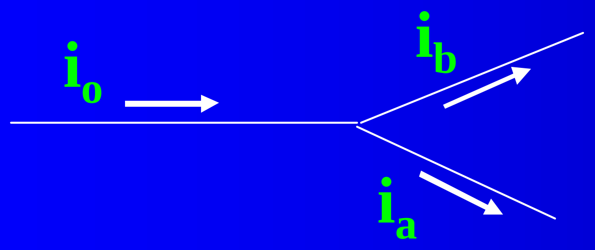
I circuiti

Consideriamo **correnti stabili** di elettroni di conduzione attraverso dei conduttori metallici (flusso netto di carica $\neq 0$)

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int_0^t i\,dt \quad \text{i puo' essere i(t)}$$

$$[i] = A = C/s$$

L'unità di misura della corrente è l'**Ampere**, unità fondamentale nel S.I. Se la **corrente i è stazionaria**, non dipende dal tempo, allora la corrente attraverso una data sezione di un conduttore è sempre la stessa in quanto la carica q deve conservarsi. Il **verso della corrente** è quello delle cariche positive, ovvero opposto al moto degli elettroni, la **corrente è una quantità scalare** (le frecce indicano il verso del flusso di corrente)



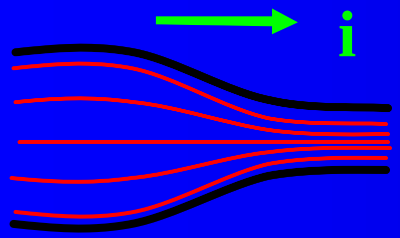
$$\text{q si conserva} \rightarrow i_0 = i_a + i_b$$

Densità di corrente j (vettore orientato come il moto delle cariche positive)

$$i = \int_0^A \vec{j} \bullet d\vec{A} \qquad [j] = Am^{-2}$$

dA = area attraverso cui fluisce i

Linee di flusso della corrente

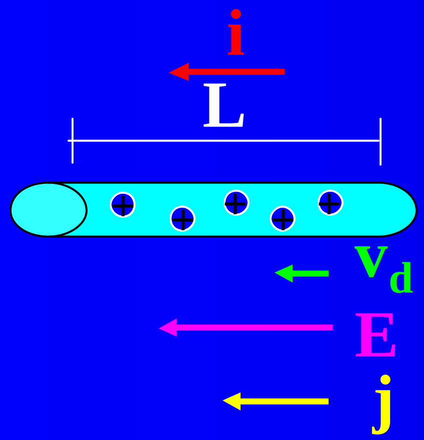


Variando la sezione , varia la densità di corrente in quanto q si deve conservare. **J** è **maggiore** dove le **linee di flusso** sono **più dense**

Consideriamo ora il **moto degli elettroni** in campo elettrico **E**, il moto avviene in **direzione opposta a quella di E** con **velocità di deriva v_d**
Di conseguenza si crea una corrente i.

$$v_d = 10^{-4} \div 10^{-5}\, m/s \text{ in un filo di rame}$$

$$v = 10^{6}\, m/s \quad \text{moto casuale degli elettroni}$$



Consideriamo delle **cariche positive** in un tratto **L** di filo conduttore di sezione **A**. Le cariche presenti in questo tratto di filo sono **nAL**, dove **n** indica le **cariche per unità di volume**. La carica totale vale

$$\mathbf{q = (nAL)e}$$

In presenza di un **campo elettrico E**, le cariche si muovono con velocità $\mathbf{v_d}$

Attraverso una sezione qualsiasi del filo la carica q transita in un tempo

$$t = \frac{L}{v_d} \Rightarrow i = \frac{q}{t} = \frac{neAL}{L} v_d = nAev_d$$

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne}$$

Se la corrente **I = jA** è uniforme e parallela alla sezione **dA**

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d$$

ne > 0 (q positive) ? j¦ $\mathbf{v_d}$
ne < 0 (q negative) ? j¦ $\mathbf{-v_d}$

$$[ne] = Cm^{-3}$$

densità di carica

La corrente dipende dal materiale che utilizziamo. Definiamo una nuova quantità che chiamiamo **resistenza R**

$$R = \frac{\Delta V}{i}$$

$$[R] = V \cdot A^{-1} = \Omega$$

Unità di misura di R è l'**ohm (W)**

Definiamo inolytre la **resistività** r

$$r = \frac{E}{j}$$

$$[r] = \frac{V/m}{A/m^2} = \frac{V}{A}m = \Omega \cdot m$$

Se abbiamo un **materiale isotropo**

$$\vec{E} = r\vec{j}$$

Definamo infine la **conducibilità elettrica** s

$$s = \frac{1}{r}$$

$$[s] = S \cdot m^{-3} \text{ e } 1S = 1\Omega^{-1}$$

S = Siemens

$$\vec{j} = s\vec{E}$$

R caratterizza un dato **corpo**, r **(** s **)** un dato **materiale**

Prendo un pezzo di **filo di rame** di lunghezza **L** e sezione **A** e applico ai suoi capi una DV tale che **E** ed **i** siano **costanti** in tutto il filo

$$E \frac{\Delta V}{L} \quad \text{e} \quad j = \frac{i}{A}$$

$$r = \frac{E}{j} = \frac{\Delta V A}{L i} = \frac{R A}{L} \Rightarrow R = r \frac{L}{A}$$

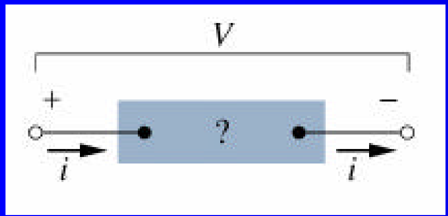
$$r - r_0 = r_0 a \left(T - T_0\right)$$

a prende il nome di **coefficiente termico di resistività** mentre r_0 e $\mathbf{T_0}$ sono valori di **riferimento** (T_0 = 293 K). Per il rame (Cu) abbiamo

$$r_0^{Cu} = 1.69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$a^{Cu} = 4.3 \cdot 10^{-3} K^{-1}$$

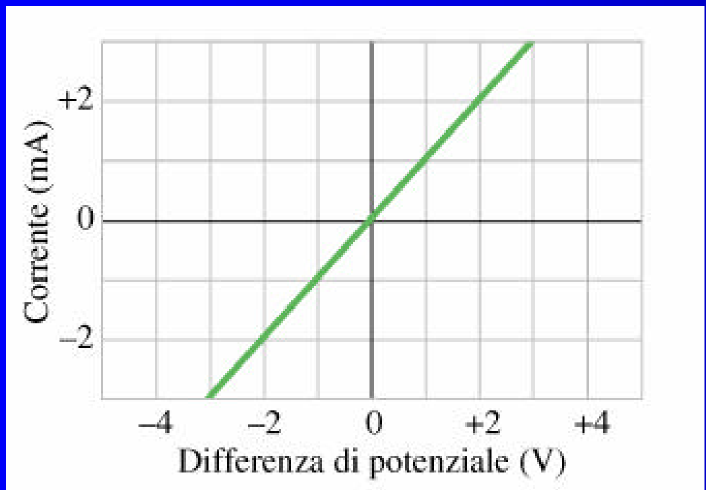
La legge di Ohm

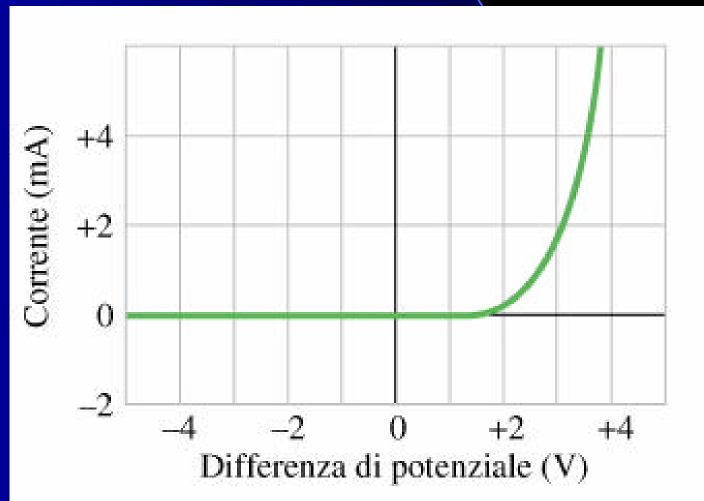


DV **positiva** quando il terminale sinistro ha un potenziale maggiore di quello destro, la corrente fluisce da sinistra a destra

Non tutti i dispositivi si comportano come i **resistori** che non variano la propria resistenza al variare di **i** e DV, ci sono elementi che presentano funzioni caratteristiche di tipo diverso come ad esempio il **diodo a giunzione p-n** che permette il passaggio della **corrente** solo quando DV > V_c: in questo caso la **relazione** tra V ed i **non è lineare**

Resistore R(i,V) = cost **Diodo R(i,V) ^{1} cost**





Un dispositivo come il resistore che mantiene costante il valore di R al variare di i e V, segue la **legge di Ohm**

La corrente che scorre attraverso un dispositivo è sempre direttamente proporzionale alla differenza di potenziale applicata al dispositivo stesso

Un dispositivo che segue la legge di Ohm si dice **conduttore ohmico**

Nei circuiti di microelettronica i dispositivi utilizzati sono qusi sempre di tipo non ohmico come il diodo a giunzione p-n di prima.

Non bisogna tuttavia **confondere definizione di resistenza e legge di Ohm**: la prima (**$R = V/i$**) è **sempre valida** e definisce la resistenza di ogni dispositivo in funzione di i e V, la **legge di Ohm** dice che tale relazione **è costante per i dispositivi ohmici**!!!

Riferendoci ora ai **materiali conduttori ($E = \rho J$)** abbiamo che

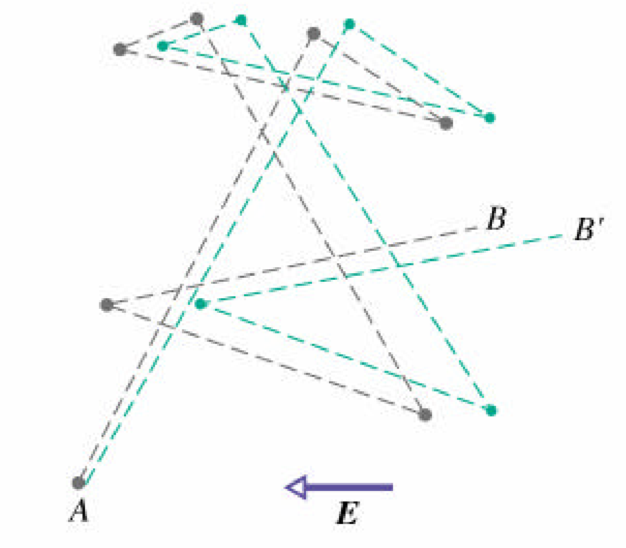
un materiale conduttore obbedisce alla legge di Ohm quando la sua resistività ρ ***è indipendente dal modulo e dalla direzione del campo elettrico applicato***

Tutti i **materiali omogenei** (Cu, Si) entro certi valori di E, **seguono Ohm**

Esaminiamo ora cosa avviene dal **punto di vista microscopico**. Consideriamo la **conduzione nei metalli** e ci basiamo sul **modello ad elettroni liberi**, ovvero assumiamo che gli elettroni di conduzione siano **liberi di muoversi in ogni punto del metallo senza mai urtare tra di loro, ma solo con gli atomi del metallo**.

Gli elettroni si muovono seguendo le regole della fisica quantistica, risulta quindi che essi **hanno** in pratica **una sola velocità efficace**, v_{eff}, **indipendente dalla temperatura**, v_{eff} (Cu) = $1.6 \cdot 10^{6}$ m/s

Quando **applichiamo un campo E**, gli elettroni acquistano una **velocità di deriva** (v_d) in direzione opposta al campo (v_d(Cu) = $5 \cdot 10^{-7}$ m/s)



$v_d \approx 10^{-13}\, v_{eff}$ (nel disegno $v_d \approx 0.02\, v_{eff}$)

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$$

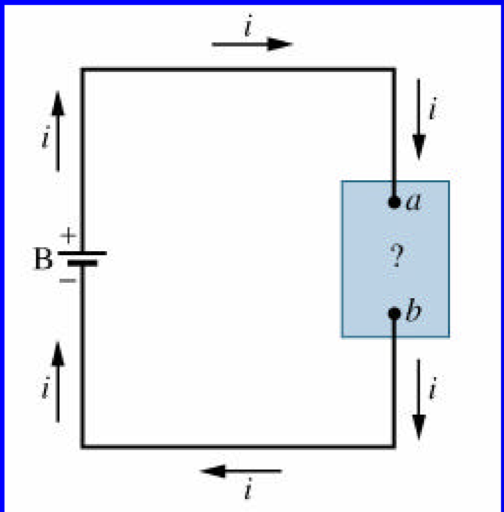
Dopo ogni urto l'e riprende il **moto in direzione casuale**, così nel tempo τ tra due urti la v_d sarà **$v_d = a\tau$**, che è la **v media di tutti gli elettroni**

$$v_d = at = \frac{eEt}{m} \quad ma \;\; v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eEt}{m}$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{m}{e^2 n t}\right) J \;\; inoltre \;\; \vec{E} = r\vec{J}$$

$$\Rightarrow r = \frac{m}{e^2 n t}$$

r **risulta costante** se t **è costante** al variare del campo E applicato, dato che v_d **è molto piccola in confronto con** v_{eff}, allora t **può essere ritenuta costante**, ciò ci assicura che il **metallo descritto con questo modello è un conduttore ohmico**.



Nel circuito qui a fianco la batteria fornisce una **d.d.p.** che, grazie ai fili a resistenza trascurabile, si ritrova ai capi del resistore, ovvero **tra a e b**, come conseguenza nel circuito circola una **corrente i =dq/dt**. Dal **punto di vista microscopico** su ogni elettrone nell'unità di tempo viene fatto un lavoro pari a

$$\vec{F}\cdot\vec{v}_d = -e\vec{E}\cdot\vec{v}_d$$

La **potenza per unità di volume** sarà

$$P_{vol} = \left(-e\vec{E}\cdot\vec{v}_d\right)n \quad e \quad \vec{v}_d = -\frac{\vec{J}}{ne} = \frac{s\vec{E}}{ne}$$

$$\Rightarrow P_{vol} = sE^2 = JE$$

Se consideriamo un **conduttore cilindrico di volume S*l***, affinché in esso fluisca una corrente i = dq/dt, dovrò **spendere una potenza**

$$P = (Sl)P_{vol} = SlJE = (JS)(El)$$

Infine

$$P = i\Delta V$$

La relazione così ottenuta **è sempre valida**

Se ora consideriamo come dispositivo **un resistore** abbiamo $\Delta V = Ri$

$$P = i\Delta V = Ri^2$$

L'energia nel resistore si trasforma in **energia termica** per **effetto Joule**

Si parla di **potenza dissipata** perché il processo è irreversibile

Semiconduttori

I **semiconduttori** sono sostanze che a temperatura ambiente presentano una **resistività molto elevata**, un **coefficiente termico di resistività molto negativo** ed un **numero di portatori di carica limitato**

Alcune proprietà elettriche del rame e del silicio[a]

Proprietà	Rame	Silicio
Tipo di sostanza	Metallo	Semiconduttore
Densità dei portatori di carica, m^{-3}	$9 \cdot 10^{28}$	$1 \cdot 10^{16}$
Resistività, $\Omega \cdot m$	$2 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{3}$
Coefficiente termico di resistitività, K^{-1}	$+4 \cdot 10^{-3}$	$-70 \cdot 10^{-3}$

[a] Dati arrotondati a una cifra significativa per un facile confronto.

A temperatura ambiente il **Si è un isolante**, ma la sua r **diminuisce** se vengono introdotte delle **impurità** (**drogaggio**) nella struttura del Si

Si passa così a $\rho = 8.7 \cdot 10^{-4}$ per **Si di tipo n** e $\rho = 2.8 \cdot 10^{-3}$ per **Si di tipo p**
Inoltre la r **diminusce al crescere della temperatura** e i **portatori di carica** disponibili per creare una corrente **aumentano**, ad esempio portando il Si (tipo n) da 250 K a 450 K i portatori di carica aumentano di un fattore 10^6. Se il Si è di tipo p i portatori di carica sono i buchi

donatori

aumentiamo gli e^- di valenza rispetto al reticolo ospite

$\Downarrow$

con poca energia gli **e^-** sono **liberi** e divengono **e- di conduzione**

Si e **Ge** + P o As
$4e^-$ $5e^-$

tipo n

accettori

diminuiamo gli e^- di valenza rispetto al reticolo ospite

$\Downarrow$

si riempiono i buchi del dopante **corrente dovuta ai buchi**

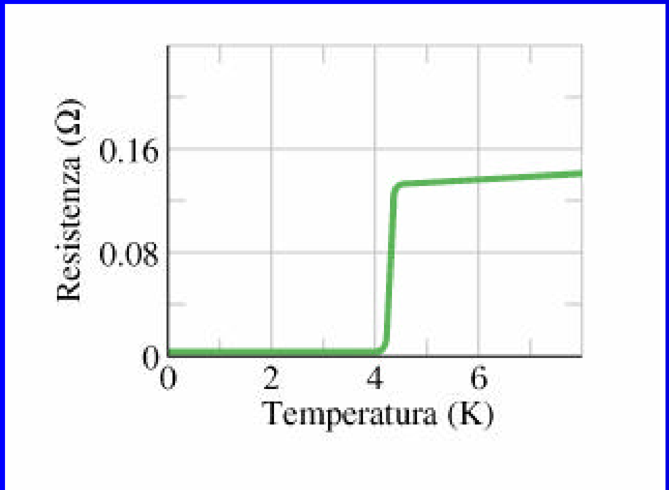
Si e **Ge** + B o Al
$4e^-$ $3e^-$

tipo p

Dal punto di vista **microscopico** la resistività diminuisce in quanto cresce il numero dei portatori di carica n al crescere della temperatura

$$r = \frac{m}{e^2 n t}$$

Superconduttori

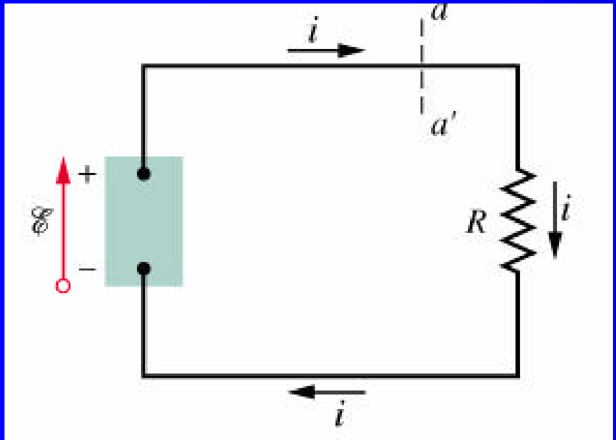


Nel 1911 il fisico olandese **Onnes** scoprì che il Hg perdeva la sua resistività se portato ad una temperatura di 4 K

In un materiale **superconduttore una corrente**, una volta avviata, **si mantiene** praticamente senza consumo di energia

Anche i materiali **superconduttori** a temperatura ambiente sono **isolanti**.
In pratica gli elettroni nel materiale superconduttore non sono soggetti agli urti con gli atomi e quindi **non c'è resistenza al fluire della corrente**

Forza elettromotrice



Per spostare le cariche nel circuito ed avere una corrente i bisogna fare un lavoro

$$L = \int_{L_{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Se la forza è conservativa si ha

$$\vec{F} = -\vec{grad}E_p \Rightarrow \oint_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \quad e \quad \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = E_{p_A} - E_{p_B}$$

Nel caso del campo elettrico statico **F = e E**, allora

$$\vec{E} = -\vec{grad}V \quad \Rightarrow$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{grad}V\cdot d\vec{l} = -\int_A^B dV = V_A - V_B = \Delta V_{A\to B}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

Ai capi del conduttore ohmico del nostro circuito abbiamo

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ri$$

Se il conduttore è chiuso e il campo E è statico, abbiamo

$$\Delta V = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow i = 0$$

Quindi un campo elettrico statico non può mantenere una corrente in un circuito. Allora nel nostro circuito la batteria fornisce la forza necessaria per creare la corrente, ovvero la forza elettromotrice (f.e.m.) che dimensionalmente è un potenziale

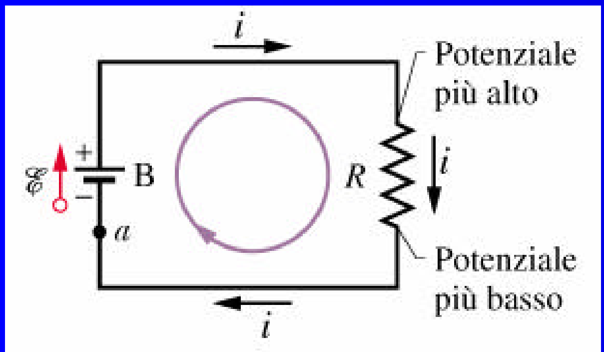
$$f.e.m. = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ri$$

In alternativa la **f.e.m.** può essere definita come il lavoro **dL** compiuto dal generatore per far passare una carica infinitesima **dq** dal suo polo a potenziale inferiore a quello a potenziale superiore, e la carica stessa

$$\boxed{f.e.m. = \frac{dL}{dq} = \mathcal{E}}$$

Quindi la **f.e.m. è il lavoro per unità di carica compiuto dal generatore per muovere le cariche dal suo polo negativo a quello positivo**.

L'unità di misura della f.e.m. è il Volt



Vediamo ora come calcolare la corrente in un circuito.

Nel tempo **dt** nella resistenza si sviluppa una **energia Ri^2dt**, nello stesso tempo attraverso il generatore passa la **carica dq = idt**, ed il **lavoro** è

$$dL = \mathcal{E}dq = \mathcal{E}idt = Ri^2dt \Rightarrow \mathcal{E} = Ri$$

iR è l'energia per unità di carica trasferita dalle cariche in movimento alla resistenza sotto forma di energia termica

In alternativa **sommiamo algebricamente le d.d.p.** che incontriamo nel percorrere il circuito partendo da a (a V_a) e procedendo in senso orario. Come primo elemento troviamo il **generatore** che, percorso dal – al +, dà una **variazione di potenziale pari a +$\mathcal{E}$**.
Passando attraverso la **resistenza** il potenziale diminuisce perché la si attraversa a partire dal potenziale più alto, la **variazione è –iR**.
Globalmente abbiamo

$$V_a + \mathcal{E} - iR = V_a$$

ovvero

$$\mathcal{E} - iR = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

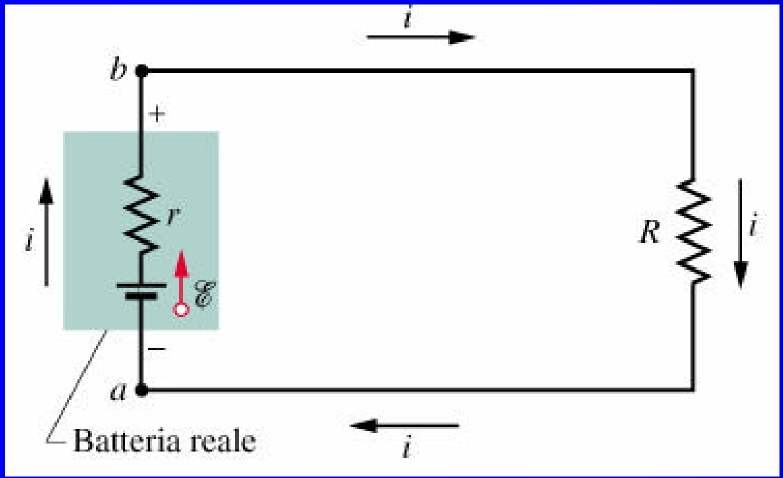
Nel risolvere il circuito abbiamo usato la **seconda legge di Kirchhoff o legge delle maglie**
La somma algebrica delle d.d.p. rilevate su un circuito chiuso in un giro completo è nulla

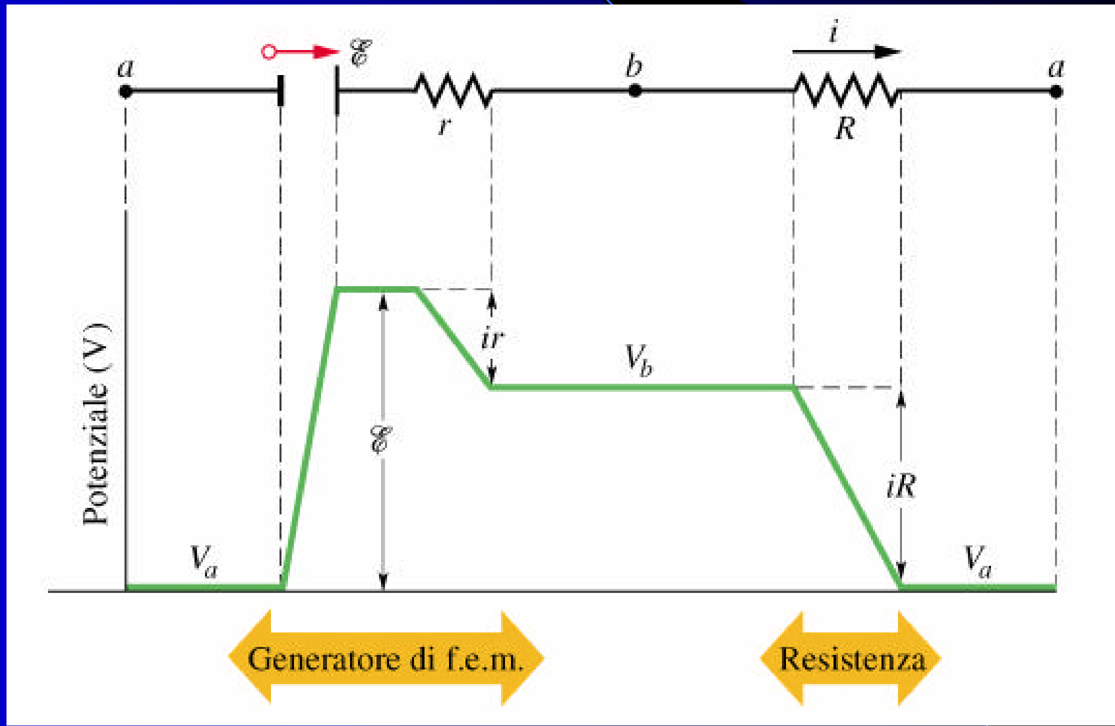
Regola della resistenza: se si passa attraverso una resistenza nel verso della corrente, la variazione di potenziale è –iR, +iR nel verso opposto

Regola della f.e.m.: se si passa attraverso un generatore di f.e.m. ideale nella direzione della freccia della f.e.m., la variazione di potenziale è $+\mathcal{E}$, $-\mathcal{E}$ nel verso opposto

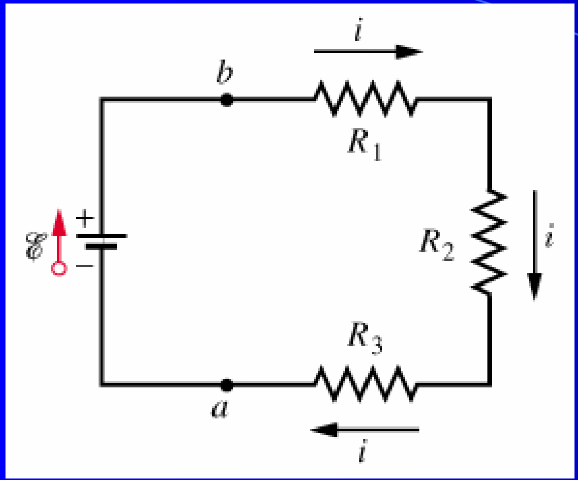
Nella realtà ogni **generatore** presenta una **resistenza interna** al passaggio della corrente, indichiamo tale resistenza con **r** e la separiamo dal generatore stesso, avremo

$$\mathcal{E} - ir - iR = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

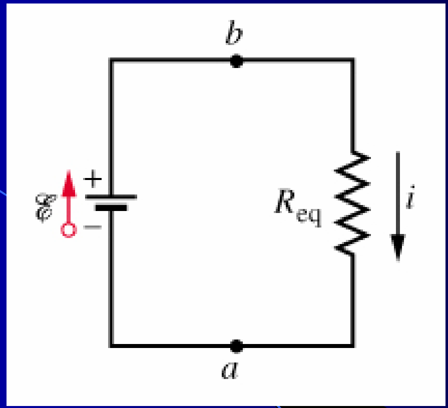




Resistenze in serie



≡



In **serie** significa che le resistenze sono collegate tra di loro a **catena** e la **d.d.p. V** fornita dalla batteria si ritrova tra l'inizio della prima resistenza e la fine dell'ultima, la **corrente i** attraverso le resistenze **è la stessa**. Infine la **somma delle d.d.p.** ai capi di ogni resistenza **è uguale a V**
Si verifica che le resistenze in serie possono essere sostituite da una sola resistenza equivalente $\mathbf{R_{eq}}$, attraverso cui scorre la **stessa corrente i** ed ai capi della quale c'è la **d.d.p. V**

$$\mathcal{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Per la **resistenza equivalente** è

$$\mathcal{E} - iR_{eq} = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}}$$

Otteniamo così

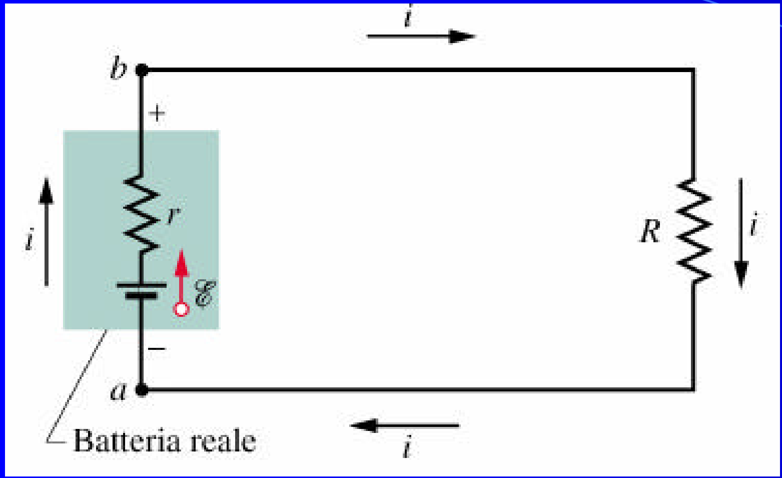
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

In generale per **n resistenze in serie** abbiamo

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

La **resistenza equivalente è sempre maggiore** di ciascuna delle resistenze in serie

Sempre con riferimento ad un circuito chiuso per la **d.d.p. tra b e a** si ha



$$V_b - iR = V_a \Rightarrow V_b - V_a = iR$$

Il punto **b è a potenziale + alto di a**

$$V_b - V_a = \mathcal{E}\frac{R}{R+r}$$

Calcoliamo ora **V_b-V_a partendo da b e passando attraverso la batteria**

$$V_b + ir - \mathcal{E} = V_a \Rightarrow V_b - V_a = \mathcal{E} - ir = \mathcal{E}\frac{R}{R+r}$$

Ritroviamo la stessa espressione trovata percorrendo l'altra parte del circuito. Affermiamo allora che **V_b-V_a è la d.d.p. fra i poli della batteria** e **coincide con la f.e.m. $\mathcal{E}$** solo **se** la **resistenza** del generatore **è nulla** (**r = 0**) o **se** il **circuito è aperto** (**i = 0**)

Facciamo ora delle considerazioni sulla **potenza** dopo aver osservato che il **generatore trasferisce energia ai portatori di carica da un lato e alla sua resistenza interna dall'altro**. La **potenza netta** trasferita ai portatori di carica vale

$$\boxed{P = iV}$$

$$\boxed{P = i(\mathcal{E} - ir) = i\mathcal{E} - i^2 r}$$

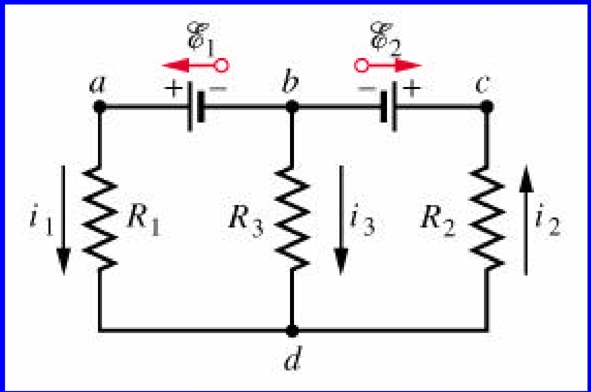
Il termine $\mathbf{i^2r}$ è la **potenza dissipata su r come energia termica**, mentre $\mathcal{E}$**i** è la **potenza erogata globalmente dal generatore**

$$\boxed{\begin{aligned} P_r &= i^2 r \\ P_{fem} &= i\mathcal{E} \end{aligned}}$$

Quando una **batteria** viene **ricaricata** , in essa la **corrente** circola in **senso opposto** al normale e i **portatori di carica cedono energia alla batteria**, la **potenza erogata dai portatori di carica** è sempre **P=iV** perché **si dissipa sempre ir^2 su r**, mentre la **potenza utile alla ricarica è P$_{fem}$**

In un **circuito a più maglie** distinguiamo i **nodi** (b e d) e i **rami** (bad, bcd e bd). In ciascun **ramo** la **corrente** è sempre la **stessa** e in un **nodo** la **somma** algebrica delle **correnti** che vi arrivano deve essere **0**, ovvero vale la **prima legge di Kirchhoff o legge dei nodi**

La somma delle correnti che entrano in un nodo deve essere uguale alla somma delle correnti che escono dal nodo stesso



$$i_1 + i_3 = i_2$$

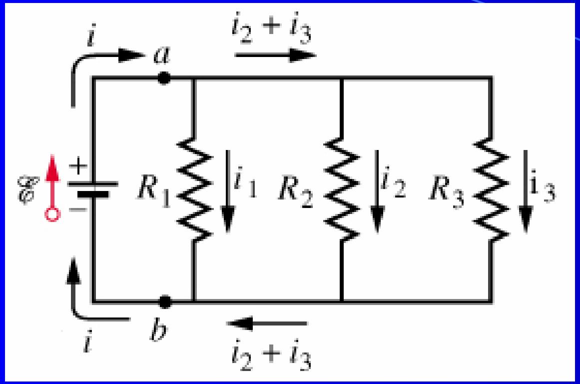
nel nodo d

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff alle tre maglie del circuito (verso antiorario da b)

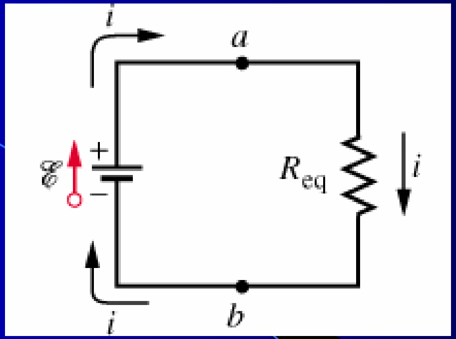
$$\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0 \qquad \textit{per la maglia di sinistra}$$
$$-i_3 R_3 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0 \qquad \textit{per la maglia di destra}$$
$$\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0 \qquad \textit{per la maglia più grande}$$

Scegliendo due delle tre equazioni appena scritte e la relazione tra le correnti in un nodo si ottengono i valori ed i versi delle tre correnti.

Resistenze in parallelo



$\equiv$



In **parallelo** significa che le resistenze hanno **tutte** ai loro capi la **d.d.p. V**, che la **somma** algebrica delle **correnti** che le attraversano vale **i**.
Anche in questo caso abbiamo una **resistenza equivalente R_{eq}** ai cui capi c'è **V** e in cui fluisce **i**

$$i_1 = \frac{V}{R_1} \quad i_2 = \frac{V}{R_2} \quad i_3 = \frac{V}{R_3}$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

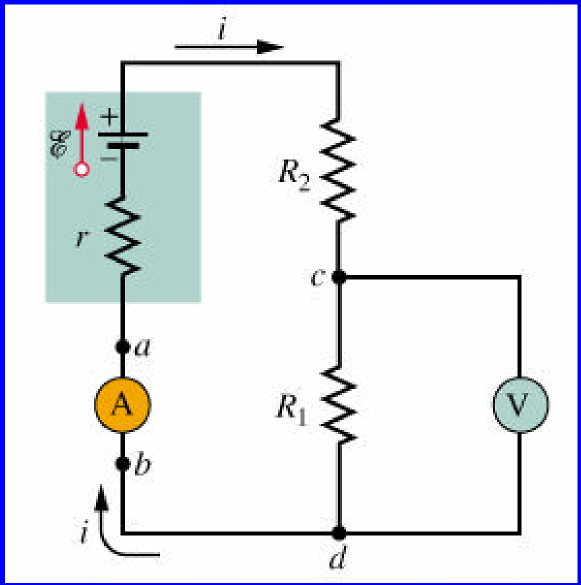
In generale per **n resistenze in parallelo** abbiamo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

La **resistenza equivalente è sempre minore** di ciascuna delle resistenze collegate in parallelo

Amperometro

L'amperometro serve a misurare la corrente in un circuito, deve avere **resistenza interna R_A piccola** e va **inserito in serie** nel circuito



Voltmetro

Il voltmetro serve a misurare le d.d.p., deve avere una **resistenza interna R_V elevata** e va **inserito in parallelo** nel circuito.