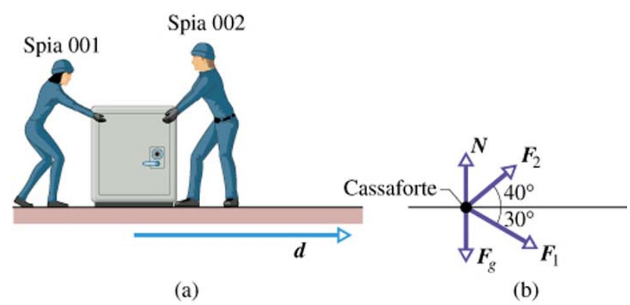
Problemi: lavoro – energia cinetica

1. Due spie industriali fanno scivolare una cassaforte di massa **m = 250 kg,** inizialmente ferma , per una distanza **d = 8.50 m**. La forza $\mathbf{F_1}$ con la quale l'agente 001 spinge la cassaforte è di **12.0 N**, e la direzione della forza forma un angolo di $\mathbf{30^0}$ verso il basso rispetto all'orizzontale. La forza $\mathbf{F_2}$ con cui l'agente 002 tira la cassaforte è di **10.0 N**, in direzione di $\mathbf{40^0}$ verso l'alto rispetto alla linea orizzontale.
Si considerino le forze costanti e l'attrito nullo.
a) quale è il lavoro totale svolto dalle due forze sulla cassaforte durante lo spostamento d ?
b) quale è il lavoro $\mathbf{L_g}$ sviluppato sulla cassaforte dalla sola forza di gravità ed il lavoro $\mathbf{L_N}$ compiuto dalla forza normale esercitata dal suolo ?
c) la cassaforte era inizialmente ferma, quale è la velocità finale al termine dello spostamento d ?

Idea chiave:

- Il lavoro totale è pari alla somma dei lavori svolti dalle due forze.
- La cassaforte è assimilabile ad un corpo puntiforme di massa m
- le forze sono costanti, quindi L=**F·d**



a)

$$L_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} = F_1 d \cos\phi_1 = (12.0N)(8.5m)(\cos 30^0) = 88.33\,J$$

$$L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d} = F_2 d \cos\phi_2 = (10.0N)(8.5m)(\cos 40^0) = 65.11\,J$$

$$L = L_1 + L_2 = 83.33\,J + 65.11\,J = 153.4\,J$$

b)

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos(90^0) = 0$$

$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = Nd\cos(90^0) = 0$$

forze **perpendicolari** allo spostamento non compiono lavoro!!! non trasferiscono energia cinetica al corpo

c) applico il **teorema energia cinetica**

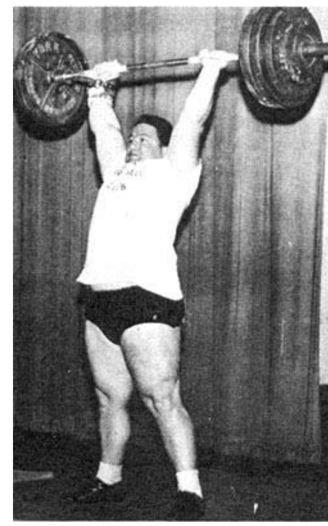
$$L = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2(153.4\,J)}{225\,kg}} = 1.17\,m/s$$

2. Alle Olimpiadi del 1996 Andrej Chemerkin sollevò dal pavimento a sopra la testa (dislivello di circa **2 m**) un peso record di **2548 N (=260.0 kg)**. Nel 1957 Paul Anderson si infilò carponi sotto una robusta piattaforma di legno e spinse con il dorso la piattaforma verso l'alto, sollevandola di circa **1.0 cm**. Sulla piattaforma c'erano pezzi di automobili e una cassaforte riempita di piombo per un peso complessivo di circa **27900N (=2480 kg)**.

a) calcolare il lavoro fatto dalla forza di gravità durante il sollevamento dei due pesi.

b) calcolare i lavori svolti dai due atleti.



Idea chiave:

- assimilo i corpi sollevati a dei corpi puntiformi di massa corrispondente.

a) La forza di gravità è costante, quindi L = **F·d**

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos(180^0) = (2500N)(2.0m)\cos(180^0) = -5000\,J$$

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos(180^0) = (27900N)(0.01m)\cos(180^0) = -280\,J$$

b) non conosco i dettagli della forza applicata dai due atleti (forza di andamento molto irregolare). Sappiamo però che i pesi erano fermi sia all'inizio che alla fine del sollevamento, quindi il lavoro svolto dagli atleti deve essere opposto al quello svolto dalla forza di gravità:

$$L_{AC} = -L_{g1} = +5000\,J$$

$$L_{PA} = -L_{g2} = +280\,J$$

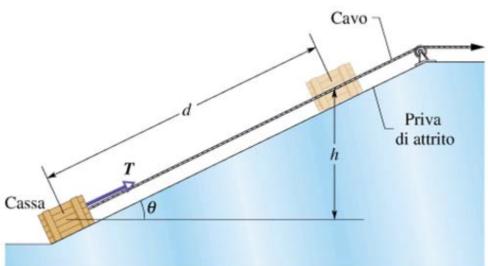
N.B. Anderson dovette applicare una forza enorme verso l'alto, ma un lavoro modesto, dato il cortissimo spostamento!!!

3. Una cassa di **15 kg** è trascinata in salita a velocità costante su una rampa priva di attrito per una distanza d=5.70 m, fino a un'altezza h = 2.50 m rispetto al suo punto di partenza, quindi si arresta.

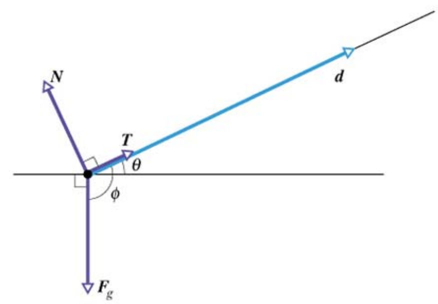
a) quanto lavoro viene svolto dalla forza gravitazionale $\mathbf{F_g}$?

b) quanto lavoro viene compiuto sulla cassa dalla forza T del cavo che tira su la cassa per il piano inclinato ?

c) cosa succede se sollevo la cassa della stessa quota h ma con rampa più lunga?



(a)



(b)

Idea chiave:

- tratto la cassa come corpo puntiforme (posso applicare il teorema energia cinetica)
- calcolo il lavoro come $L=\mathbf{F_g}\cdot\mathbf{d}$

a) $L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos(\theta + 90^0) = -mgd\sin\theta$

$h = d\sin\theta$

$L_g = -mgh = -(15.0kg)(9.8m/s^2)(2.50m) = -368J$

N.B. il lavoro compiuto da F_g dipende **SOLO** da **spostamento verticale** [vedi energia potenziale]

b) non conosco T, quindi non posso calcolare L_T come in precedenza applico il teorema della energia cinetica

$\Delta K = L_T + L_g + L_N$

$0 = L_T + L_g + 0$ il corpo è fermo prima e dopo lo spostamento

$L_T = -L_g = 368J$

c) il lavoro rimane eguale (dipende solo da h), mentre la tensione T diminuisce, infatti

$L_T = mgh = 368J = \vec{T}\cdot\vec{d} = Td\cos(0^0) = Td$ se d aumenta, T diminuisce

4. La cabina di un ascensore di massa **m = 500 kg** sta scendendo alla velocità **v_i = 4.0 m/s,** quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandolo cadere con accelerazione cotante **a = g**/5.

a) determinare il lavoro **L_g** svolto dalla forza peso durante la caduta di un tratto **d = 12 m**;

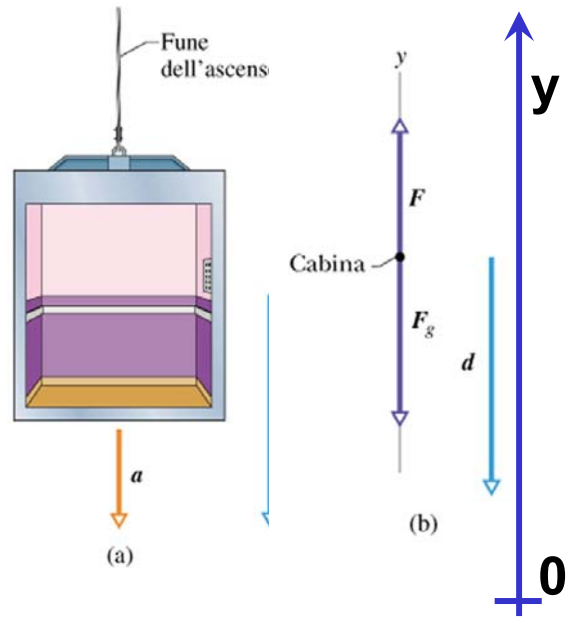
b) determinare, lungo il medesimo tratto, il lavoro **L_T** svolto dalla forza di trazione **T.**

c) determinare il lavoro totale sviluppato sulla cabina durante la caduta di 12 m.

d) calcolare la variazione di energia cinetica della cabina alla fine della caduta di 12 m.

Idea chiave:

- tratto la cabina come corpo puntiforme



a) Il lavoro svolto dalla forza peso durante la caduta è pari a:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mg\,d\cos 0^0 = mgd$$

$$= (500kg)(9.8m/s^2)(12m)$$

$$= 5.88\times 10^4 J \approx 59kJ$$

b) Per calcolare il lavoro svolto dalla tensione T della fune devo ricavare una espressione per T. Utilizzo la seconda legge di Newton:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{T} = m\vec{a}$$

proietto tale equazione su y:

$$-mg + T = ma \quad \Rightarrow \quad T = ma + mg = m(a+g)$$

da cui ricavo il lavoro della tensione:

$$L_T = \vec{T}\cdot\vec{d} = Td\cos(180^0)$$

$$= -m(a+g)d \qquad \text{sapendo che a = -g/5 (verso il **basso**)}$$

$$= -m(-g/5+g)d = -4/5mgd = -4/5(500kg)(9.8m/s^2)(12m) = 47kJ$$

c) Il lavoro e una quantità scalare, quindi additiva:

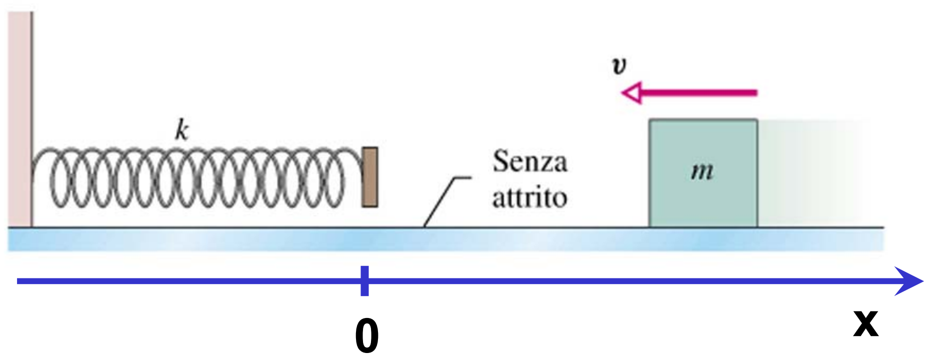
$$L = L_g + L_T = 59kJ - 47kJ = 12kJ$$

d) Applico il teorema dell'energia cinetica: la variazione di K è pari al lavoro svolto sulla cabina

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = L + \frac{1}{2}mv_i^2 = 12kJ + 1/2(500kg)(4.0m/s)^2 \approx 16kJ$$

5. Un blocco di massa **m = 0.40 kg** scivola a velocità costante **v = 0.50 m/s** su un piano orizzontale privo di attrito. Il blocco si arresta comprimendo una molla collocata sul percorso.
La costante elastica della molla è **k = 750 N/m**.
Per quale massima distanza **d** è compressa la molla ?



Idee chiave:

- il lavoro svolto dalla molla è legato alla distanza d cercata
- sfrutto il teorema dell'energia cinetica
- l'energia cinetica è nulla quando il blocco si ferma

$$L_{molla} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$L_{molla} = \int_0^{-d} \vec{F}_{molla} \cdot d\vec{x} = -\int_0^{-d} kx\,dx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_0^{-d} = -\frac{1}{2}kd^2$$

Quindi:

$$-\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$d = v_i\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.50m/s\sqrt{\frac{0.40kg}{750N/m}} = 0.012\times10^{-2}m \approx 1.2cm$$

6. Due forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ agiscono su una cassa che scivola verso destra su un pavimento privo di attrito. La forza $\mathbf{F_1}$ è orizzontale e ha intensità **2.0 N.** La forza $\mathbf{F_2}$ forma un angolo di **60** ^{0} rispetto al piano orizzontale e ha intensità **4.0 N**.

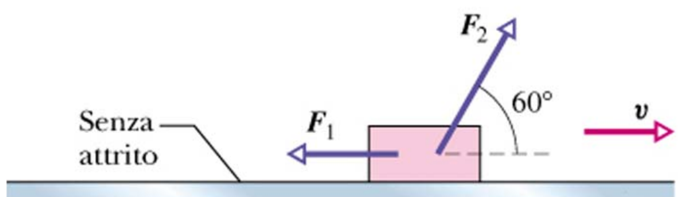
La velocità v della scatola in un certo istante è **3.0 m/s**.

a) quale è la potenza dovuta a ciascuna delle due forze in quell'istante e quanto vale la potenza complessiva ?

La potenza complessiva è costante ?

b) Se il modulo di $\mathbf{F_2}$ fosse invce **6.0 N**, quale sarebbe la potenza dovuta a ciascuna forza e quale la potenza complessiva ?

La potenza complessiva è costante ?



Idea chiave:

- si tratta di potenza istantanea e non media
- la potenza è una grandezza additiva

a)
$$P_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v} = F_1 v \cos\phi_1 = (2.0N)(3.0m/s)\cos(180^0) = -6.0W$$
$$P_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v} = F_2 v \cos\phi_2 = (4.0N)(3.0m/s)\cos(60^0) = 6.0W$$

F_1 trasferisce energia a spese del corpo
F_2 trasferisce energia a favore del corpo

$$P_{tot} = P_1 + P_2 = -6.0W + 6.0W = 0.0W$$

non ho trasferimento di energia $\Rightarrow$ energia cinetica rimane costante
v rimane costante
P_{tot} rimane costante [le forze sono costanti]

b)
$$P_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v} = F_2 v \cos\phi_2 = (6.0N)(3.0m/s)\cos(60^0) = 9.0W$$
$$P_{tot} = P_1 + P_2 = -6.0W + 9.0W = 3.0W > 0$$

ho trasferimento di energia $\Rightarrow$ energia cinetica aumenta
v aumenta
le potenze variano e quindi P_{tot} NON rimane costante

$\Rightarrow$ il valore P_{tot}=3.0W vale solo all'istante in cui v=3.0m/s

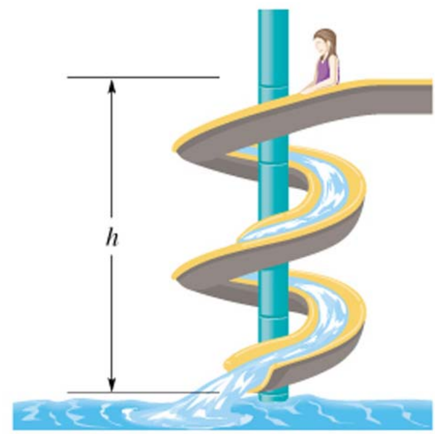
Problemi: conservazione energia meccanica [forze conservative]

7. Un bambino di massa **m** è lasciato andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo tridimensionale, a un'altezza **h = 8.5 m,** sopra il livello della piscina.
A che velocità starà scivolando quando arriva in acqua?
Si supponga lo scivolo privo di attrito.

Idea chiave:

- non posso trovare la velocità finale del bambino attraverso la sua accelerazione (**F=ma**) perché non conosco la pendenza dello scivolo.

- posso applicare principio di conservazione energia meccanica., infatti ho sistema isolato e forze conservative:



sistema : **bambino – Terra**
forza: **forza gravitazionale** e **forza normale** (non compie lavoro)

$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(y_i - y_f)$$

$$\Delta K = L_g$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mg\int_{y_i}^{y_f} dx$$

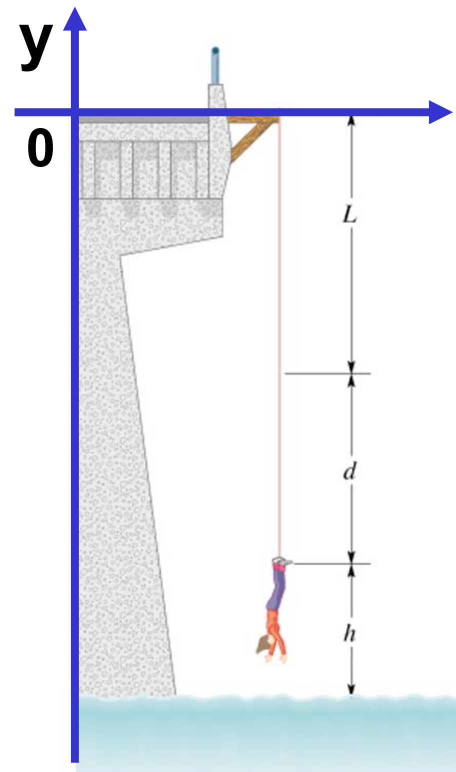
$$= -mg(y_f - y_i)$$

ponendo $v_i=0$, $y_i-y_f=h$

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8m/s^2)(8.5m)} = 13\,m/s$$

N.B. questa è la stessa velocità che il bambino avrebbe cadendo lungo la verticale per 8.5 m.

8. Una praticante di salto con l'elastico si trova su un ponte alto **45.0 m** sul livello del fiume. La ragazza ha una massa di **61.0 kg** . Allo stato di riposo la corda elastica ha una lunghezza di **25.0 m**. Supponiamo che la corda segua la legge di Hooke, con costante elastica **k = 160 N/m**. Se la saltatrice si arresta prima di avere raggiunto l'acqua, a quale quota **h** si trova al di sopra del livello del fiume ?



Idea chiave:

- applico il principio di conservazione dell'energia meccanica, valido per sistema isolato e forze conservative
-

sistema : **donna – elastico-Terra**
forza: **forza gravitazionale** e **forzaelastica** (entrambe conservative)

$$\Delta E_{mecc,i} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0 \qquad v_f = v_i = 0$$

$$\Delta U_g = mg\Delta y = -mg(L+d)$$

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} k d^2 \qquad d = allungamento\ molla$$

$$0 + \frac{1}{2} k d^2 - mg(L+d) = 0$$

$$\frac{1}{2} k d^2 - mgd - mgL = 0$$ equazione di secondo grado nella variabile d

$$d = \frac{mg \pm \sqrt{(-mg)^2 + 4(\frac{1}{2}k)mgL}}{2(\frac{1}{2}k)} = \frac{597 \pm \sqrt{(597)^2 + 4.810^6}}{160} m = \frac{597 \pm 2271}{160} m = \begin{cases} 17.9\, m \\ \cancel{-10.5}\, m \end{cases}$$

$$h = 45.0\, m - (L+d) = 45.0\, m - 25.0\, m - 17.9\, m = 2.1\, m$$

in alternativa: $\Delta K = L_g + L_e$ **teorema forze vive**

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0 = -mg \int_0^{-(L+d)} dx + \int_0^d (-k_e x) dx = mg(L+d) - \frac{1}{2} k_e d^2$$

Problemi: forze non conservative

10. Le gigantesche statue delle isole di Pasqua furono probabilmente trasportate su una slitta di legno fatta scivolare su un sistema di rulli anch'essi di legno. Una squadra di **25** uomini ha verificato questa ipotesi, tirando in piano per **45 m** una statua di massa **m=9000 kg,** in circa **2 min**.

a) stimare il lavoro svolto dalla forza netta **F** applicata dalla squadra, stabilendo su quale sistema la forza ha compiuto lavoro.
b) qual è l'energia termica prodotta dal sistema durante lo spostamento ?
c) stimare il lavoro che si sarebbe svolto per una percorso piano di **25 km**. stimare anche la variazione totale di energia termica prodotta sul sistema.

a) calcolo il lavoro svolto mediante L = **F·d**

con **F = 25 (2mg)** ossia ogni uomo tira con forza doppia del suo peso, ed **m = 80 kg**

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = 25(2mg)d\cos(0^0)$$
$$= 50(80kg)(9.8\,m/s^2)(45m) = 1.8\;10^6 J \approx 2MJ$$

sistema: statua-slitta con rulli e Terra (infatti si deve essere sviluppato notevole attrito tra la slitta con rulli ed il terreno, producendo una variazione di energia termica ΔE_{th} di questi elemernti del sistema)

b) Idea chiave: correlo il lavoro svolto da F a variazione energia meccanica ed energia termica

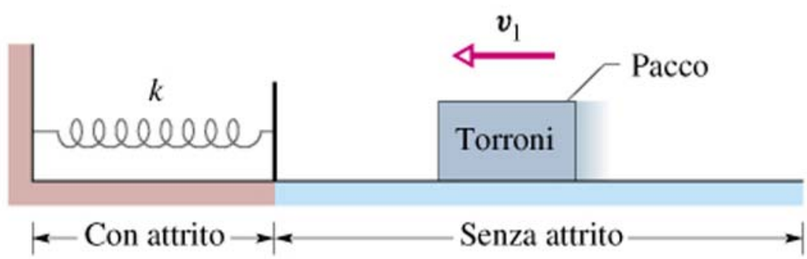
$$L = \Delta E_{mecc} + \Delta E_{th} = 0 + \Delta E_{th}$$
$$\Delta E_{th} = L \approx 2\,MJ$$

non ho variazione energia meccanica: la statua parte da ferma e finisce ferma, si muove in piano.

c)
$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = 25(2mg)d\cos(0^0)$$
$$= 50(80kg)(9.8\,m/s^2)(25 10^3\,m) = 3.9\;10^8 J \approx 400MJ$$
$$\Delta E_{th} = L \approx 400MJ$$

lavoro enorme ma non impossibile !

11. Un pacco di massa 2.0 kg sta scivolando senza attrito su una superficie con velocità $\mathbf{v_i}$ **= 4.0 m/s.** Va a finire contro una molla e la comprime fino ad arrestarsi momentaneamente. La superficie è priva di attrito per il tratto su cui scivola liberamente, mentre dal punto in cui tocca la molla in avanti agisce sul pacco una forza di attrito di modulo **15.0 N**. La costante elastica della molla vale **10000 N/m**. Di che lunghezza **d** si comprime la molla per arrestare il pacco ?



Idea chiave:

- esamino tutte le forze che agiscono sul pacco e stabilisco se siamo in presenza di forza esterna che compie lavoro o il sistema è isolato

- il sistema pacco-molla-superficie-parete rigida è **isolato** [include **tutte** le forze: F_g, N, $F_{attrito}$, F_{molla} (su pacco e parete rigida)]

$$\Delta E_{mecc} + \Delta E_{th} = 0$$

$$E_{mecc,1} = E_{mecc,2} + \Delta E_{th}$$

1 = momento iniziale slittamento
2= momento finale di arresto pacco su molla

$$E_{mecc,1} = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0$$

$$E_{mecc,2} = K_2 + U_2 = 0 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kd^2$$

d = compressione molla

$$\Delta E_{th} = f_k d$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kd^2 + f_k d$$

$$5000\,d^2 + 15d - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0.055\,m = 5.5\,cm$$