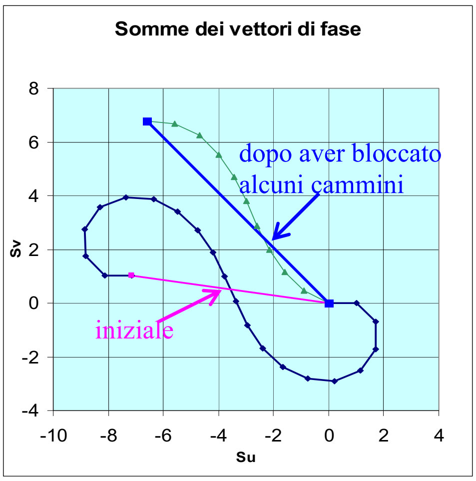


Figura 11

Come si vede, il vettore risultante è addirittura aumentato, perché abbiamo tolto dei vettori di fase che contribuivano negativamente alla somma! L'aver messo un ostacolo che ha bloccato uno dei cammini ha quindi variato la probabilità di rivelare l'oggetto quantistico in **B**: la probabilità può diminuire, aumentare oppure rimanere circa costante a seconda della larghezza della fenditura, della posizione degli ostacoli aggiuntivi, della quantità di moto dell'oggetto, ecc.

Attenzione: il fatto che la risultante **r** sia variata, non significa che l'oggetto quantistico verrà rivelato in modo diverso, ad esempio con una parte diversa della sua energia, come saremmo portati a pensare per analogia con certe situazioni "classiche" . Per un oggetto quantistico, un valore di S ridotto significa che *è ridotta la probabilità che l'oggetto venga rivelato*, ma quando è rivelato, l'oggetto quantistico *è rivelato interamente*, con tutta le sue caratteristiche, quali energia, quantità di moto, ecc. In questo senso, la risposta del rivelatore è ancora di tipo **SI** o **NO**, ma, a differenza di quel che avviene classicamente, non è sempre di tipo **SI** o *sempre* di tipo **NO**, a seconda della posizione dell'ostacolo, ma ha una certa probabilità di essere di tipo **SI** e una certa probabilità di essere di tipo **NO** e questa probabilità può essere calcolata dal valore della sovrapposizione S. Ad esempio se la probabilità fosse del 25%, significherebbe che su 100 oggetti lanciati, solo per 25 ci sarebbe una risposta di tipo **SI**, mentre per gli altri 75 la risposta sarebbe di tipo **NO**: per degli oggetti classici, invece, la risposta sarebbe o di tipo **SI** per tutti e 100, oppure di tipo **NO** per tutti e 100.

Nota a

La relazione (2) fu dedotta da de Broglie nel 1921, partendo dall'interpretazione che Bohr aveva dato nel 1911 della quantizzazione dell'energia degli elettroni atomici, cioè del fatto che, apparentemente, gli elettroni atomici hanno solo certe orbite stazionarie. De Broglie dedusse la sua relazione in un "modello ondulatorio" dell'elettrone, cioè pensando all'elettrone come un'onda che si propaga nello spazio, con una lunghezza d'onda λ data dalla (2) e una frequenza f data dalla relazione di Planck (1): in un'onda, infatti, la lunghezza d'onda è definita proprio come la distanza fra due picchi, cioè come la distanza fra due punti in cui l'onda ha la stessa fase.

Seguendo l'approccio di Feynman, noi preferiamo non far riferimento esplicito a un modello ondulatorio e quindi non parlare esplicitamente di lunghezza d'onda di de Broglie, ma definire λ secondo quello che è il suo significato fisico: distanza spaziale fra due punti in cui l'oggetto ha la stessa fase.

Volendo invece attenersi al modello ondulatorio di de Broglie, va chiarito un aspetto relativo alla "velocità dell'onda". In un'onda meccanica classica, infatti, la velocità dell'onda si calcola dal rapporto fra lunghezza d'onda e periodo, quindi vale $v_f = \lambda / T$, dove il pedice f della velocità sta a ricordare che si tratta della *velocità con cui viaggia una certa fase* dell'onda, ad esempio il picco (uno dei modi di misurare v_f è proprio di fissare l'attenzione sul picco dell'onda, fotografando la distanza fra due picchi a un certo istante). Se facciamo lo stesso calcolo per l'onda che descrive l'oggetto quantistico, ricavando λ dalla (2) e $T=1/f$ dalla (1), troviamo:

$$v_f = \frac{h}{mv} \cdot \frac{1/2mv^2}{h} = \frac{v}{2}$$

quindi la "velocità di fase" v_f è la metà della velocità effettiva (detta anche "velocità di gruppo") dell'oggetto quantistico. Questa relazione tra velocità di fase e velocità di gruppo vale per valori della velocità molto minori del valore della velocità della luce e deriva dal fatto che, per tali valori, la velocità dipende dall'energia. Avvicinandosi alla velocità della luce, la velocità di fase diventa sempre più prossima a quella di gruppo (fino a coincidere per il fotone, che, nel vuoto, viaggia sempre alla velocità della luce, indipendentemente dalla sua energia!).

Punto 2: *tutorial*

Impostazione del calcolo

I primi calcoli sui molti cammini hanno lo scopo principale di acquistare famigliarità con questo strano oggetto che ha una fase che varia nel tempo e percorre simultaneamente *tutti i cammini* che non sono impediti da qualche *ostacolo*. Inizieremo da una situazione semplificata e imposteremo i calcoli su un foglio elettronico per poter valutare rapidamente le fasi sui diversi cammini e variare i diversi parametri. I parametri che entrano in gioco sono:

- l'*energia* e la *massa* dell'oggetto quantistico,
- le *posizioni* della *sorgente* e del *rivelatore*,
- le *posizioni* degli *ostacoli*.

Il calcolo consisterà nel:

- tracciare tutti i cammini possibili tra sorgente e rivelatore,
- calcolare per ogni cammino il *vettore di fase*,
- calcolare la *sovrapposizione* dei vettori.

La situazione semplificata che utilizzeremo è quella illustrata nella figura:

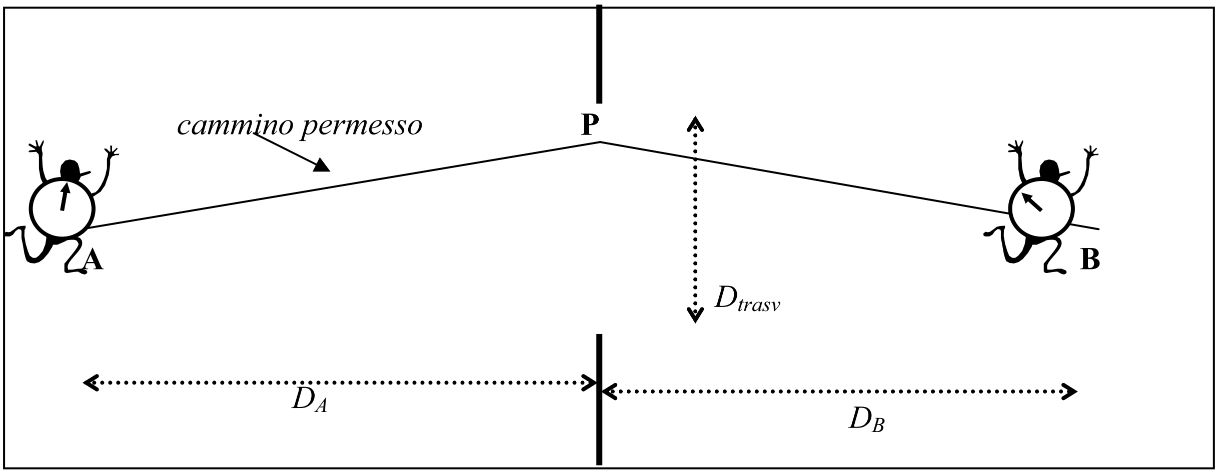


Figura 1

Ci sono solo due ostacoli che lasciano aperta una fenditura di ampiezza D_{trasv} simmetrica rispetto alla congiungete dei punti **A** e **B** in cui sono posti la sorgente e il rivelatore. I cammini esaminati sono delle spezzate che vanno da **A** a un punto **P** posto sull'attraversamento della fenditura e di qui al punto **B** [nota **b**].

I calcoli, sviluppati con il foglio EXCEL, consistono nei seguenti passi:

a) *Scelta o calcolo dei parametri che sono gli stessi per tutti i cammini:*

- distanze D_A e D_B
- larghezza della fenditura D_{trasv}
- velocità v dell'oggetto
- massa m
- quantità di moto p
- lunghezza λ di de Broglie, $\lambda=h/p$

b) *Calcolo del vettore di fase di ogni cammino. Occorre:*

- scegliere la coordinata y_{fi} del punto di attraversamento alla posizione della fenditura,
- calcolare la lunghezza L_i del percorso tra **A** e **B**,
- calcolare i giri $g_i = L_i / \lambda$ fatti lungo il cammino dalla lancetta dell'immaginario orologio interno,
- g_i non sarà in generale un numero intero, ciò che interessa non è la parte intera di g_i, che chiamiamo int(g_i), ma la parte decimale $d_{gi}=g_i$-int(g_i), cioè la frazione di 2π (o di 360°) dell'ultimo giro non completato, perché la fase φ_i si otterrà da questa con la proporzione,

$$\varphi_i : d_{gi} = 2\pi : 1$$

- dal valore di φ_i, si calcolano le due componenti del vettore di fase unitario, V_{ui} e V_{vi}, necessarie per calcolare le componenti S_u e S_v della somma vettoriale:

$$V_{ui} = \cos(\varphi_i) \qquad V_{vi} = \sin(\varphi_i)$$

c) *Calcolo della somma dei vettori di fase di tutti i cammini:*

- calcolo delle componenti S_u *e* S_v della somma vettoriale:

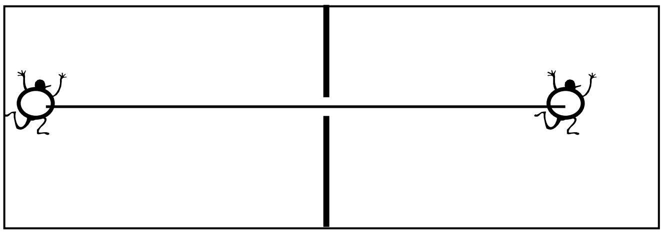
$$S_u = \Sigma_i V_{ui} \qquad S_v = \Sigma_i V_{vi}$$

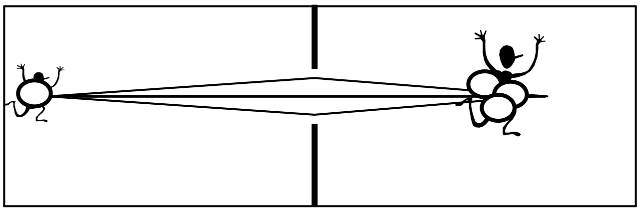
- calcolo della sovrapposizione $S = S_u^2 + S_v^2$

Per costruire *tutti i cammini possibili* occorre adottare un qualche criterio "ordinatore", in modo da essere sicuri di non lasciarne indietro nessuno. Abbiamo quindi predisposto due fogli EXCEL che permettono di fare questo tipo di calcolo propedeutico e sono ispirati a due criteri ordinatori diversi:
- si inizia con una fenditura stretta, per la quale passa un solo cammino e poi la si allarga aggiungendo via via cammini ai bordi (foglio Fey-s-tutorial.xls)
- oppure si inizia con una fenditura larga e si analizzano ordinatamente i cammini a partire da uno dei bordi (foglio Fey-l-tutorial.xls).

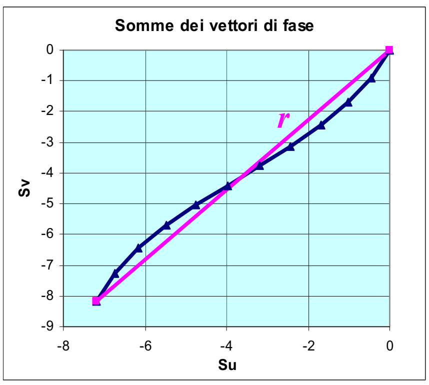
Fenditura stretta: foglio "Fey-s-tutorial.xls"

1) si parte da una fenditura stretta, per la quale si fa passare un solo cammino;





2) si allarga gradualmente la fenditura, in modo simmetrico, aggiungendo ogni volta coppie di cammini;

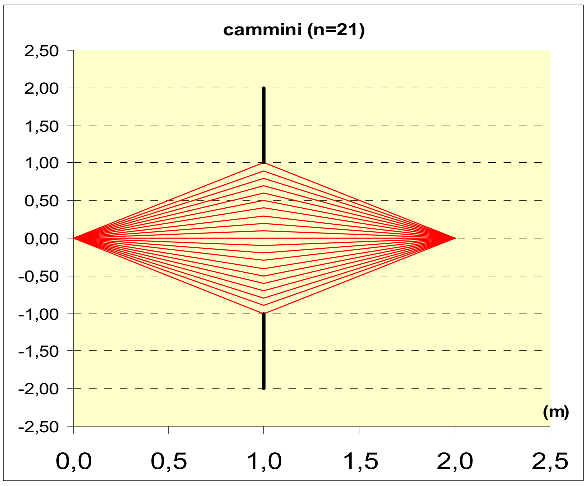


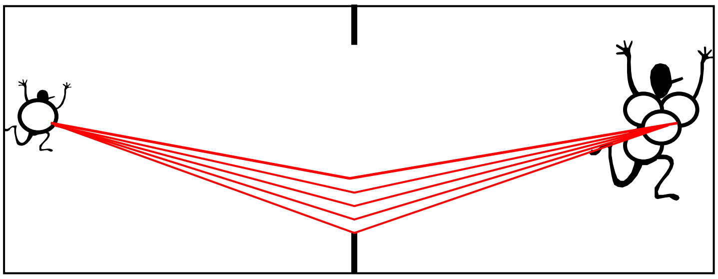
3) per ogni cammino si calcola il *vettore di fase*, lo si somma ai vettori degli altri cammini, ottenendo una spezzata, che, man mano che si aggiungono vettori, assume una tipica forma a "S" e poi diventa la "spirale di Cornu". Si calcola infine la *risultante* ***r*** e la *sovrapposizione* $S = r^2$ dei vettori di fase.

S cresce inizialmente, ma poi rallenta la crescita, anzi, per una certa larghezza della fenditura, inizia a diminuire e poi *oscilla*, il tutto *in un modo che dipende dalla larghezza iniziale della fenditura, dalla velocità e dalla massa.*

Fenditura larga: foglio "Fey-l-tutorial.xls"

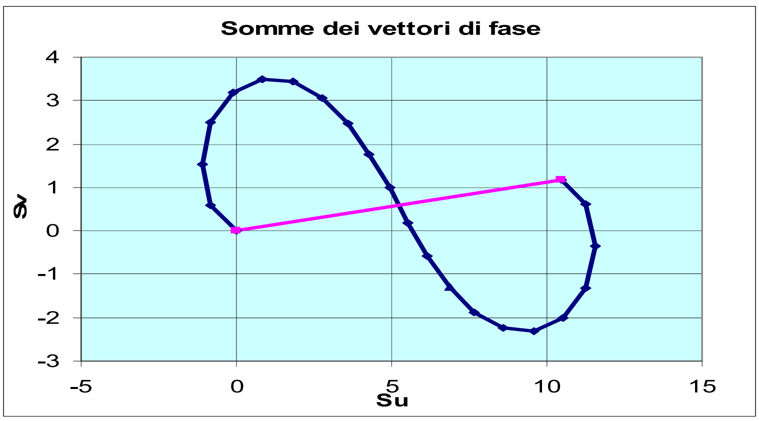
1) si parte da una fenditura inizialmente larga, per la quale si fanno passare molti cammini (21),





2) per ogni cammino (a iniziare da quello che attraversa più in basso la fenditura) si calcola il vettore di fase,

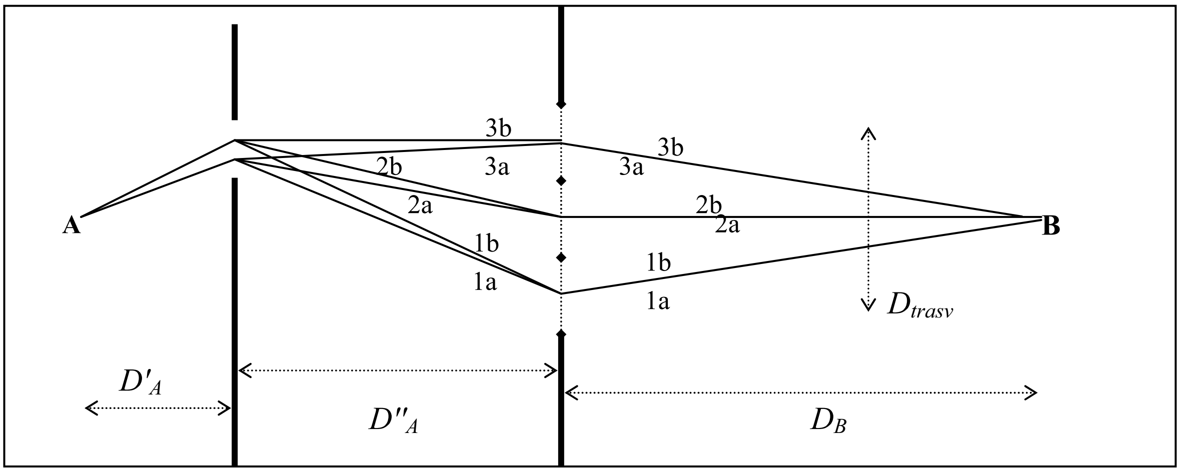
3) i vettori di fase vengono via via sommati ai precedenti, formando la caratteristica spezzata, che, superato il cammino centrale, assume la tipica forma a "S";



4) alla fine si calcola la *risultante* ***r*** e la *sovrapposizione* $S = r^2$ dei vettori di fase.

La forma della somma dei vettori di fase e il valore della sovrapposizione *S dipendono dalla larghezza della fenditura, dalla velocità e dalla massa* dell'oggetto quantistico.

Nota b
Il cammino può essere reso complicato quanto si vuole, ma, concettualmente, ciò non aggiunge nulla di nuovo alla fisica del problema. Inoltre, come risulta poi chiaro dal calcolo esplicito e come intuibile in base al *principio di corrispondenza*, i cammini che contribuiscono di più sono quelli che più si avvicinano alla linea retta. Se si volesse fare un calcolo per rendersene conto, si potrebbe analizzare una situazione come quella della figura, in cui si inseriscono altri ostacoli, costringendo tutti i cammini ad attraversare una ulteriore fenditura fra gli ostacoli: nella figura abbiamo ipotizzato due cammini, per cui, per ognuno dei precedenti cammini, si deve sommare su due possibili percorsi. La nuova fenditura andrebbe poi spostata, in modo da esplorare altri cammini: concettualmente, gli algoritmi per i calcoli sono gli stessi, le somme diventano solo molto più complesse!



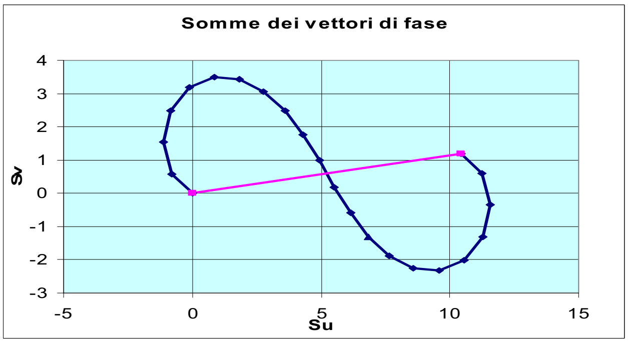
Punto 3 *Consigli per l'uso del "tutorial" sui cammini di Feynman*

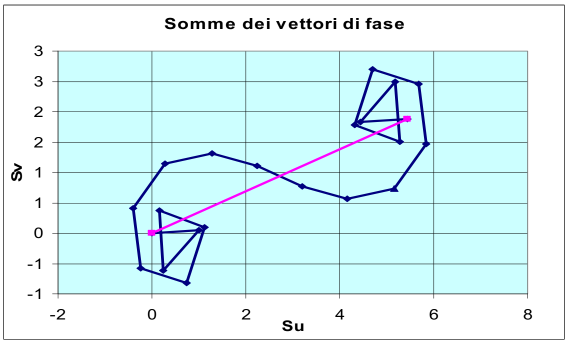
Provate a cambiare i parametri, uno per volta, e osservate che effetto ha il cambiamento. Vi consiglio di cominciare dalla velocità, ma operate piccoli cambiamenti alla volta, ad esempio da 400 m/s a 600 m/s o a 200 m/s, <u>mai cambiamenti di ordini di grandezza</u>

Che cosa guardare
- anzitutto la *"spirale di Cornu",* che vi dà subito l'idea dell'allineamento o meno fra i vettori di fase: la spirale si arriccia se si va verso situazioni "classiche", perché le fasi tra i vettori cambiano rapidamente, invece si distende andando verso situazioni "quantistiche", perché c'è una buona correlazione di fase tra i cammini vicini;
- *la "sovrapposizione":* è piccola se si va verso situazioni "classiche", perché i vettori di fase sono molto diversi anche per punti di passaggio vicini, mentre è grande per situazioni "quantistiche", perché i vettori di fase sono ben allineati;
- *la differenza fra il numero di giri dei primi due vettori,* che è un parametro cruciale per capire se state usando correttamente il foglio: <u>di norma non dovrebbe superare 0,4 giri</u>, perché questo corrisponde già a un angolo di circa 160° fra due vettori vicini, il che rende la spirale di Cornu molto spigolosa e poco accurata.

Nelle figure ad esempio vedete i cambiamenti nel passare da 400 m/s a 1500 m/s:

400 m/s sovrapposizione: 110 differenza di giri fra i primi due vettori: 0,10	1500 m/s sovrapposizione: 33 differenza di giri fra i primi due vettori: 0,39





A 400 m/s la situazione è decisamente "quantistica":

- la spirale è bella, con appena un accenno di ricciolo all'estremo, il che indica che anche i vettori che passano lontano dal centro sono ancora allineati fra di loro;
- ci sono circa 10 vettori di fase che passano al centro della fenditura che sono ben allineati fra di loro;
- la sovrapposizione è alta;
- la differenza di fase tra i vettori al bordo è piccola (0,1 giro), indice che la correlazione si mantiene vicino ai bordi.

A 1500 m/s la situazione sta evolvendo verso la configurazione "classica":

- la spirale si avvolge su se stessa agli estremi, il che indica che anche i vettori che passano lontano dal centro sono poco allineati fra di loro (il fatto che sia anche spigolosa è un difetto del calcolo, perché 21 cammini sono chiaramente insufficienti per integrare bene il moto a questa velocità);
- ci sono pochi vettori di fase ben allineati fra di loro (circa 3, quelli che passano al centro della fenditura);
- la sovrapposizione è bassa;
- la differenza di fase tra i vettori al bordo è grande (0,39 giri), indice che la correlazione viene meno vicino ai bordi.

Potete provare a cambiare anche la massa, ma anche qui non dovete cambiare di ordini di grandezza, altrimenti non rimanete più nei limiti di validità del calcolo.
Ci sono altri fogli che permettono di operare cambiamenti su scale maggiori (ad esempio "sovrapposizione" che trovate anche sul sito http://www.iapht.unito.it/qm/): ne esamineremo alcuni nella sezione C.