

Il campo magnetico

Un campo magnetico può essere creato da **cariche elettriche in moto**, cioè da una corrente, oppure da un **magnete permanente**

Sperimentalmente si trova che esistono **due polarità** nel magnetismo polo **nord** e polo **sud**: poli uguali si respingono, poli opposti si attraggono. A differenza del campo elettrico, per il campo magnetico **non è** stato ancora isolato il **monopolo magnetico**, anche se le teorie lo hanno ipotizzato; come conseguenza non possiamo definire il campo magnetico utilizzando una sonda di prova.

L'interazione elettrica e l'interazione magnetica sono due aspetti diversi della stessa interazione, **l'interazione elettromagnetica**

Sperimentalmente si trova che una **carica elettrica in quiete** in un campo magnetico **non subisce interazioni** che ne alterino lo stato di moto, mentre una **carica elettrica in moto** in un campo magnetico **risente di una forza** distinta da quella dovuta all'interazione gravitazionale e a quella elettrica

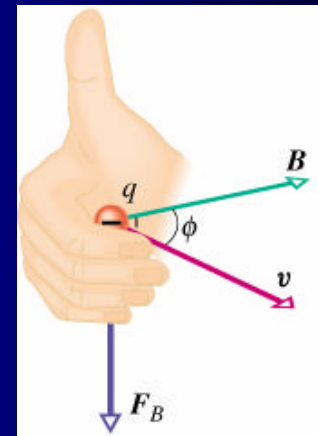
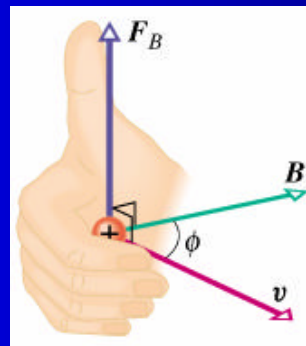
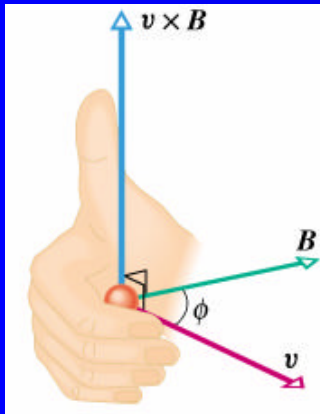
La forza dovuta al campo magnetico si determina sperimentalmente osservando l'azione del campo su diverse particelle in condizioni di moto differenti. Si trova che

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Forza di Lorentz}$$

La relazione così trovata ci dice che il **campo magnetico agisce solo su particelle dotate di carica e già in moto con velocità v** .

Inoltre possiamo notare che:

- $\mathbf{F}_B = 0$ se $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$
- $\mathbf{F}_B \perp \mathbf{v}$ e $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F}_B$ non compie lavoro $\Rightarrow E$ si conserva
- la particella si muove su una traiettoria circolare in un piano $\perp \mathbf{B}$

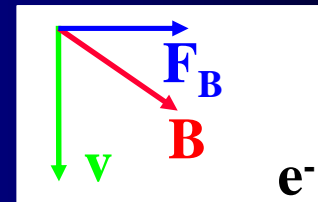
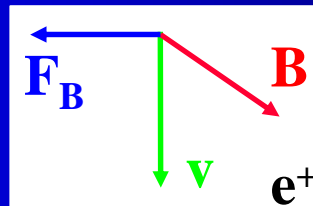




Interazione di un fotone γ con un elettrone

in una camera a bolle del LBL (Lawrence Berkeley Laboratory). La camera contiene idrogeno liquido ed è immersa in un campo magnetico uscente \perp al foglio.

Nell'urto γe^- , viene prodotta una coppia $e^+ - e^-$ (positrone ed elettrone): le due particelle, avendo carica opposta, vengono deviate in direzioni opposte dal campo magnetico. Il moto a spirale è determinato dalla perdita di energia delle particelle che interagiscono con gli atomi di idrogeno



Infine si nota che **B non dipende né da q né da v** e quindi descrive una **proprietà caratteristica** del campo magnetico detta **intensità del campo magnetico o induzione magnetica**.

Se abbiamo contemporaneamente campo elettrico e magnetico, la forza totale agente sulla particella di carica q e in moto con velocità v vale

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Questa forza è detta, a volte, **forza di Lorentz**

Alcuni valori approssimati di campo magnetico

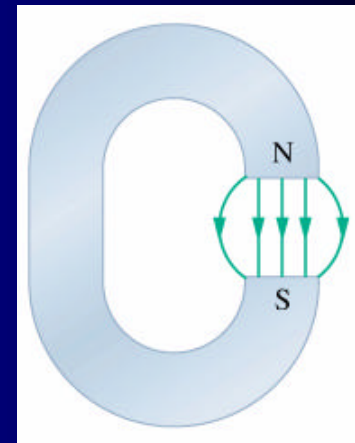
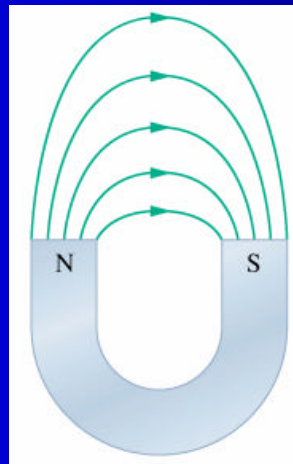
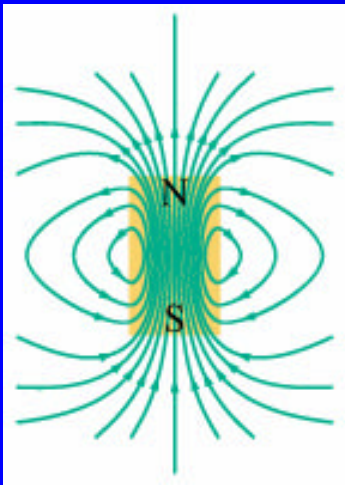
Sulla superficie di una stella di neutroni	10^8 T
In prossimità di un grande elettromagnete	1.5 T
Vicino a una barretta magnetica	10^{-2} T
Sulla superficie della Terra	10^{-4} T
Nello spazio interstellare	10^{-10} T
Il più piccolo valore in una camera magneticamente schermata	10^{-14} T

L'unità di misura dell'intensità del campo magnetico è il **Tesla (T)** o il **Gauss (G)**

$$[B] = N / (Cms^{-1}) = kgs^{-1}C^{-1} = T \quad 1T = 10^4 G$$

Anche per il campo magnetico possiamo definire le **linee di forza** che sono sempre tangenti alla direzione del campo e la cui densità è proporzionale all'intensità del campo

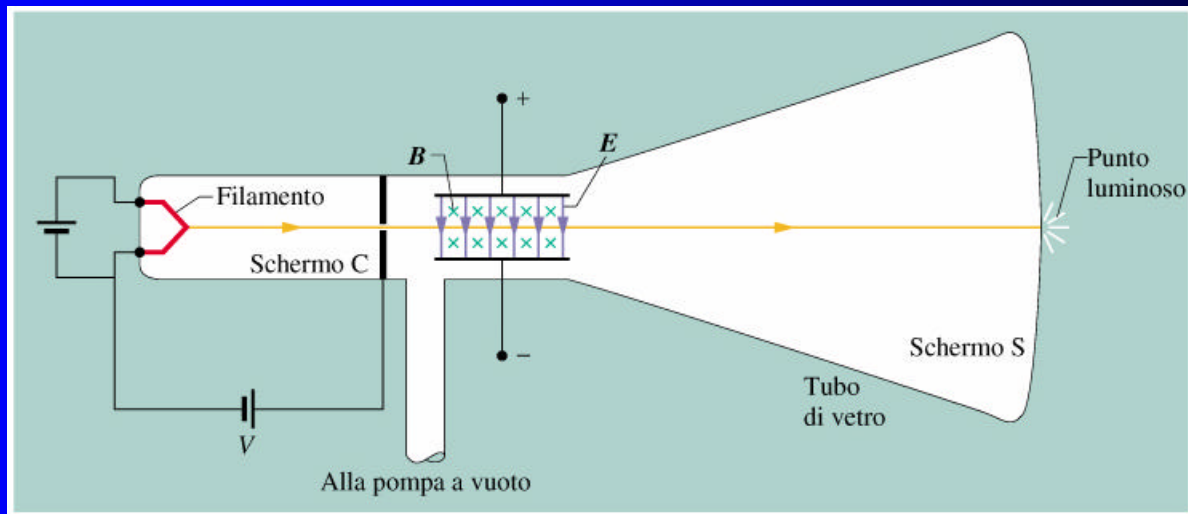
A differenza del campo elettrico, non essendo stato ancora identificato il monopolo magnetico, le **linee di forza sono continue** e passano sempre all'interno della sorgente del campo magnetico, uscendo dal polo nord ed entrando in quello sud. **Polo nord terrestre** è in realtà un polo sud, o **polo nord geomagnetico** e le linee di forza entrano nel polo nord terrestre ed escono da quello sud



Esperimento di J.J. Thomson

Esperimento del 1897 a Cambridge, porta alla **scoperta dell'elettrone**
Thomson usa un tubo a raggi catodici in cui sono presenti un campo **E**
ed un campo **B** \perp tra di loro (**campi incrociati**).

Nel tubo c'è il vuoto ed il filamento incandescente emette particelle cariche (che risulteranno essere degli e^-) che vengono accelerate dalla V .
Le particelle passano per C, entrano in un zona in cui ci sono **E** e **B** ed infine arrivano sullo schermo S che è fluorescente. Regolando **E** e **B** si determina il punto finale sullo schermo S



Thomson procedette nel seguente modo

- fece passare le particelle attraverso il tubo con $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ottenendo così la posizione non deflessa del fascio sullo schermo
- applicò \mathbf{E} e misurò la deflessione su S
- mantenendo \mathbf{E} , applicò \mathbf{B} in modo da bilanciare la deflessione dovuta ad \mathbf{E}

La **deflessione dovuta ad \mathbf{E}** è data da

$$y_E = \frac{qEL^2}{2mv^2}$$

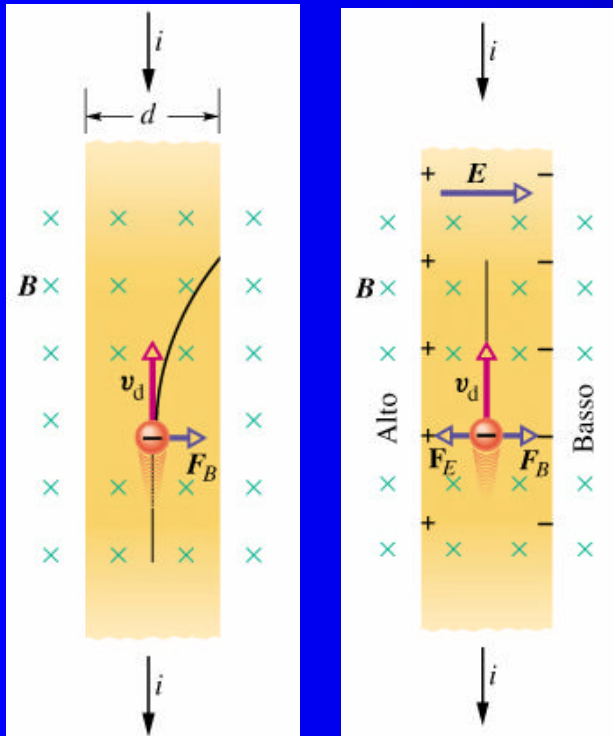
Thomson ricavò che la deflessione era quella di una **particella con carica negativa**

Il campo **\mathbf{B} applicato bilancia \mathbf{E}** ? si determina la **velocità**

$$|q|E = |q|vB \sin(90^\circ) = |q|vB \Rightarrow v = \frac{E}{B} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{B^2 L^2}{2yE} \Rightarrow \frac{m}{q}$$

L'effetto Hall

Hall fece questo esperimento nel 1879 a 24 anni durante il dottorato con Rowland: studio del **moto dei portatori di carica** in un conduttore immerso **in campo magnetico** \Rightarrow **portatori di carica sono gli elettroni**



Corrente **i** in un conduttore immerso in campo magnetico **B** \perp al piano del conduttore ed entrante

Gli elettroni sono deviati verso destra dalla **forza di Lorentz** (**F_B**), dopo un certo tempo si ha un accumulo di carica sul lato destro del conduttore e un conseguente **E** da sinistra a destra del conduttore, la **DV** (**d.d.p. di Hall**) vale

$$\Delta V = Ed$$

Dopo un certo tempo (t_{eq}) il campo elettrico dovuto alla d.d.p. di Hall esercita sugli elettroni una forza (\mathbf{F}_E) uguale ed opposta ad \mathbf{F}_B e sugli elettroni agisce una forza risultante nulla.

Misurando il valore della d.d.p. si trova quale lato è a V maggiore e si determina la carica dei portatori di carica.

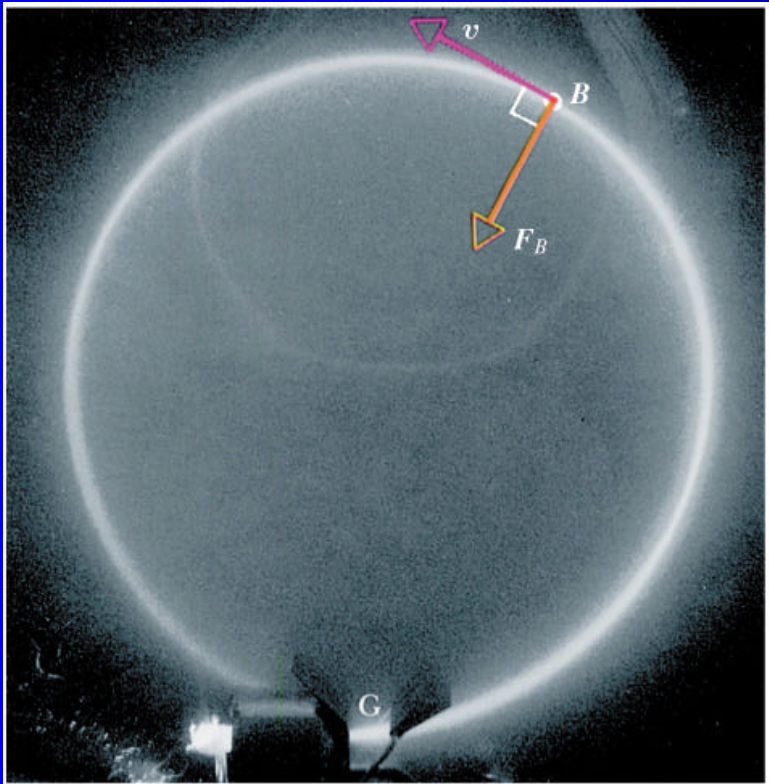
Se la sezione trasversale della lamina vale A , il suo spessore è $l=A/d$, e otteniamo

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{\vec{E}}| &= |\vec{F}_{\vec{B}}| \Rightarrow eE = ev_d B \quad ; \quad v_d = \frac{j}{ne} = \frac{i}{neA} \\ \Rightarrow n &= \frac{Bi}{eAE} = \frac{Bi}{eldE} = \frac{Bi}{el\Delta V} \end{aligned}$$

In questo modo si ricava la **densità dei portatori di carica**, oppure si può ricavare la **velocità di deriva** v_d (cm/h). Si fa muovere la lamina conduttrice con velocità variabile in verso opposto a quello dei portatori di carica fino a che la d.d.p. Hall scompare, a questo punto v_d è uguale alla velocità della lamina rispetto al laboratorio.

Carica in moto circolare

Prendiamo una particella in **moto circolare uniforme**, $|\mathbf{v}| = \text{cost.}$, sulla particella deve agire una **forza risultante centripeta**, ovvero sempre \perp a \mathbf{v} e costante in modulo, **forza di Lorentz** ha queste caratteristiche.



Elettroni in moto circolare uniforme
in un campo magnetico \perp al foglio
ed uscente

Analizziamo il moto delle particelle
cariche

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F = m \frac{v^2}{r} \text{ e } F = qvB \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \text{ raggio della circonferenza}$$

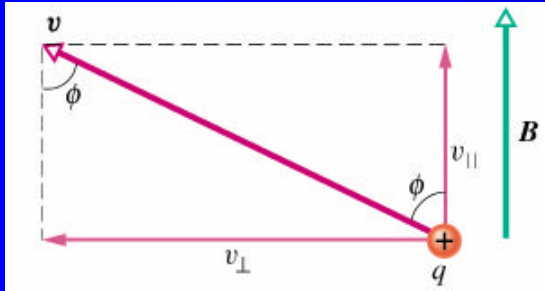
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} \text{ periodo}$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \text{ frequenza}$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{qB}{m} \left(\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \right) \text{ pulsazione di ciclotrone}$$

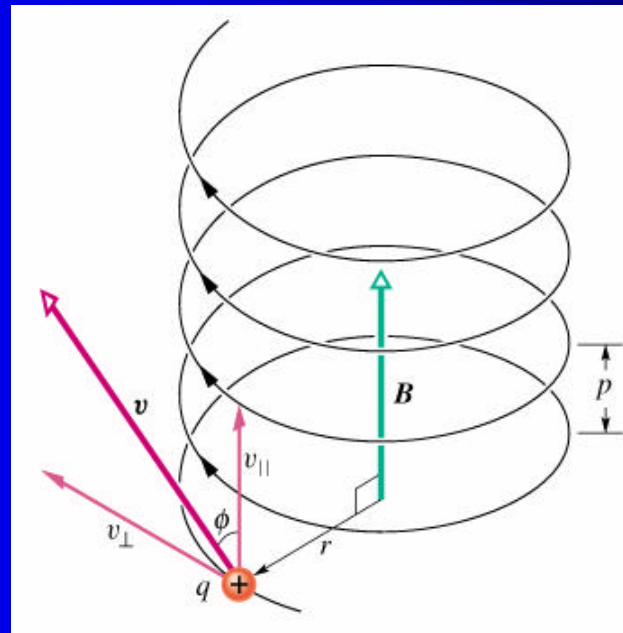
Si nota che, per velocità non relativistiche, **T**, **n** e **ω** non dipendono da **v**. All'**umentare** della **velocità**, **umenta** anche il **raggio** della traiettoria. Notiamo inoltre che tutte le **particelle** con lo **stesso** rapporto **m/q** hanno il **medesimo T**; se **q > 0** la **rotazione** avviene in verso **antiorario**, se **q < 0** in verso **orario**, osservando nella direzione di B.

Consideriamo ora il caso in cui la particella carica abbia una componente della velocità parallela alla direzione del campo magnetico, la traiettoria risultante è un'elica.

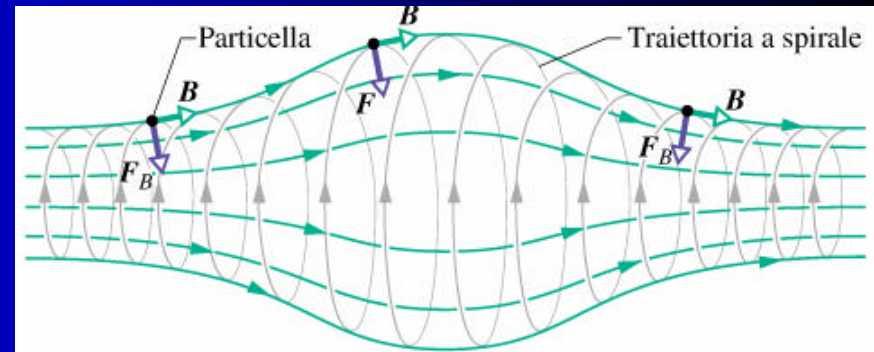
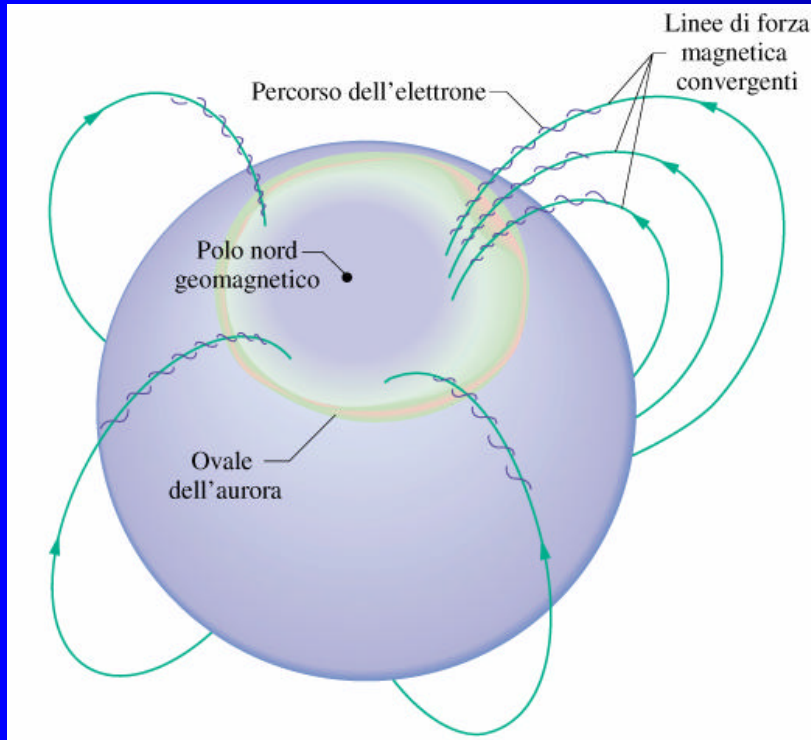


$$v_{\parallel} = v \cos f \text{ e } v_{\perp} = v \sin f$$

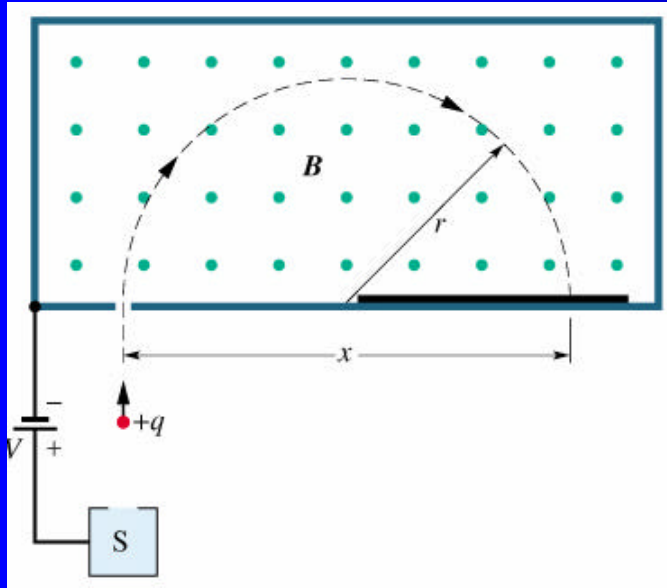
v_{\parallel} determina il **passo** dell'elica, v^{\wedge} il **raggio**



Come applicazioni di questo effetto abbiamo la **bottiglia magnetica** di cui un esempio sono le **fasce di radiazione di van Allen** e il fenomeno dell'**aurora polare**.



Spettrometro di massa (Dempster)



Prendo delle **particelle** con carica **+q** (**ioni**) prodotte da una sorgente S e le accelero attraverso una d.d.p. **ΔV** , poi le faccio entrare in una zona in cui c'è un campo magnetico **B** **al foglio** ed **uscente**. La **velocità v** con cui gli ioni entrano nella zona in cui c'è **B** si ricava dalla **conservazione dell'energia** (gli ioni escono dalla sorgente con velocità trascurabile)

$$E_K = E_p \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow v^2 = 2\left(\frac{q}{m}\right)\Delta V$$

$$r = \frac{vm}{qB} \Rightarrow v = \left(\frac{q}{m}\right)Br \Rightarrow \left(\frac{q}{m}\right)^2 = \frac{2\left(\frac{q}{m}\right)\Delta V}{B^2r^2}$$



$$\frac{q}{m} = \frac{2\Delta V}{B^2r^2}$$

Notiamo che il **rapporto tra carica e massa di uno ione** dipende solo da **B**, **DV** ed **r**, quindi, dato che **B** e ΔV sono noti per costruzione, la misura di **r ci dà il rapporto (q/m)**. Grazie allo spettrometro di massa sono stati scoperti gli **isotopi** (^{12}C , ^{13}C).

Inoltre, misurando **q/m al variare di v** si trova che $m = m_0/(1-v^2/c^2)^{1/2}$, pertanto **q** risulta essere una quantità **invariante**, ovvero ha lo stesso valore per tutti gli osservatori in moto relativo uniforme.

Il ciclotrone



Il primo ciclotrone fu realizzato nel 1932 da **Lawrence**. Gli elementi fondamentali del ciclotrone sono una **sorgente di ioni S** posta al centro dell'acceleratore, due regioni (**D**) di spazio, delimitate da superfici conduttrici, dentro le quali c'è il **vuoto**. Perpendicolarmente al piano in cui si svolge il moto degli ioni, esiste un **campo magnetico B uniforme** e uscente dal foglio.

Tra le due D è applicata una **d.d.p. DV** dell'ordine di **10^4 Volt**. Ioni positivi prodotti dalla sorgente S entrano nella prima D, nel cui interno non esiste campo elettrico, ma solo campo magnetico; come conseguenza gli ioni vengono deflessi e seguono una **traiettoria circolare** il cui raggio dipende da **B**, **DV** e **v**. Uscito dalla prima D, lo ione si trova un campo elettrico che lo accelera verso la seconda D.

Affinché ad ogni passaggio tra le D lo ione trovi un campo accelerante che aumenta la sua energia, il valore del **campo elettrico** tra le due D **deve variare nel tempo con la stessa frequenza** con cui gli ioni si muovono nel campo magnetico (**pulsazione di ciclotrone**), quindi

$$V = V_0 \sin \omega t \quad \text{inoltre} \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

Dopo mezzo giro la polarità delle D si è invertita. Ad ogni salto tra le D **il raggio della traiettoria aumenta, mentre ω rimane costante.**

Quando si arriva al bordo delle D (**raggio della traiettoria R**) e velocità degli ioni pari a v_{MAX} , si estrae il fascio di ioni. Avremo

$$R = \frac{m v_{MAX}}{q B} \quad \text{e} \quad v_{MAX} = \left(\frac{q}{m} \right) B R$$
$$E_K = \frac{1}{2} m v_{MAX}^2 = \frac{1}{2} q \left(\frac{q}{m} \right) B^2 R^2$$

Notiamo che **l'energia cinetica non dipende dalla d.d.p. DV tra le D.**

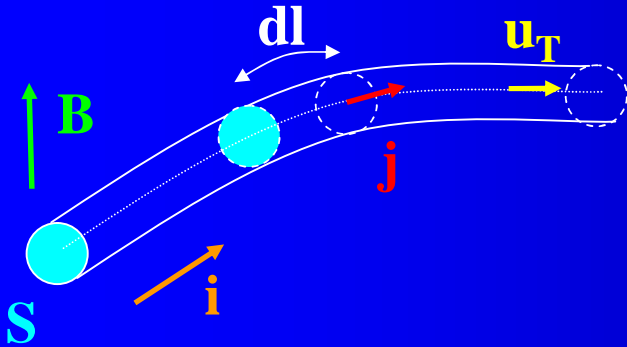
All'aumentare dell'energia, aumenta la velocità, quando arriviamo a **velocità relativistiche, la massa m varia** e di conseguenza **varia** anche la **pulsazione di ciclotrone** e non abbiamo più risonanza tra moto degli ioni e d.d.p.

Consideriamo un **protone da 50 MeV** ($v/c \geq 10\%$), a causa degli effetti relativistici si ha che la **frequenza di ciclotrone diminuisce**.

Se invece consideriamo un **protone da 500 GeV** in un campo magnetico da 1.5 T, otteniamo che il **raggio della traiettoria** descritta dal protone è pari a **1,1 km**.

Protosincrotrone: **B e n_{osc} variano** nel tempo in modo che **$n_{cycl} = n_{osc}$** , la **traiettoria** diviene ora **circolare**, allora l'acceleratore sarà un anello di raggio pari a quello della traiettoria seguita dai protoni. Per arrivare ad alte energie abbiamo bisogno comunque di **anelli di raggio elevato**. Protosincrotrone del Fermilab ha un raggio di 6.3 km e accelera protoni ad energie dell'ordine del $TeV = 10^{12}$ eV.

Forza magnetica su di una corrente



Consideriamo un conduttore attraverso il quale fluisce una corrente \vec{i} dovuta al moto delle cariche con velocità \vec{v} .

Se abbiamo n portatori di carica per unità di volume, nell'unità di tempo attraverso la sezione S passano $n\vec{v}$ particelle.

$$\vec{j} = nq\vec{v} \Rightarrow i = \vec{j} \cdot \vec{S} = nq\vec{v} \cdot \vec{S} = nqvS \quad \vec{j} \parallel \vec{S}$$

Pongo il conduttore in una zona in cui c'è campo magnetico \vec{B} uniforme, su ogni carica in moto agirà la forza di Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$, quindi per unità di volume, avremo

$$\vec{f} = nq\vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Per un volume infinitesimo dV sarà

$$d\vec{F} = \vec{f}dV = \vec{j} \times \vec{B}dV$$

E per tutto il volume

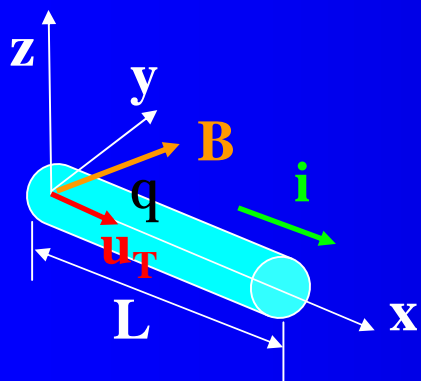
$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B}dV$$

Nel caso del filo, $dV = Sdl$, quindi

$$\vec{F} = \int_l \vec{j} \times \vec{B}Sdl \stackrel{\vec{j}=j\vec{u}_T}{=} \int_l j\vec{u}_T \times \vec{B}Sdl = \int_l (jS)\vec{u}_T \times \vec{B}dl \stackrel{q=\text{cost}}{=} i \int_l \vec{u}_T \times \vec{B}dl$$

$jS=i=\text{cost}$

Consideriamo un conduttore rettilineo in un campo magnetico uniforme



\mathbf{u}_T e \mathbf{B} sono **vettori costanti**

$$\vec{F} = i\vec{u}_T \times \vec{B} \int_L dl = i\vec{u}_T \times \vec{B}L$$

\mathbf{F} è sempre \perp a \mathbf{B} e \mathbf{u}_T , il suo modulo vale

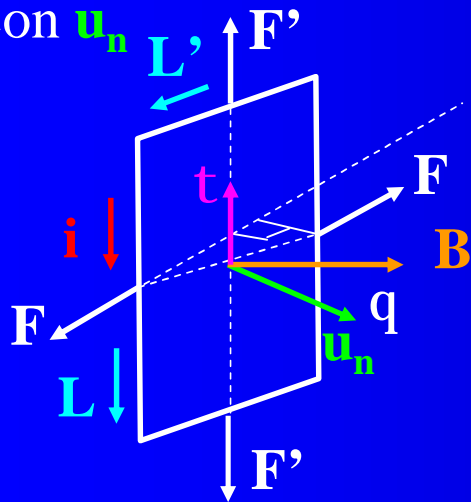
$$|\vec{F}| = iBL \sin q$$

$$q = 0 \Rightarrow (\vec{u}_T \parallel \vec{B}) \Rightarrow F = 0$$

$$q = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\vec{u}_T \perp \vec{B}) \Rightarrow F = iBL = F_{MAX}$$

Su questo principio sono basati i motori elettrici

Consideriamo una spira rettangolare di lati L ed L' , percorsa da corrente i ed immersa in un campo magnetico uniforme B che forma un angolo q con u_n



Sui lati L' agiscono forze F' uguali in modulo, ma opposte in verso

$$F' = iBL' \cos q$$

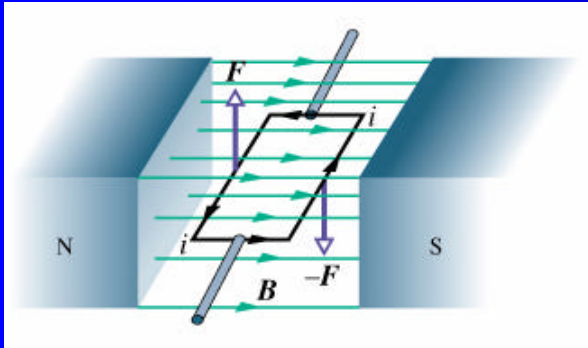
Il loro effetto è di tentare di **deformare il circuito**, ma non danno origine **né a coppie né a momenti**.

Sui lati L invece, abbiamo forze F uguali in modulo, opposte in direzione ed agenti su **rette d'azione diverse**, esse pertanto danno origine ad una **coppia di forze e ad un momento**.

$$F = iBL \quad t = (iBL)(L' \sin q) \stackrel{LL'=S}{=} (iS)B \sin q$$

t tende ad orientare la spira \perp a B , t è \perp al piano in cui si trovano le F ed è \parallel al lato L .

Definisco ora il vettore



$$\vec{m} = iS\vec{u}_n \quad \perp \text{ al piano della spira}$$

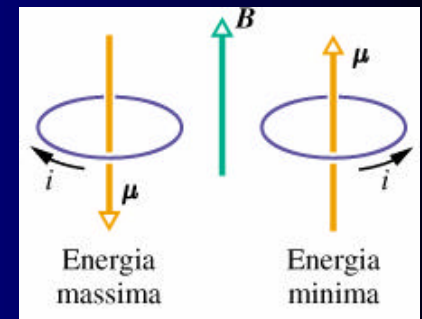
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{e} \quad t = mB \sin \alpha$$

m è il **momento magnetico di dipolo della spira** percorsa da corrente. In analogia con quanto visto per i dipoli elettrici, abbiamo che **l'energia magnetica di una spira** percorsa da corrente è

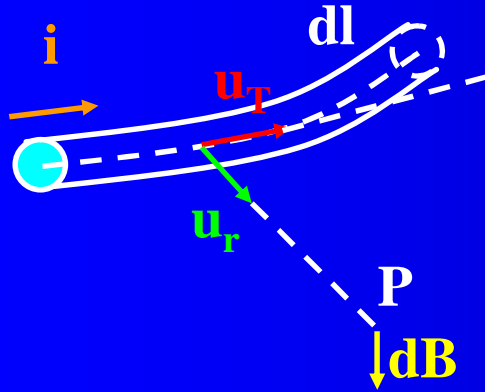
$$U_{mag} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

L'unità di misura di m è

$$[m] = J / T = m^2 s^{-1} C$$



Legge di Ampère-Laplace



Sperimentalmente si è scoperto che un **filo percorso da corrente** crea un **campo magnetico** nello spazio circostante.

Consideriamo un tratto di filo di lunghezza **dl**, nel punto P a distanza **r** dal filo, il campo magnetico vale **dB** ed ha la direzione indicata in figura. Il valore di **B** è espresso dalla **legge di Ampère-Laplace**

$$\vec{B} = K_m i \oint \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl$$

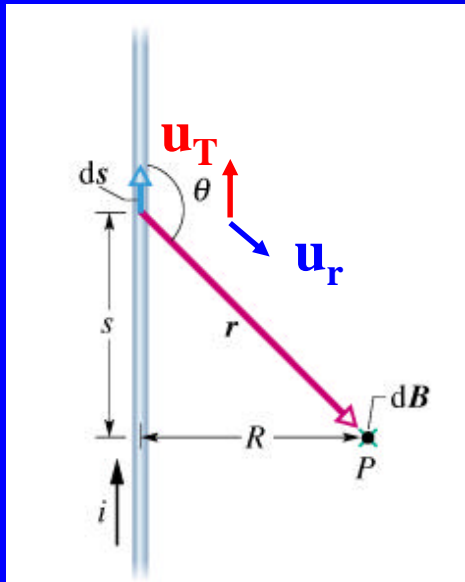
K_m è una costante

$$K_m = 10^{-7} TmA \quad \text{oppure} \quad mkgC^{-2} \Rightarrow \vec{B} = 10^{-7} i \oint \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl$$

$$K_m = \frac{m_0}{4p} \quad \text{dove } m_0 = \text{permeabilita' magnetica del vuoto}$$

$$\vec{B} = \frac{m_0}{4p} i \oint \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl \quad \text{valida } \forall \text{ velocita' delle cariche}$$

Consideriamo ora una corrente rettilinea molto lunga e sottile



Il campo prodotto da ds nel punto P è **parallelo al versore** $\vec{u}_q = \vec{u}_T \times \vec{u}_r$, quindi $d\vec{B}$ è sempre **^ al piano determinato da P e dalla corrente i**. In P $d\vec{B}$ è **tangente** al cerchio di raggio R. Per il **modulo di B** ricaviamo

$$|\vec{u}_T \times \vec{u}_r| = \sin q \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin q}{r^2} ds$$

$$r = \frac{R}{\sin q}; \quad s = R \operatorname{ctg}(p - q) = -R \operatorname{ctg} q; \quad d(\operatorname{ctg} q) = d\left(\frac{\cos q}{\sin q}\right) = -\frac{1}{\sin^2 q} dq$$

$$\Rightarrow ds = R \frac{1}{\sin^2 q} dq$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^p \frac{\sin J}{R^2} \sin^2 q \left(R \frac{1}{\sin^2 q} dq \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \int_0^p \sin q dq = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$$

Vettorialmente abbiamo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_q$$

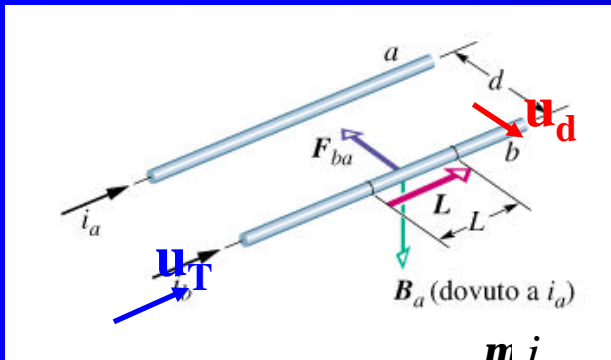
Biot-Savart

Le **linee di forza** sono cerchi concentrici con la corrente e \perp ad essa.
 In un acceleratore lineare il fascio delle particelle accelerate è un filo di ioni che produce sia campo elettrico che campo magnetico

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 i}{I} \vec{u}_T \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad \text{e} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Forze tra correnti



Consideriamo **due fili infiniti, sottili**, percorsi dalle **correnti concordi** i_a e i_b e posti a distanza d . Il filo **a** produrrà sul filo **b** un campo magnetico B_a dato da

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} \Rightarrow \vec{F}_{ba} = i_b \int \vec{u}_T^b \times \vec{B}_a ds_b \quad ; \quad \vec{u}_T^b \times \vec{B}_a = -\vec{u}_d B$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ba} = i_b \int \left(-\vec{u}_d \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} \right) ds_b = -\vec{u}_d \left(\frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} \right) \int ds_b = -\vec{u}_d \left(\frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} \right) s_b$$

Analogamente **per il filo a** si trova

$$\vec{F}_{ab} = \vec{u}_d \left(\frac{\mu_0 i_a i_b}{2pd} \right) s_a \quad \text{con } s_a = s_b$$

Troviamo che **due fili percorsi da correnti concordi si attraggono**,
mentre **due fili percorsi da correnti discordi si respingono**.

Questo risultato ha applicazioni nei motori elettrici.

Unità di misura nel sistema SI

Per la scelta della quarta grandezza fondamentale possiamo partire da due leggi diverse, la legge di Coulomb oppure l'interazione tra due correnti rettilinee

$$F = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad F = K_m \frac{2i_1 i_2}{r} l_2$$

Abbiamo due costanti, K_e e K_m , in realtà, però, abbiamo **un solo grado libertà** poiché abbiamo introdotto una sola grandezza fisica, la **carica q**

Nel 1960 si stabilì che $K_m = 10^{-7}$ e venne scelto l'**Ampère** come quarta grandezza fondamentale

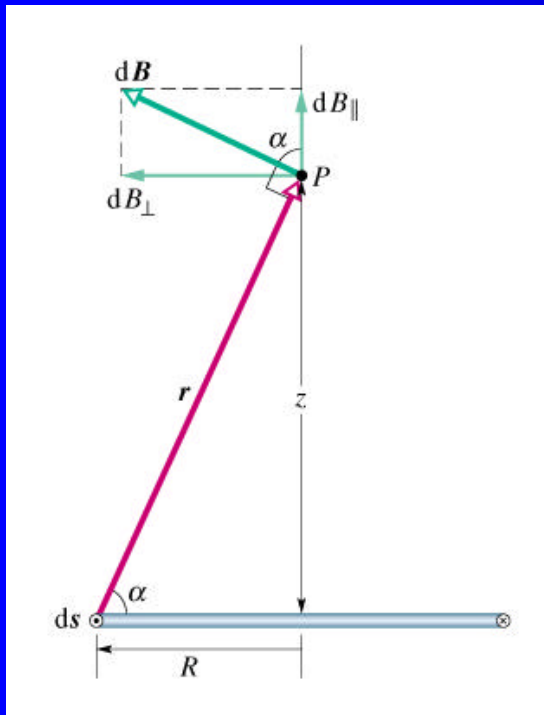
1A = corrente che, circolando in due conduttori rettilinei | , separati da una distanza di un metro, risulta in una forza su ciascun conduttore di $2 \cdot 10^{-7}$ N per metro di lunghezza del conduttore

1C = quantità di carica che fluisce attraverso una sezione trasversale qualsiasi di un conduttore in un secondo quando la corrente è 1 A

La scelta di A piuttosto che C, è dovuta al fatto che è più facile preparare uno standard per la corrente. Dal punto di vista fisico, il concetto di carica è più fondamentale di quello di corrente.

$$\frac{K_e}{K_m} = \frac{1}{4\pi e_0} \frac{4\pi}{m_0} = \frac{1}{e_0 m_0} = \text{costante} = c^2$$

Campo magnetico creato da una **spira circolare di corrente**



Calcoliamo il campo **B** lungo l'asse **z** usando la formula di Ampère – Laplace, ogni elemento infinitesimo **ds** della spira produce in P un campo **dB** (\vec{u}_T è il versore **tangente a ds**)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} ds$$

$|\vec{u}_T \times \vec{u}_r| = 1$ sempre \perp al piano determinato da P e da r

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds}{r^2}$$

Possiamo ora scomporre **dB** nelle due componenti **dB_⊥** e **dB_∥**, notiamo che **le componenti dB_⊥ si elidono a due a due**, quindi il campo totale in P sarà la **somma** delle sole **componenti dB_∥** e sarà \perp all'asse z

$$dB_{\parallel} = dB \cos \alpha = dB \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi r^3} ds \quad r = \text{costante} \Rightarrow B = \oint dB_{\parallel} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 i R}{4\pi r^3} ds = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} \quad r = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

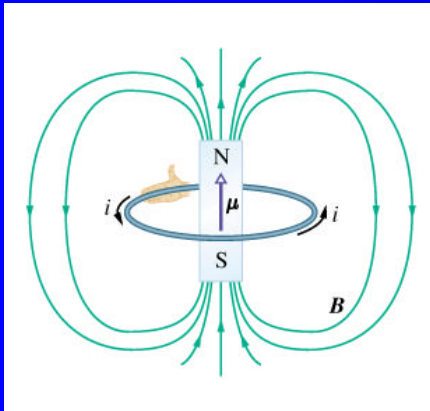
$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{per i punti sull'asse } z$$

Ricordando ora che il momento magnetico di dipolo vale $\mathbf{m} = i\mathbf{S}\mathbf{u}_n$, si ha

$$B = \frac{\mu_0}{2\mu_0} \frac{\mathbf{m}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

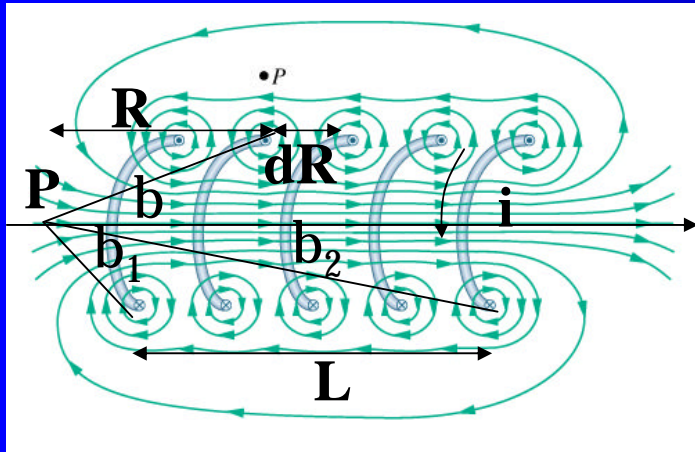
Se $R \ll z$

$$B = \frac{\mu_0}{2\mu_0} \frac{\mathbf{m}}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\mu_0} \frac{(2\mathbf{m})}{z^3} \quad \text{in analogia con il campo elettrico di un dipolo} \quad E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$$



Le linee di forza si chiudono su se stesse e sono **concatenate** alla corrente \Rightarrow **campo solenoidale** (campo che non ha sorgenti puntiformi)

Campo magnetico di un circuito solenoidale



In ogni spira circola la stessa **corrente i** , quindi il campo totale sarà la somma dei campi creati da ciascuna spira, sia L la lunghezza del solenoide, N il numero di spire presenti nel solenoide ed $n = N/L$ il numero di spire per unità di lunghezza in modo che in un tratto dR ci siano $(N/L)dR$ spire, sia a il raggio delle spire.

$$dB = \left[\frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} \right] \frac{N}{L} dR = \frac{\mu_0 i N}{2L} \frac{a^2 dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$R = a(\arctg b) \quad dR = \frac{a}{\sin^2 b} db \quad a^2 + R^2 = \frac{a^2}{\sin^2 b}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i N}{2L} (-\sin b) db$$

$$B = \int dB = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\mu_0 i N}{2L} (-\sin b) db = \frac{\mu_0 i N}{2L} (\cos b_2 - \cos b_1)$$

Se L è molto grande $\beta_1 \cong \pi$ e $\beta_2 \cong 0$

$$B = \frac{\mu_0 i N}{L} = n \mu_0 i$$

solenoido ∞ , B sull'asse

Ad una estremità del solenoide $\beta_1 \cong \pi/2$ e $\beta_2 \cong 0$

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2L} = \frac{n \mu_0 i}{2}$$

sul bordo del solenoide