

La carica elettrica

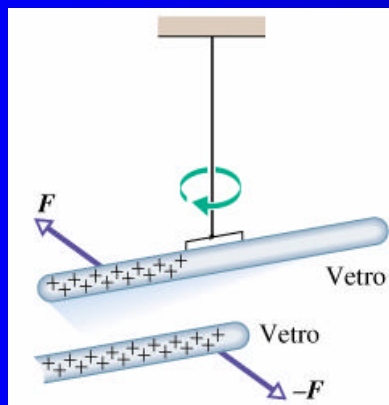
1820 **H.C. Oersted** connessione tra elettricità e magnetismo

M. Faraday sperimentale puro, non scrive formule

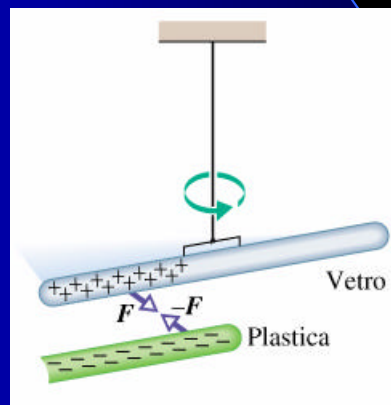
1850 **J.C. Maxwell** formalizza le idee di Faraday

I greci avevano osservato che l'**ambra** (elektron) aveva delle caratteristiche particolari se strofinata con una pelliccia, il **vetro** presentava le stesse caratteristiche se strofinato con seta

Vetro +



Plastica -

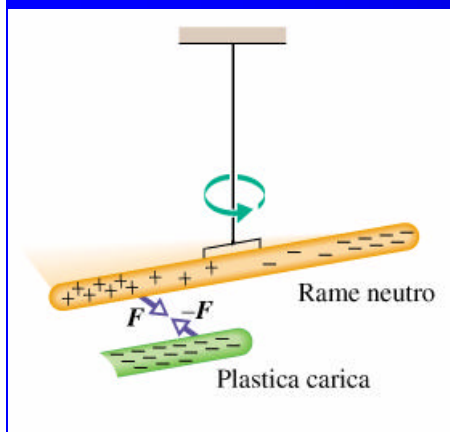


Interazione elettrica ha un **duplice aspetto** (+ e -) a differenza di quella gravitazionale

Due corpi che possiedono lo stesso tipo di elettrizzazione (+ o -) si respingono, mentre si attraggono se possiedono tipi di elettrizzazione diversi (uno + e l'altro -)

Interazione gravitazionale molto meno intensa di quella elettrica

vediamo l'interazione gravitazionale solo perché quella elettrica, avendo una duplice natura, di solito dà origine a corpi neutri



I materiali possono essere suddivisi in

conduttori (rame)

isolanti (plastica)

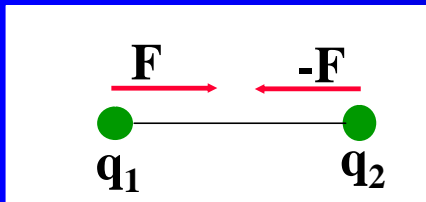
Nei conduttori le cariche (**elettroni di conduzione**) sono libere di muoversi

Carica indotta

semiconduttori (ad es. Si e Ge)

superconduttori (non presentano resistenza)

La carica elettrica è responsabile della **forza elettrica**, così come la massa lo è della forza gravitazionale



Misura F esercitata su q_1 e $-F$ esercitata su q_2

Se un sistema è isolato la sua carica totale rimane costante:

principio di conservazione della carica elettrica (B. Franklin)

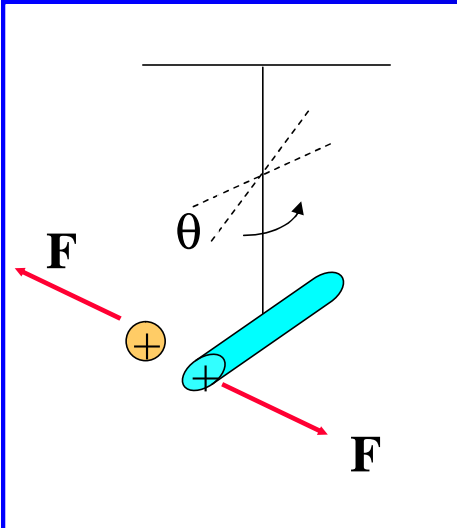
Elettrostatica: studio dell'interazione tra due cariche elettriche a riposo (o al più in moto con v molto piccola) in un sistema inerziale

Legge di Coulomb (1785)

L'interazione elettrostatica tra due particelle cariche è proporzionale alle loro cariche ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra di esse; la direzione della forza è quella della linea congiungente le cariche stesse

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

La **costante k** prende il nome di **costante elettrostatica** e il suo valore dipende dalle unità di misura utilizzate



Utilizzando una bilancia di torsione posso misurare F. Non conosco il valore della carica allora **fisso k in modo arbitrario**

$$k = 10^{-7} c^2 = 8.9874 \cdot 10^9 \cong 9 \cdot 10^9 c = \text{velocità della luce}$$

In questo modo la **carica di 1 C** è definita come la carica che, posta ad 1 m da una carica uguale nel vuoto, viene respinta con una forza di $8.9874 \cdot 10^9 \text{ N}$

$$[k] = Nm^2C^{-2} \text{ o } kgm^3C^{-2}$$

Per praticità si pone

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ con}$$

$$\epsilon_0 = \text{permeabilità del vuoto} = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} N^{-1}m^{-2}C^{-2}$$

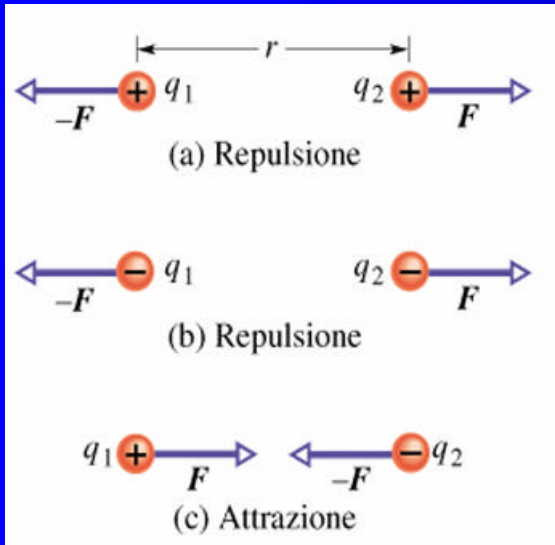
$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

q_1 e q_2 vanno inserite con **il loro segno**

$F < 0$ forze attrattive e q di segno opposto

$F > 0$ forze repulsive e q dello stesso segno

$F_{12} = -F_{21}$ q_1 e q_2 esercitano una sull'altra una forza di modulo uguale e verso opposto, F_{12} e F_{21} sono una **coppia di azione e reazione**



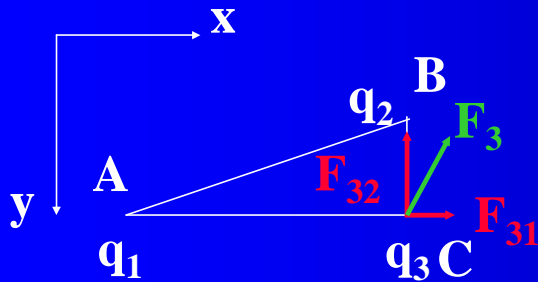
Unità di misura della **carica elettrica** deriva da quella della corrente (Ampere): **1C** è la quantità di carica che passa in un secondo attraverso una qualsiasi sezione di un filo percorso da una corrente di 1 A

$$dq = idt$$

La forza elettrostatica **F** è **additiva** (principio di sovrapposizione):

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

Esempio



$$q_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_2 = -0.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_3 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$AC = 1.2 \text{ m} = r_1$$

$$BC = 0.5 \text{ m} = r_2$$

$$F_3 = ?$$

$$|\vec{F}_{32}| = k \frac{q_2 q_3}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{-0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{0.5^2} = -3.6 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{32} = -3.6 \cdot 10^3 \vec{j} \text{ N}$$

$$|\vec{F}_{31}| = k \frac{q_1 q_3}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{1.2^2} = 1.875 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{31} = 1.875 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ N}$$

$$|F_3| = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2} = 4.06 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\text{tg } \mathbf{q} = \frac{F_{32}}{F_{31}} = -\frac{3.6}{1.875} = -1.92 \Rightarrow \mathbf{q} = -62.5^\circ$$

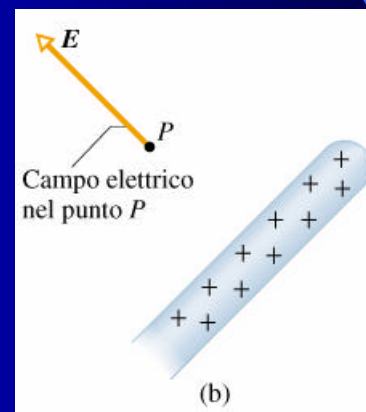
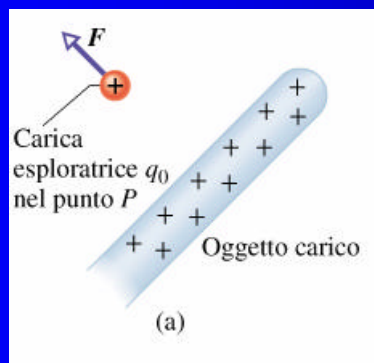
Il campo elettrico

Ogni regione dello spazio in cui una carica elettrica sia soggetta ad una forza elettrostatica è detta **campo elettrico** (dovuto alle cariche presenti)

q_0 carica di prova q_1, q_2, \dots, q_n cariche che generano il campo

q_0 risente del campo generato dalle n cariche (vale anche per le n cariche, ma non è un fatto rilevante per il discorso che stiamo facendo)

$$F_1 \propto q_0, F_2 \propto q_0, F_3 \propto q_0, \dots, F_n \propto q_0 \Rightarrow F_{Tot} \propto q_0$$

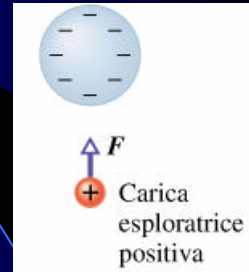


Per valutare se siamo in **presenza di un campo elettrico** in una certa zona dello spazio, la esploriamo con una **carica piccola** detta **carica di prova** o **carica esploratrice** e **misuriamo la forza** che agisce su di essa

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ oppure } \vec{F} = q_0 \vec{E} \quad \vec{E} \parallel \vec{F} \text{ se } q_0 > 0$$

|E| : **intensità del campo elettrico** è la forza che agisce sulla carica unitaria posta in quel punto

$$[E] = N \cdot C^{-1} \text{ oppure } kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$$



Il campo elettrico è un campo vettoriale

Il campo elettrico non dipende dalla carica di prova

L'effetto del campo elettrico su cariche di segno opposto è di spostarle verso zone diverse \Rightarrow **polarizzazione**

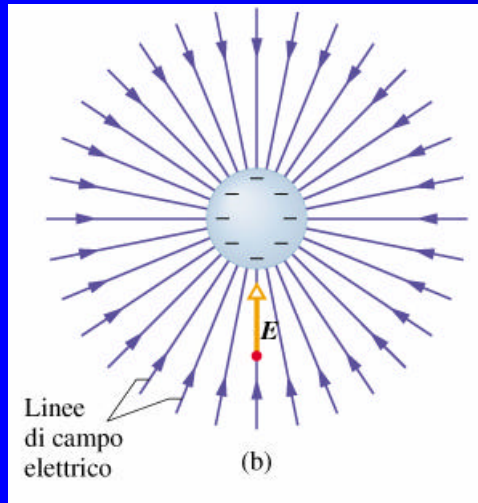
Il campo elettrico gode della **proprietà di sovrapposizione**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

Alcuni valori di campo elettrico

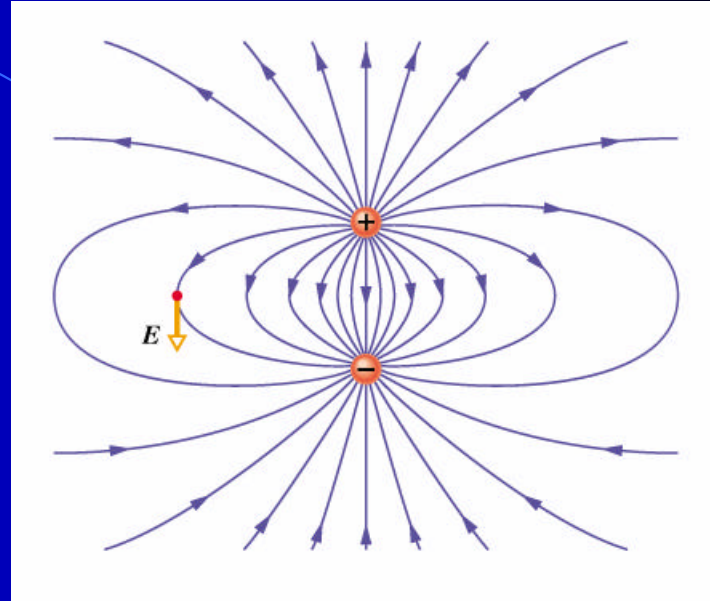
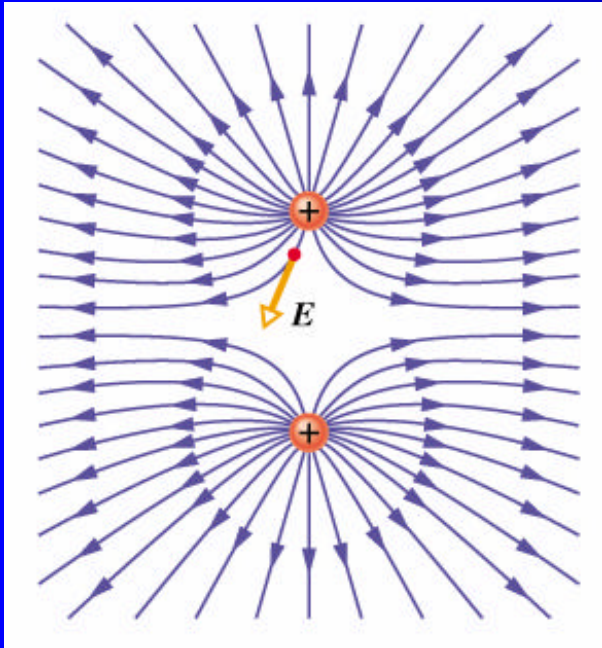
Campo	Valore (N/C)
Sulla superficie di un nucleo di uranio	$3 \cdot 10^{21}$
In un atomo di idrogeno, a un raggio di $5.29 \cdot 10^{-11}$ m	$5 \cdot 10^{11}$
Minimo valore per la scarica elettrica in aria	$3 \cdot 10^6$
Sul rullo carico di una fotocopiatrice	10^5
Vicino a un pettine di plastica caricato	10^3
Nella bassa atmosfera	10^2
All'interno di un filo di rame in circuiti elettrici domestici	10^{-2}

Linee di forza

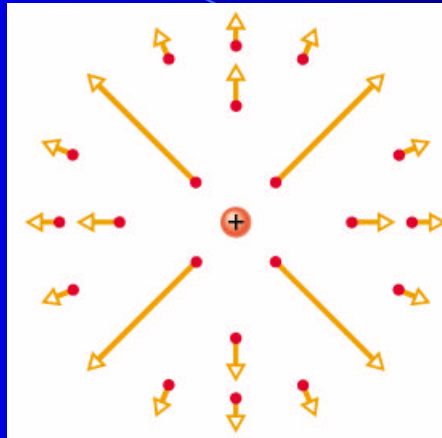


- In ogni punto le linee di forza sono **tangenti** alla direzione del campo elettrico in quel punto
- Si determinano usando una **carica di prova positiva**
- **Escono** dalle cariche + ed **entrano** in quelle -
- Sono tracciate in modo che il **numero di linee** che attraversano una superficie unitaria \perp ad esse è μ all'intensità del **campo elettrico E**

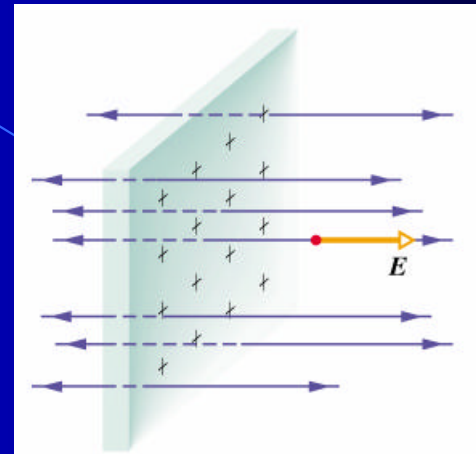
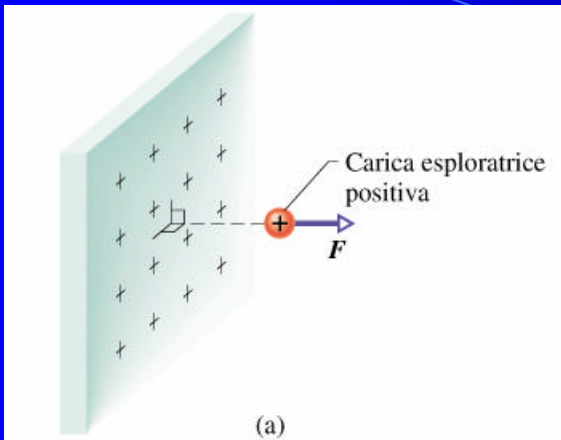
linee si addensano $\Rightarrow E$ è grande
linee si diradano $\Rightarrow E$ è piccolo



Dipolo elettrico

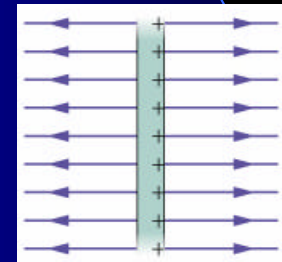


Vettori campo elettrico nello spazio attorno ad una **carica puntiforme positiva**



Lamina non conduttrice infinita
 Distribuzione uniforme di cariche +
 da un lato
 Forza netta \perp al piano uscente dal piano
 Piano infinito e distribuzione di carica
 uniforme \Rightarrow vettori campo elettrico hanno
 tutti la stessa intensità

Campo elettrico uniforme



Sia q_0 la carica esploratrice, a distanza r da q (che genera il campo elettrico) si ha

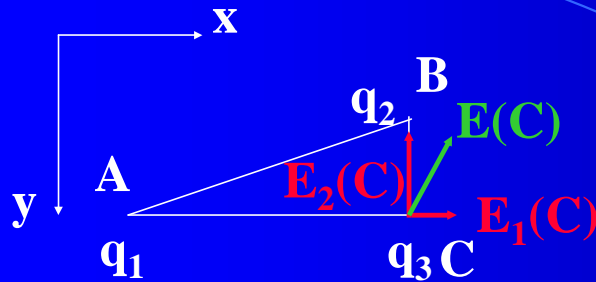
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{u}_r = q_0 \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad \forall \text{ punto dello spazio}$$

Esempio



$$q_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_2 = -0.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_3 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$AC = 1.2 \text{ m} = r_1$$

$$BC = 0.5 \text{ m} = r_2$$

$E(C) = ?$

$$F_3 = 4.06 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$E_3 = \frac{F_3}{q_3} = 2.03 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

E_3 è il campo in cui si trova q_3 che qui equivale alla carica di prova

oppure

$$E_1(C) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 9.37 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

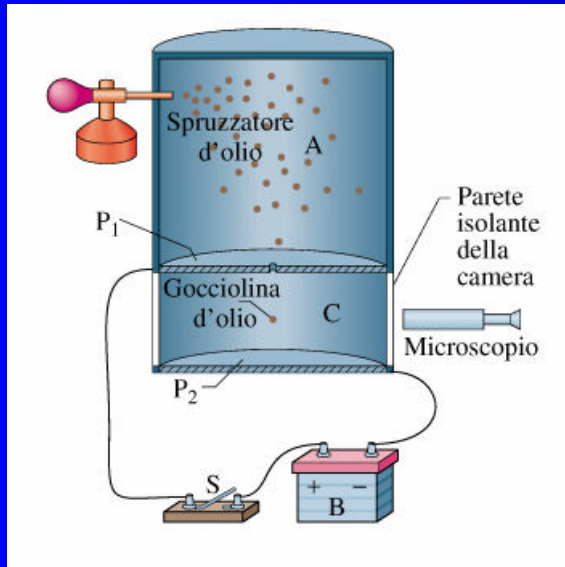
$$E_2(C) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -18 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$E(C) = \sqrt{E_1^2(C) + E_2^2(C)} = 2.03 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} = E_3$$

E_1 ed E_2 sono i campi generati da q_1 e q_2 in C

L'esperienza di Millikan (1910 – 1913)

quantizzazione della carica



- Il campo elettrico può essere applicato e tolto
- Le gocce di olio si caricano per strofinio

Analisi teorica

Gocce di massa **m** e raggio **r**

In assenza di campo le gocce scendono in **caduta libera** secondo l'equazione

$$ma = mg - 6phrv$$

In cui il secondo termine rappresenta l'**attrito viscoso**

Quando **a = 0**, la velocità diviene costante (velocità limite) **v₁*** (verso il basso) (si trascura la spinta di Archimede)

$$v_1^* = \frac{mg}{6phr} = \frac{2rr^2g}{9h} \quad V = \frac{4}{3}pr^3 \quad r = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4pr^3}$$

Applico il campo elettrico \mathbf{E} (verso l'alto) e la goccia ha carica $q > 0$

$$ma = -mg + qE - 6phrv$$

La goccia sale e la sua velocità limite v_2^* vale

$$v_2^* = \frac{qE - mg}{6phr}$$

Combinando i valori delle due velocità limite si ottiene il valore della carica q

$$q = \frac{6phr(v_1^* + v_2^*)}{E}$$

Misuro $v_1^* \Rightarrow r$

Misuro $v_2^* \Rightarrow q$

Analisi sperimentale

Sperimentalmente si trova che v_1^* è **costante** per tutte le gocce, mentre v_2^* **dipende dalla carica** delle gocce (le particelle possono cambiare carica a causa dell'interazione con le particelle dell'aria ionizzate dai raggi cosmici). Se c'è un cambio di carica Δq , si registrerà un cambio di velocità Δv_2^*

$$\Delta q = \frac{6\pi h r}{E} \Delta v_2^* \quad \Delta q \text{ può essere } > 0 < 0$$

Ripetendo l'esperimento per più gocce si verifica che $\Delta q = ne$

$$e = 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \text{carica elementare}$$

Si ottiene così che la **carica è quantizzata** e che ogni carica è associata ad un oggetto dotato di massa

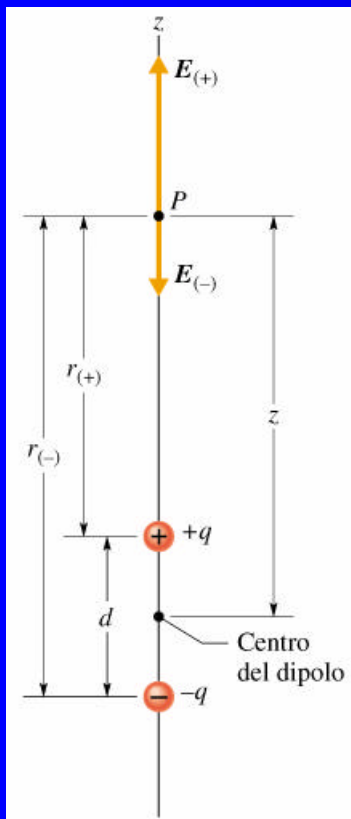
Carica di tre particelle

Particella	Simbolo	Carica
Elettrone	e oppure e^-	$-e$
Protone	p	$+e$
Neutrone	n	0

Il dipolo elettrico

Vogliamo calcolare il campo in P creato dalle cariche $+q$ e $-q$ uguali in modulo.

Esso sarà la somma di \mathbf{E}_+ ed \mathbf{E}_- , entrambi in direzione z



$$E = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^2} =$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right]$$

$$z \gg d \Rightarrow \frac{d}{2z} \ll 1$$

Facciamo ora uno sviluppo binomiale

$$\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} = 1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots$$

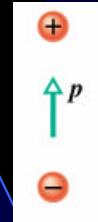
$$\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2 = 1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots$$

Otteniamo così

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 + \frac{2d}{2z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z} + \dots\right) \right]$$

Notiamo che i termini successivi al primo sono potenze successive di $(d/z) \ll 1 \Rightarrow$ possiamo trascurarli

$$E_{dipolo} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$



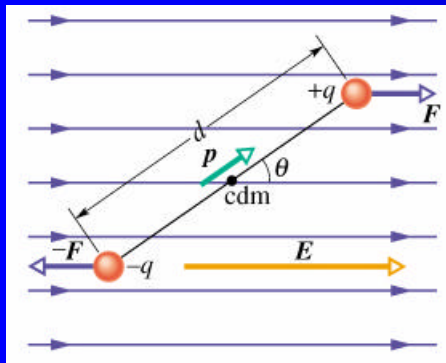
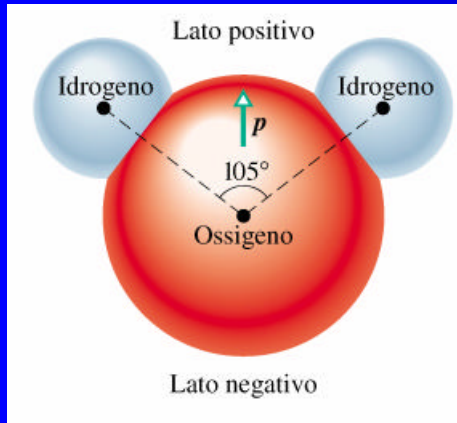
Definiamo **momento di dipolo** la seguente quantità

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

orientato **dalla carica - a quella +**

In generale il **campo elettrico del dipolo** varia come $1/r^3$, dove r è la distanza dal centro del dipolo. Il **campo del dipolo** è **più debole** di quello di una singola carica. Per **punti sull'asse** del dipolo **E e p sono paralleli**

Dipolo in un campo elettrico esterno



Molecola di acqua in un campo elettrico **uniforme esterno E** . La molecola di acqua è un dipolo perché le sue cariche $+q$ e $-q$ sono posizionate rigidamente. Quello che avviene è che i vettori **E** e **p** non sono paralleli, ma formano un **angolo θ** .

Dal punto di vista dinamico abbiamo che su q e su $-q$ agisce la forza elettrica dovuta al campo E .

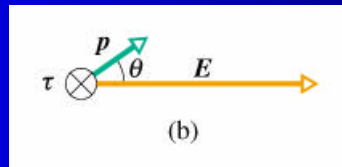
$$\vec{F} = q\vec{E} \quad e \quad \vec{F}_{+q} = -\vec{F}_{-q}$$

Globalmente abbiamo

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_{ris} = 0 & \vec{\tau}_{ris} \neq 0 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ CM \text{ resta fermo} & \text{il dipolo ruota attorno al CM} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F} & \vec{\tau}_2 &= \frac{\vec{d}}{2} \times (-\vec{F}) \\ \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 &= \vec{\tau}_{ris} = -\frac{d}{2} F \sin \mathbf{q} - \frac{d}{2} F \sin \mathbf{q} = -dF \sin \mathbf{q} \\ \vec{\tau}_{ris} &= -qEd \sin \mathbf{q} = -pE \sin \mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\vec{\tau}_{ris} = \vec{p} \times \vec{E}$$



Il dipolo risente di un **momento torcente** che tende **ad allinearlo ad E**

Energia potenziale di un dipolo elettrico

L'energia potenziale del dipolo risulta **minima quando $\vec{p} \parallel \vec{E}$**
Arbitrariamente scegliamo **$U = 0$ per $q = 90^\circ$**

$$L = -\Delta U \quad L = \int t d\mathbf{q}$$

$$\Delta U = U(\mathbf{q}) - U(90^\circ) = -L = -\int_{90^\circ}^{\mathbf{q}} t d\mathbf{q} = \int_{90^\circ}^{\mathbf{q}} pE \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}$$

$$\Delta U = -pE \cos \mathbf{q}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{a meno della costante arbitraria}$$

$$U \text{ minima} \quad \vec{p} \parallel \vec{E} \quad (q = 0) \quad U(0) = -pE$$

$$U \text{ massima} \quad \vec{p} \parallel -\vec{E} \quad (q = 180^\circ) \quad U(180^\circ) = pE$$

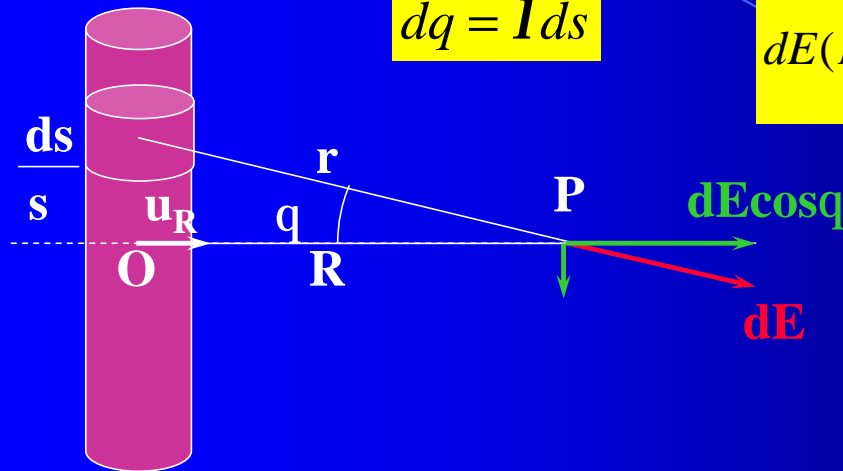
In generale si ha

$$L_{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_f} = -\Delta U = U(\mathbf{q}_i) - U(\mathbf{q}_f)$$

Alcuni tipi di misura di
carica elettrica

Nome	Simbolo	Unità di misura SI
Carica	q	C
Densità di carica lineare	λ	C/m
Densità di carica superficiale	σ	C/m ²
Densità di carica di volume	ρ	C/m ³

Calcoliamo il campo elettrico generato da un **filo molto lungo e sottile** che porta una **carica λ per unità di lunghezza**



$$dq = \lambda ds$$

$$dE(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}$$

L'**elemento simmetrico** a ds rispetto al punto O crea in P un campo **dE uguale in modulo**, ma con **componente verticale di verso opposto**

Le componenti del campo elettrico parallele al filo si elidono, **restano** quindi **solo le componenti $dE \cos q$ al filo**

$$E = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} dE \cos q = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \frac{ds}{r^2} \cos q$$

$$r = R \sec q \quad s = R \tan q \Rightarrow ds = R \sec^2 q dq$$

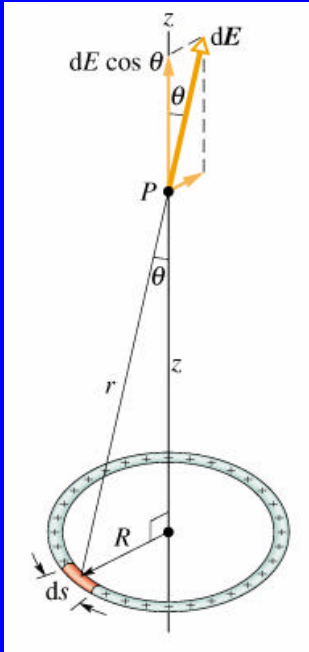
Dopo aver fatto le sostituzioni integriamo tra 0 e $\pi/2$ e moltiplichiamo il risultato per 2

$$E = \frac{2I}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{R \sec^2 \mathbf{q}}{R^2 \sec^2 \mathbf{q}} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} =$$
$$= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \mathbf{q} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 R}$$

In conclusione

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{u}_R \quad \vec{E} \propto \frac{1}{R}$$

Vediamo ora il campo elettrico generato sull'asse di un **anello di plastica uniformemente carico con densità di carica λ**



$$dq = \lambda ds$$

$$dE(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}$$

$$r^2 = z^2 + R^2$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(R^2 + z^2)}$$

Le componenti dE_{\perp} si elidono, $\Rightarrow E_{\text{finale}} \parallel z$ e restano **solo le componenti del campo parallele all'asse dell'anello**

$$dE_{\parallel} = dE \cos \theta = \frac{z}{r} dE = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dE$$

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z ds}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow \text{integro tra } s = 0 \text{ e } s = 2\pi R$$

$$E = \int dE \cos \mathbf{q} = \frac{zI}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} ds =$$

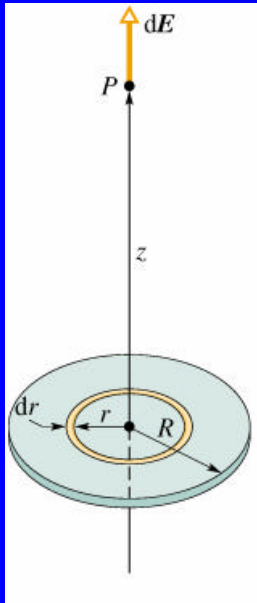
$$= \frac{zI 2\pi R}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Per $z \gg R$ si ottiene

$$\vec{E}_{anello} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \text{ ottengo il campo della carica puntiforme } q$$

Per $z = 0$

$$\vec{E}_{anello} = 0$$



Vediamo il campo elettrico generato sull'asse di un **disco uniformemente carico con densità di carica s**

Consideriamo il disco suddiviso in tanti anelli concentrici

Come quello di raggio r e spessore dr

Il calcolo del campo elettrico procede in due fasi:

1. calcoliamo il **campo dell'anello**
2. **sommiamo su tutti gli anelli**

in pratica dobbiamo fare due integrazioni

Conosciamo già il campo dell'anello

$$dq = s dA = s 2\pi r dr$$

$$dE_{\text{anello}} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{s 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_{\text{disco}} = \int_{\Sigma} dE_{\text{anello}} = \frac{s z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr$$

Abbiamo a che fare con un integrale del tipo

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ con } x = z^2 + r^2, m = -\frac{3}{2}, dx = 2rdr$$

Otteniamo quindi

$$E_{disco} = \frac{\mathbf{s}z}{4\mathbf{e}_0} \left. \frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2} \right|_0^R = \frac{\mathbf{s}z}{2\mathbf{e}_0} \left(-\frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow$$
$$E_{disco} = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{e}_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \text{ per } z \geq 0$$

Per $R \rightarrow \infty$?

$$E_{disco} \rightarrow E_{piano\infty} = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{e}_0}$$

Per $z \rightarrow 0$?

$$E_{disco} \rightarrow E_{piano\infty} = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{e}_0}$$

Legge di Gauss

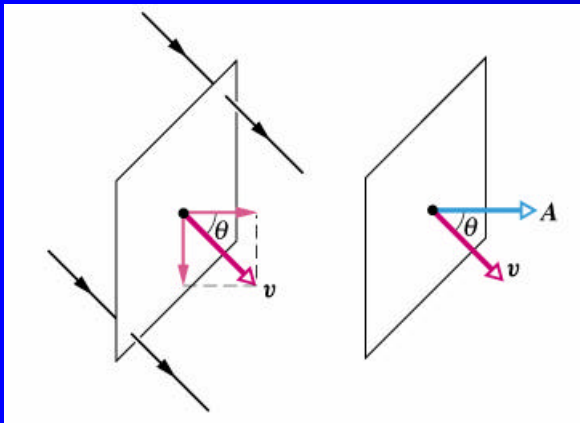
Sfrutta le **simmetrie** che spesso riscontriamo in fisica

Equivale alla legge di Coulomb, l'utilizzo dell'una o dell'altra legge dipende dai casi

Superficie gaussiana: ipotetica superficie **chiusa**

Mette in **relazione** le **cariche all'interno** della superficie chiusa con i **campi elettrici** in tutti i **punti della superficie** stessa

Abbiamo bisogno del **concetto di flusso**



Corrente d'aria con **v uniforme** diretta verso una **spira quadrata di area A**, **F** è il **flusso volumico** (portata volumica) con cui l'aria fluisce attraverso la spira

$$\Phi = (v \cos q) A = v A \cos q = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Flusso: quantità del campo intercettata dalla superficie

In generale, preso un **campo vettoriale** \mathbf{V} e una **superficie** S , **orientata** e suddivisa in **superfici infinitesime** dS_i , abbiamo che, ad ogni dS_i corrisponde un **versore** \mathbf{u}_{ni} che orienta la superficie e un **angolo** \mathbf{q}_i tra tale versore e il vettore campo \mathbf{V}

$$dS_1, dS_2, dS_3, \dots, dS_n$$

$$\vec{u}_{n_1}, \vec{u}_{n_2}, \vec{u}_{n_3}, \dots, \vec{u}_{n_n}$$

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_n$$

Per definizione il **flusso di** \mathbf{V} è un integrale di superficie dato da

$$\Phi = V_1 dS_1 \cos \mathbf{q}_1 + V_2 dS_2 \cos \mathbf{q}_2 + \dots + V_n dS_n \cos \mathbf{q}_n =$$

$$= \vec{V}_1 \cdot \vec{u}_{n_1} dS_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{u}_{n_2} dS_2 + \dots + \vec{V}_n \cdot \vec{u}_{n_n} dS_n \Rightarrow$$

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot \vec{u}_n dS$$

Φ può essere **positivo** o **negativo** a seconda del valore di $\cos \theta$, se $\mathbf{q} = \pi/2$ allora $\Phi = 0$, il vettore campo \mathbf{V} è **tangente** alla superficie S in ogni suo punto; se S è **chiusa**

$$\Phi = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{u}_n dS$$

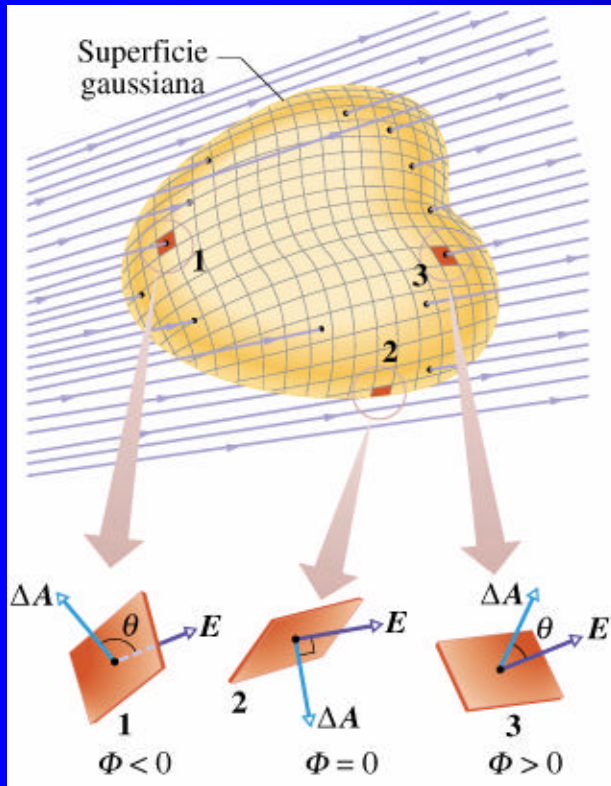
Se ora il **campo vettoriale** è proprio il **campo elettrico E** generato da una carica **q** posta al centro di una **superficie chiusa sferica S**, il suo flusso attraverso detta superficie vale

(ricordiamo che **E** e **u_n** sono sempre **paralleli** in una sfera al cui centro c'è la carica q e che quindi il loro prodotto scalare altro non è che il prodotto dei moduli, inoltre la **superficie S** della sfera vale **4pr²**)

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Da quanto sopra ricavato si può notare che **F non dipende dal raggio** della sfera, **ma solo dalla carica q** in essa racchiusa

Consideriamo ora una **superficie chiusa qualsiasi** che racchiude la **carica q**



$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S E \cos \mathbf{q} dS = \oint_S \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cos \mathbf{q} dS$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} \cos \mathbf{q} dS$$

Dalla definizione di angolo solido si ha

$$d\Omega = \frac{1}{r^2} \cos \mathbf{q} dS$$

Pertanto **dΩ** è l'angolo solido infinitesimo sotto cui la superficie **dS** è **vista dalla carica q**

L'angolo solido attorno ad un punto vale **4π steradiani**, quindi

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \oint_{\Omega} d\Omega = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Abbiamo visto che il **flusso del campo elettrico \vec{E}** attraverso una superficie chiusa qualunque **vale sempre q/e_0** , indipendentemente dalla forma della superficie e dalla collocazione della carica q all'interno della superficie stessa

Notiamo inoltre che:

- Se **q è esterno** alla superficie chiusa \Rightarrow **flusso è nullo**
- Se all'interno della superficie ci sono **più cariche** \Rightarrow **flusso = S flussi**

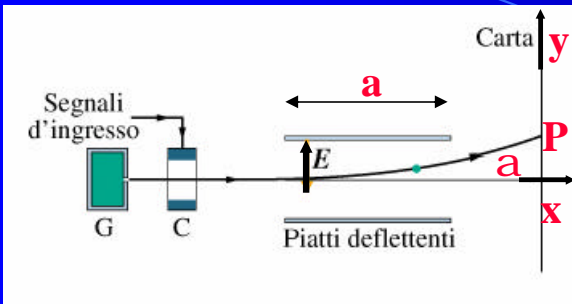
Legge di Gauss

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa racchiudente le cariche q_1, q_2, \dots, q_n è

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q}{e_0}$$

dove $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ è la carica netta racchiusa all'interno della superficie S

Moto di una carica in campo elettrico



$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Il **rapporto tra q ed m** determina l'**accelerazione** cui è sottoposta la particella di carica q e massa m ; se il campo elettrico **E è uniforme**, l'**accelerazione a risulta costante** e quindi la traiettoria seguita dalla particella è una **parabola**. Supponiamo che la particella entri nella zona in cui c'è campo elettrico con velocità \mathbf{v}_0 diretta orizzontalmente da sx verso dx , sia inoltre $\mathbf{v}_0 - \mathbf{E}$, indichiamo infine con \mathbf{v} la **velocità della particella in uscita dal campo elettrico**, con **a l'angolo di deflessione** della stessa rispetto all'asse delle x , con **d la distanza** dall'asse delle x del punto P in cui la particella colpisce lo schermo e con **a la lunghezza dei piatti deflettenti**.

Dalla cinematica sappiamo che

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) E t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) \left(\frac{E}{v_0^2} \right) x^2$$

Abbiamo così verificato che la traiettoria è una parabola

$$\frac{dy}{dx} \Rightarrow \text{angolo di deflessione } \mathbf{a} \text{ (per } x = a \text{)}$$

$$\mathbf{tg a} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{q}{m} \frac{E}{v_0^2} a$$

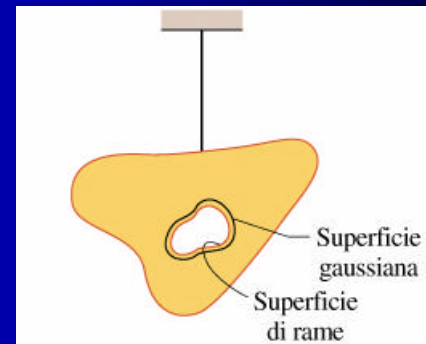
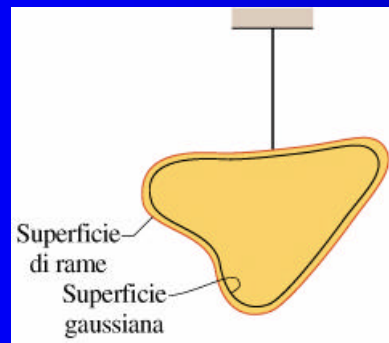
Se la deviazione dall'orizzontale all'uscita dai piatti deflettenti è piccola, ovvero se lo schermo è sufficientemente lontano, possiamo scrivere

$$\mathbf{tg a} = \frac{d}{L} \Rightarrow \frac{qEa}{mv_0^2} \cong \frac{d}{L}$$

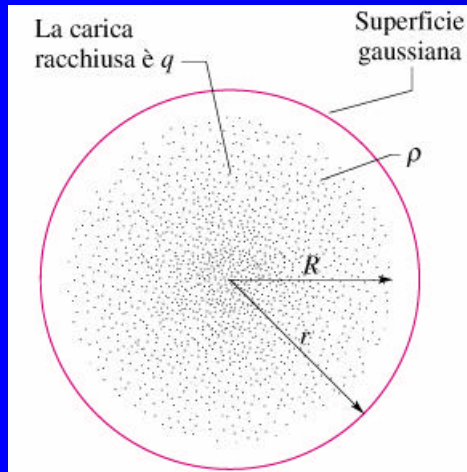
I tubi a raggi catodici e gli oscilloscopi sono basati su queste proprietà

Campo elettrico in un conduttore

In entrambi i casi se il conduttore è isolato e possiede una **carica totale q** , detta carica **si dispone sulla superficie esterna del conduttore**; se così non fosse infatti ci sarebbe una forza sulle cariche (dovuta al campo elettrico esistente all'interno del conduttore) e si formerebbero delle correnti elettriche nel conduttore. Sperimentalmente si trova che queste correnti non esistono e quindi, in condizioni statiche, **il campo elettrico all'interno di un conduttore carico di forma qualsiasi è nullo e le cariche si dispongono sulla superficie esterna del conduttore.**



Campo elettrico di una distribuzione sferica di cariche



Prendiamo una **sfera di raggio a** con **carica q** , il **campo**, per questioni di simmetria, deve essere **radiale**.

Consideriamo ora una **superficie gaussiana di raggio r concentrica con la prima**, abbiamo

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E \oint_S dS = E4\pi r^2$$

Applichiamo Gauss ed esaminiamo le possibilità al **variare di r**
 $r > a$ la carica **q** è tutta contenuta **nella superficie gaussiana** di raggio r

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

È come se la **carica** fosse **tutta localizzata nel centro** della sfera

$r < a$

- Se la **carica è superficiale** $\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Se la **carica è distribuita uniformemente** in tutto il **volume** della sfera q' è la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana e vale

$$q' = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{a^3} r^3$$

Quindi

$$E(4\pi r^2) = \frac{qr^3}{\epsilon_0 a^3} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r$$

Il **campo elettrico** dentro ad una sfera isolante uniformemente carica **varia proporzionalmente ad r**

Infine resta da esaminare cosa succede sulla superficie della sfera

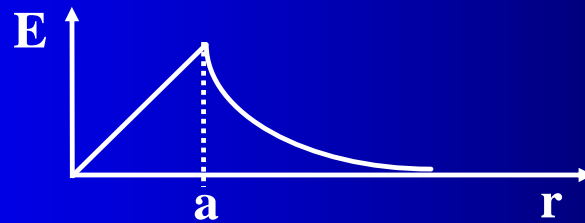
$r = a$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad \text{venendo dall'interno}$$

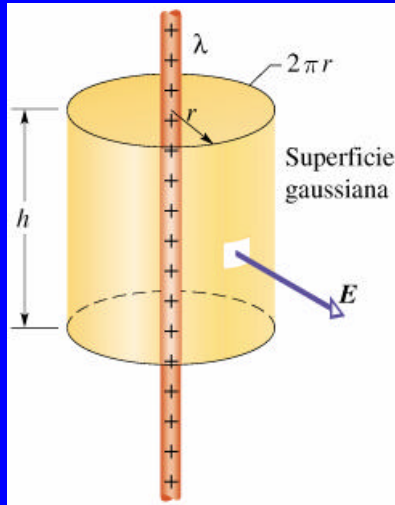
$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad \text{venendo dall'esterno}$$

I due valori E_+ ed E_- coincidono quindi il campo E è continuo in $r = a$

$r = 0 \Rightarrow E = 0$



Campo elettrico generato da una distribuzione cilindrica di carica di lunghezza infinita



Consideriamo una **distribuzione di carica per unità di lunghezza l** distribuita uniformemente su un tratto **cilindrico** di altezza **h** e tale che **$q = l h$** ; sia **a** il **raggio del cilindro**. Il **campo elettrico** ha direzione **radiale** per questioni di simmetria e certamente **dipenderà** dalla distanza **r** dall'asse del cilindro. Considero una **superficie cilindrica coassiale** alla superficie carica e con **raggio r** , il flusso attraverso detta superficie vale sempre

$$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_{\vec{E}}(B_1) + \Phi_{\vec{E}}(B_2) + \Phi_{\vec{E}}(sup. lat.) = \Phi_{\vec{E}}(sup. lat.)$$

$$\Phi_{\vec{E}}(sup. lat.) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = E 2\pi r h$$

Anche in questo caso dobbiamo distinguere vari casi

$r > a$ la carica q è tutta contenuta **nella superficie gaussiana** di raggio r

$$2\pi r h E = \frac{1h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Come nel caso del **filo infinito** con carica uniforme

$r < a$

- Se la **carica** è **superficiale** $\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Se la **carica** è **distribuita uniformemente** in tutto il **volume** del cilindro q' è la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana e vale

$$q' = q \frac{\pi r^2 h}{\pi a^2 h} = q \frac{r^2}{a^2} = 1h \frac{r^2}{a^2}$$

$$2\pi r h E = \frac{1h r^2}{\epsilon_0 a^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 a^2} r$$

Il **campo elettrico** dentro ad un cilindro isolante uniformemente carico **varia proporzionalmente ad r** (come per la sfera)

Infine resta da esaminare cosa succede sulla superficie del cilindro

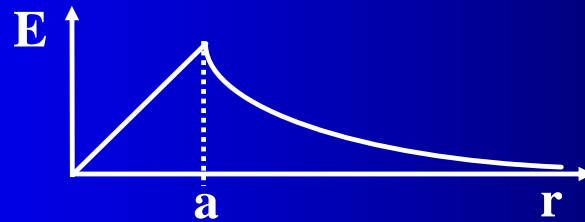
$r = a$

$$E_- = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^2} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \text{venendo dall'interno}$$

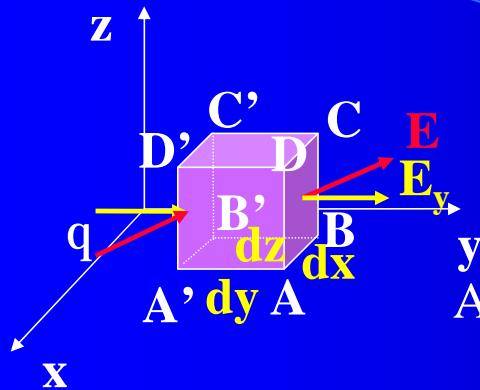
$$E_+ = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \text{venendo dall'esterno}$$

I due limiti coincidono quindi il **campo E è continuo** in $r = a$

$r = 0 \Rightarrow E = 0$



Legge di Gauss in forma differenziale



La parete ABCD ha area $dS = dx dz$ e il flusso del campo elettrico attraverso di essa vale

$$\Phi_{\vec{E}}(ABCD) = E dS \cos J = (E \cos J) dx dz = E_y dx dz$$

Attraverso A'B'C'D' abbiamo un flusso negativo

$$\Phi_{\vec{E}}(A'B'C'D') = -E'_y dx dz$$

Attraverso la superficie del cubo in direzione y il flusso vale

$$\Phi_{\vec{E}}(y) = E_y dx dz + (-E'_y dx dz) = (E_y - E'_y) dx dz$$

Se ora ricordiamo che $AA' = dy$ è **infinitesimo**, abbiamo che anche la differenza $E_y - E'_y$ è **molto piccola**, quindi

$$E_y - E'_y = dE_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$$

con $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ rapidità di variazione della componente y di \vec{E}

Quindi il flusso totale in direzione y vale

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dx dz = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

Attraverso tutto il volume abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} dV + \frac{\partial E_y}{\partial y} dV + \frac{\partial E_z}{\partial z} dV = \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = \frac{dq}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Ricordando ora che $d\mathbf{q} = \rho dV$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

relazione locale tra campo elettrico e distribuzione di carica

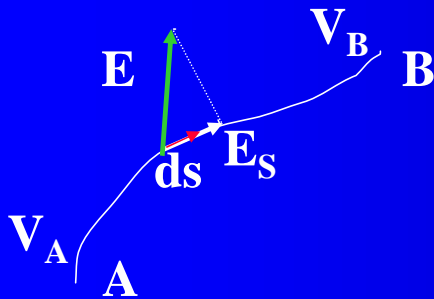
Il potenziale elettrico e l'energia potenziale

Forza elettrica è centrale \Rightarrow conservativa \Rightarrow energia potenziale elettrica
Definiamo il **potenziale elettrico** in un punto come **l'energia potenziale posseduta da una carica unitaria** posta in quel punto

$$V = \frac{U}{q} \quad U = qV \quad [V] = \text{volt} \quad V = m^2 \text{kg} s^{-2} C^{-1}$$

Il potenziale è una **caratteristica del campo e non della carica**

Il **potenziale**, come U , è definito a meno di una **costante arbitraria**:
poniamo $V = 0$ per $r = \infty$



q si muove da A verso B lungo la curva e attraversa una regione in cui c'è **campo elettrico E**

$$U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

$$U_A - U_B = -\Delta U = L_{A \rightarrow B} \quad \text{lavoro fatto sulla carica}$$

Pertanto troviamo

$$L_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

differenza di potenziale elettrico

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B$$

Possiamo anche definire il potenziale come il **lavoro fatto** dal campo elettrico per portare la **carica di prova** dall'infinito al punto in cui si misura V , $V = (-L_{\infty}/q)$

Lungo un **percorso chiuso**, dato che il campo è conservativo, abbiamo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

In generale, lungo un percorso qualunque se E_S è la componente del campo lungo il percorso, si ha

$$\int_A^B E_S ds = V_A - V_B = -(V_B - V_A) = -\int_A^B dV$$

Se **A e B sono molto vicini** possiamo scrivere

$$E_s ds = -dV \quad E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Quindi

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

In questo modo posso **calcolare V noto E e viceversa**

Ad esempio consideriamo un campo elettrico uniforme (**E = costante**) con unica componente lungo l'asse delle x

$$Edx = -dV \quad \int_0^x Edx = -\int_0^x dV \quad V = 0 \text{ per } x = 0$$

$$V = -Ex$$

Notiamo che in questo caso il **potenziale cresce** nella direzione in cui il **campo elettrico decresce**, ovvero che la **direzione del campo elettrico** è quella in cui **V decresce**

Se mi sposto da x_1 ad x_2 ho

$$V_1 = -Ex_1 \quad V_2 = -Ex_2$$

$$V_2 - V_1 = -E(x_2 - x_1) \quad d = (x_2 - x_1)$$

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad [E] = Vm^{-1} = NC^{-1}$$

Notiamo che

- se $V_1 - V_2 > 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ va **da x_1 a x_2**
- se $V_1 - V_2 < 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ va **da x_2 a x_1**

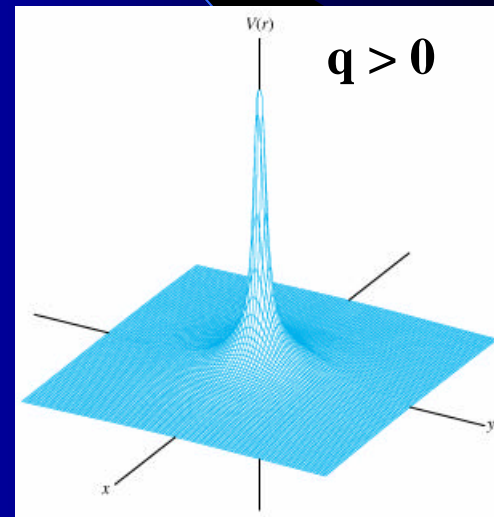
Consideriamo ora una **carica puntiforme q** sorgente del **campo \mathbf{E}**

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = -\int_V^0 dV \quad V = 0 \text{ per } r = \infty$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad V > 0 < 0 \text{ a seconda della carica}$$



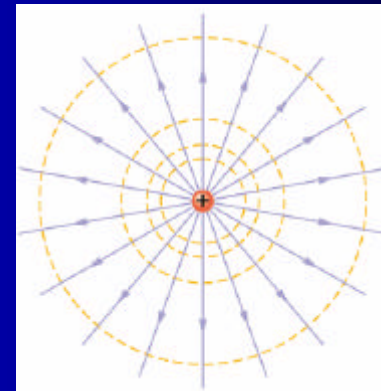
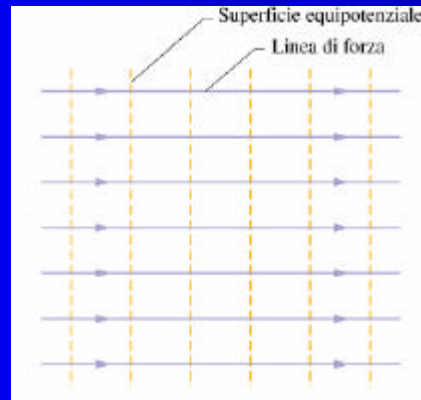
Il potenziale V è **additivo**, pertanto se ho più cariche, ottengo

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Le superfici per cui è $V = \text{costante}$ sono **superfici equipotenziali**, \mathbf{E} è sempre \perp ai punti di una **superficie equipotenziale** (il **lavoro** per muoversi su una superficie equipotenziale è **nullo**)

Se \mathbf{E} è **uniforme**, allora $V = \text{costante} \Leftrightarrow x = \text{costante} \Rightarrow$ **superfici equipotenziali sono dei piani**

Se \mathbf{E} è **generato da una carica puntiforme** \Rightarrow **superfici equipotenziali sono delle sfere**



Consideriamo il caso del filo di lunghezza infinita ed uniformemente carico con distribuzione lineare di carica λ

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$
$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$
$$-\int dV = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

$$V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C \quad \text{se } C = 0 \text{ per } r = 1 \Rightarrow V(1) = 0$$

Consideriamo ora l'**energia totale** di una particella di massa **m** e carica **q** in una zona in cui è presente un **campo elettrico E**

$$E_{TOT} = E_K + U = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Dato che non ci sono forze dissipative, quando la particella si muove dalla posizione 1 alla 2 abbiamo, per il **principio di conservazione dell'energia**

$$E_{TOT}(1) = E_{TOT}(2)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2$$

$$\Delta E_{K_{12}} = L_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad L_{1 \rightarrow 2} = q(V_1 - V_2)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q(V_1 - V_2)$$

Volt = variazione di potenziale elettrico che una carica di 1 C deve effettuare per aumentare la propria energia di 1 J

q > 0 **E_K** aumenta spostandosi verso **V inferiori**

q < 0 **E_K** aumenta spostandosi verso **V superiori**

Se $v_1 = 0$ e in 2 è $V_2 = 0$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = qV_1 \Rightarrow \text{principio su cui si basano gli acceleratori elettrostatici}$$

$$1 \text{ eV} = (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (1 \text{ V}) = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_e = m_e c^2 = 8.1867 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0.511 \text{ MeV}$$

$$E_p = m_p c^2 = 1.5032 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 938.26 \text{ MeV}$$

$$E_n = m_n c^2 = 1.5053 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 939.55 \text{ MeV}$$

Riconsideriamo ora il caso della **sfera isolante** con **carica q** e **raggio R**
a) carica superficiale uniforme s

$$\begin{array}{lll}
 0 \leq r \leq R & E = 0 & V = V_R = \text{costante} \\
 r = R & E_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} = \frac{s}{\epsilon_0} & V_R = \frac{s}{\epsilon_0} R = E_R R \\
 r > R & E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{s}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} & \\
 & V(r_2) - V(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) & \\
 r_2 \rightarrow \infty & V(r_2) \rightarrow 0 & \\
 & V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{s}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} &
 \end{array}$$

b) carica volumetrica uniforme ρ

$$r = 0$$

$$E = 0$$

$$0 < r < R$$

$$q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad q = \rho V$$

$$E = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$r = R$$

$$E = E_R = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

$$r > R$$

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Per il **potenziale** abbiamo

$$r > R \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{rR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$r = R \quad V = V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = E_R R = \frac{rR^2}{3\epsilon_0}$$

$$0 < r < R \quad -\frac{dV}{dr} = E$$

$$-\int_{V(r)}^{V_R} dV = \int_r^R E dr$$

$$V_R - V(r) = -\int_r^R \frac{r}{3\epsilon_0} dr = -\frac{r}{3\epsilon_0} \int_r^R r dr = -\frac{r}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) = -\frac{r}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

$$V(r) = V_R + \frac{r}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) = \frac{rR^2}{3\epsilon_0} + \frac{rR^2}{6\epsilon_0} - \frac{rr^2}{6\epsilon_0}$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{rR^2}{\epsilon_0} - \frac{rr^2}{6\epsilon_0}$$

$$r = 0 \quad V(0) = \frac{rR^2}{2\epsilon_0} = V_{MAX}$$