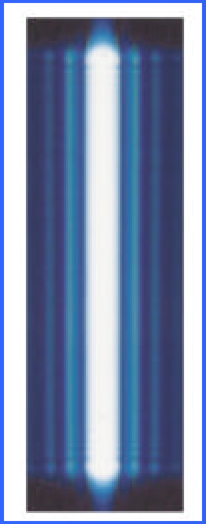
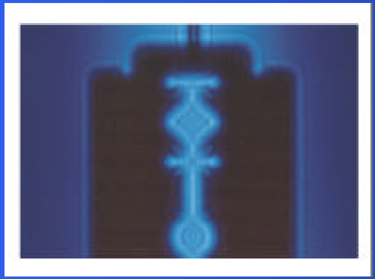
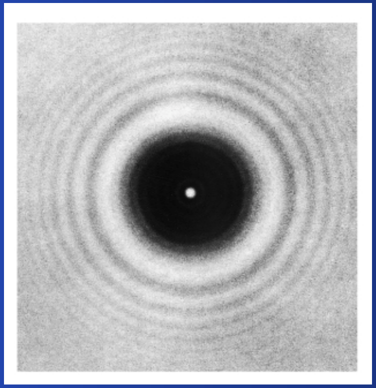
La diffrazione

Il fenomeno della **diffrazione** si incontra ogni volta che la luce incontra un ostacolo o un'apertura di dimensioni paragonabili alla sua lunghezza d'onda. L'effetto della diffrazione è quello di allargare il fascio di luce originario dando origine a figure di interferenza caratterizzate da una serie di massimi di intensità luminosa decrescente (**massimo principale e massimi secondari**); i massimi naturalmente si alternano con i minimi. **Fresnel 1819**. **Macchia luminosa di Fresnel**.

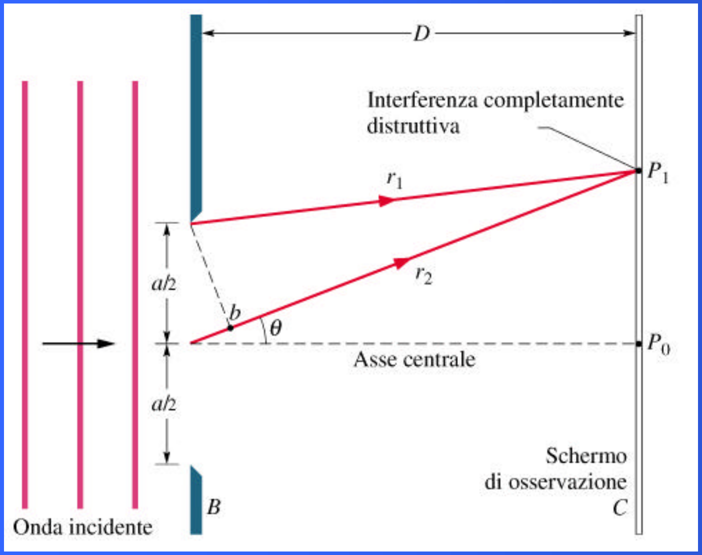






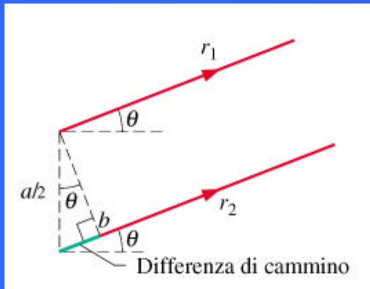
Diffrazione da singola fenditura

Consideriamo un’onda piana di **lunghezza d’onda λ** che viene difratta da una sottile **fenditura di lunghezza a**.



Per individuare la posizione dei massimi e dei minimi nella figura di diffrazione, consideriamo la fenditura a suddivisa in tanti punti, ognuno dei quali sarà sorgente di onde sferiche secondarie, e calcoliamo la **differenza di cammino ottico tra due raggi originati da punti a distanza a/2** l’uno dall’altro. Innanzitutto calcoliamo la **posizione della prima frangia scura**

Le onde originate nella fenditura sono in fase ed interferiscono distruttivamente in P_1, quindi in P_1 arrivano con uno sfasamento di $\lambda/2$. Facciamo anche l’ipotesi che **D >> a**.



$$\Delta L = \frac{a}{2}\sin q$$

Vale per ogni coppia di raggi che arriva in P_1

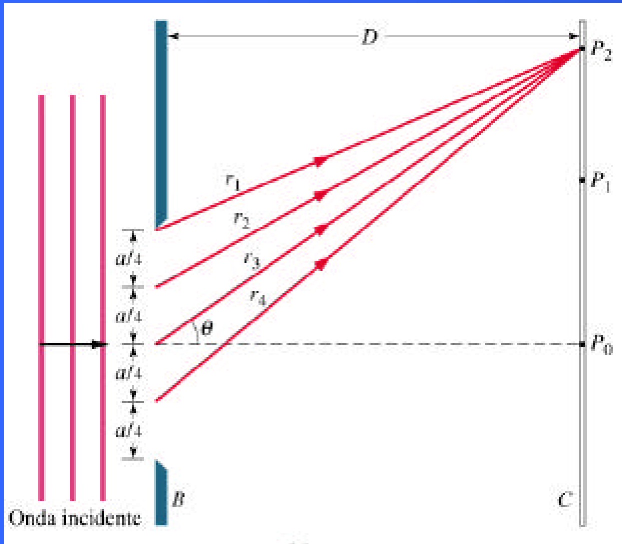
Per avere interferenza distruttiva deve essere

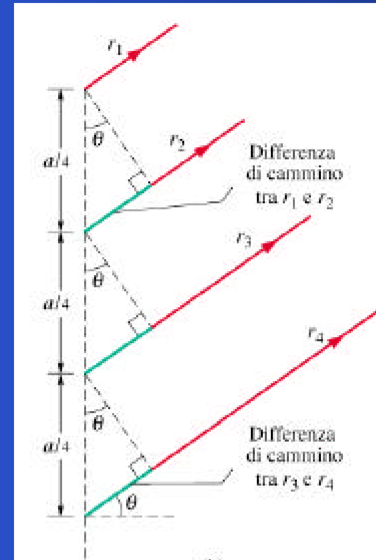
$$\frac{a}{2}\sin q = \frac{l}{2} \Rightarrow a\sin q = l$$

primo minimo

Se ora **diminuiamo a**, l'effetto di **diffrazione aumenta**, ovvero aumenta l'angolo q a cui si trova il primo minimo, se **a = l**, allora q_1 **= 90º** e il **massimo centrale copre tutto lo schermo**.

Per trovare i **minimi successivi** si procede in modo analogo, ma questa volta si divide la **fenditura in quattro parti** ciascuna di ampiezza **a/4**.





$$r_2 - r_1 = \frac{l}{2} \qquad r_4 - r_3 = \frac{l}{2}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{a}{4}\sin q = \frac{l}{2} = r_4 - r_3$$

$$a \sin q = 2l \qquad \text{secondo minimo } (\mathrm{P}_2)$$

condizione per avere la seconda frangia scura in P_2

Iterando il procedimento si ottiene

$$\boxed{a \sin q = m l \qquad m = 1,2,3,\ldots \qquad \text{minimi}}$$

Nella diffrazione da singola fenditura le frange scure si trovano dove $\Delta L = a\sin\theta$ tra i raggi provenienti dagli estremi della fenditura è $m\lambda$.

Passiamo ora allo studio dell'intensità luminosa I(θ).

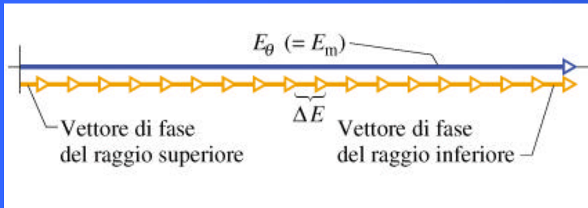
Dividiamo la fenditura in tanti piccoli tratti di ampiezza Δx in modo che ciascuno di essi sia sorgente di onde sferiche secondarie (Huygens). Consideriamo poi le onde che arrivano in P con inclinazione θ e ne calcoliamo il campo elettrico E_θ. Sappiamo poi che $I(\theta) \propto E^2_\theta$. Inoltre devo conoscere una relazione tra le fasi delle onde che arrivano in P.

$$\Delta f = \frac{2p}{l}\Delta L$$

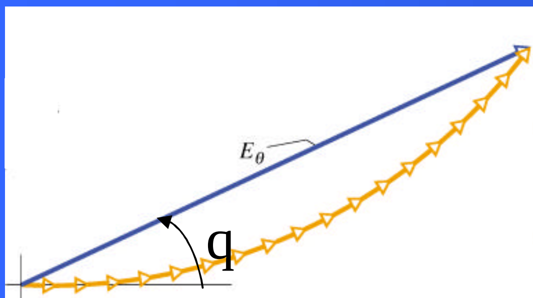
La differenza di cammino ottico tra due segmenti adiacenti vale Δxsinθ, allora

$$\Delta f = \frac{2p}{l}\Delta x \sin q$$

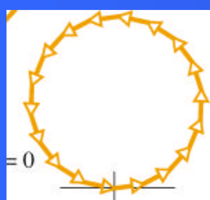
Suppongo che tutte le onde che arrivano in P abbiano ampiezza ΔE uguale ed applico il metodo dei vettori rotanti per trovare E_θ dell'onda risultante. Per il punto a θ=0, la differenza di fase è 0, tutte le onde arrivano in fase. L'ampiezza E_θ dell'onda risultante è massima (E_m) e ad essa corrisponde la massima intensità luminosa sullo schermo.



per il massimo centrale P_0 a $\theta = 0$ e $\Delta\phi = 0$



per un punto P inclinato di θ, $E_\theta < E_m$ quindi l'intensità luminosa sarà minore di quella del massimo centrale



primo minimo: tra il primo e l'ultimo vettore c'è uno sfasamento di $2\pi \Rightarrow \Delta L = \lambda$ tra il primo e l'ultimo raggio della fenditura

$$I = I_m\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2 \qquad a = \frac{1}{2} f = \frac{pa}{l}\sin q$$

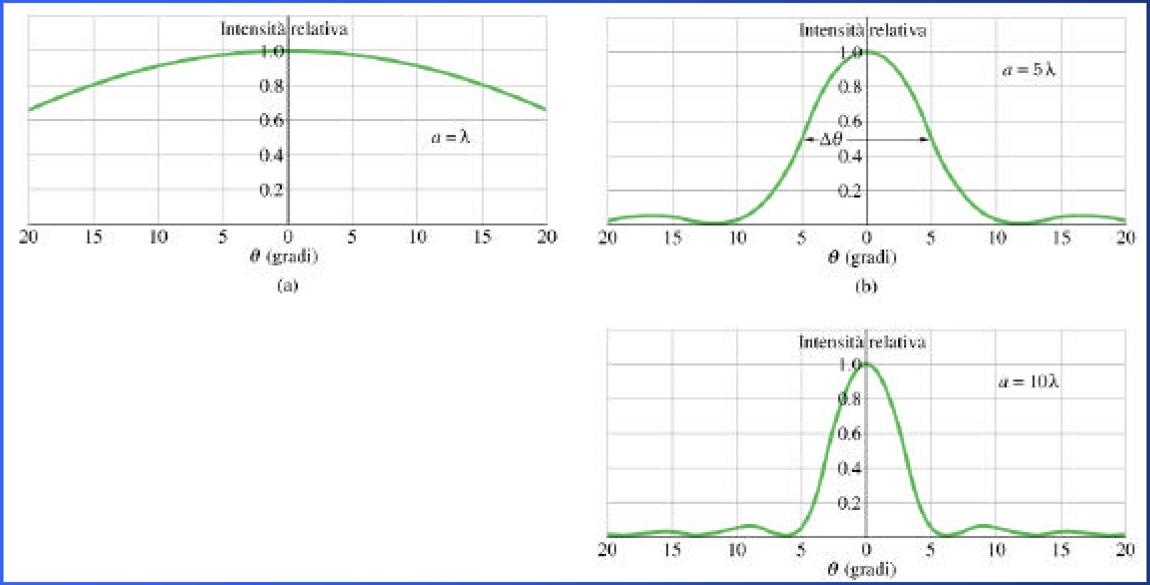
Analizzando le equazioni appena scritte si vede che

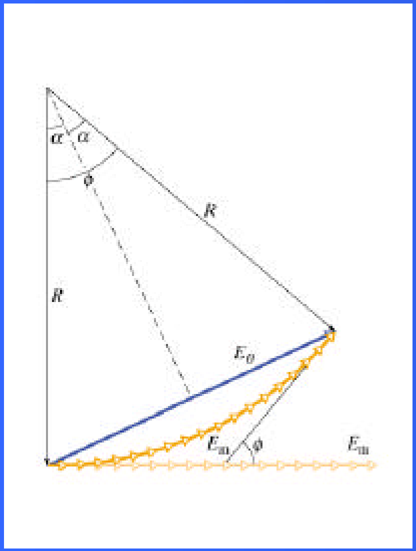
$$a = mp \quad \text{con } m = 1,2,3 \quad \text{minimi} \Rightarrow$$

$$mp = \frac{pa}{l}\sin q \quad \text{con } m = 1,2,3$$

$$a \sin q = m l \quad \text{con } m = 1,2,3 \quad \text{minimi, frange scure}$$

Otteniamo il risultato già ricavato in precedenza per la localizzazione dei minimi





Ricaviamo le equazioni per I e α in forma analitica utilizzando il metodo dei vettori rotanti

$$E_q = 2\left[R\sin\left(\frac{1}{2}f\right)\right] \qquad f = \frac{E_m}{R}$$

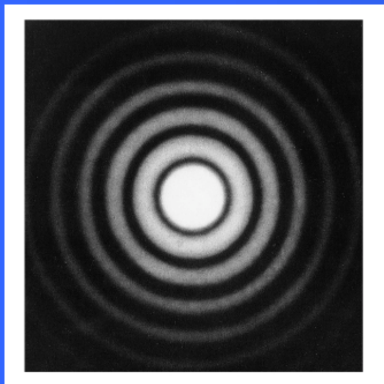
$$E_q = \left(\frac{E_m}{\frac{1}{2}f}\right)\sin\left(\frac{1}{2}f\right)$$

Sappiamo che $I_m \propto E_m^2$, quindi

$$\frac{I}{I_m} = \frac{E_q^2}{E_m^2}$$

$$I = I_m\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2$$

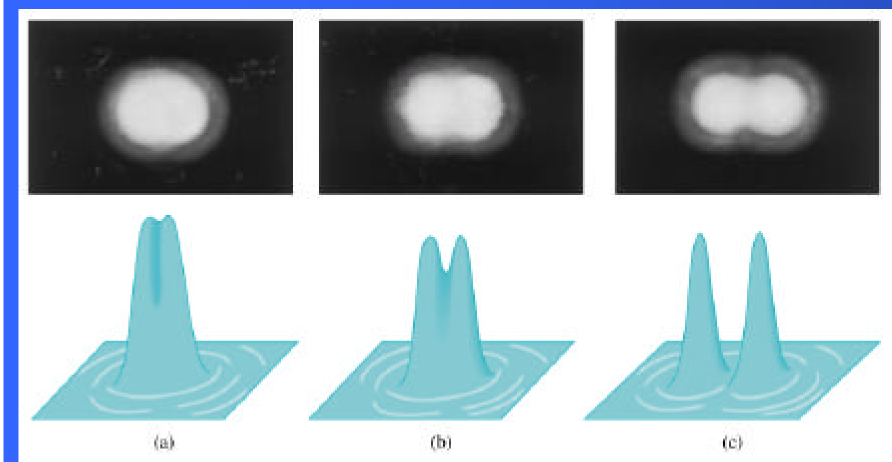
Diffrazione attraverso un foro circolare



Prendiamo ora un foro circolare di diametro d, la figura di diffrazione che si ottiene è formata da cerchi lumiosi e scuri alternati. Per la posizione del primo minimo si trova

$$\sin q = 1,22\frac{l}{d}$$

Potere risolvente



Criterio di Rayleigh

Due sorgenti luminose puntiformi sono risolubili se la loro distanza angolare è tale che il max. centrale della figura di diffrazione di una coincide con il primo minimo della figura di diffrazione dell’altra

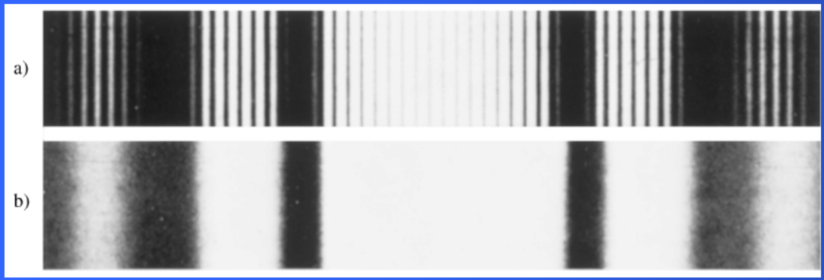
$$q_R = \arcsin \frac{1,22\, l}{d}$$

Approssimando $\sin\theta_R$ con θ_R (siamo in presenza di angoli piccoli), si ottiene

$$q_R = 1,22 \frac{l}{d}$$ **criterio di Rayleigh**

Diffrazione da doppia fenditura

Riprendiamo l'esperimento di Young, nella pratica non sempre il criterio che $a \ll \lambda$ viene soddisfatto, anzi con le λ nel visibile questo accade di rado. Quindi normalmente si ha a che fare contemporaneamente con fenomeni di interferenza e di diffrazione



Per l'intensità si ottiene

$$I = I_m \left(\cos^2 b\right)\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2 \quad \text{diffrazione da doppia fenditura}$$

$$b = \frac{pd}{l}\sin q \qquad \text{e} \qquad a = \frac{p\mathrm{a}}{l}\sin q$$

d=distanza punti centrali delle fenditure ed a=larghezza della fenditura

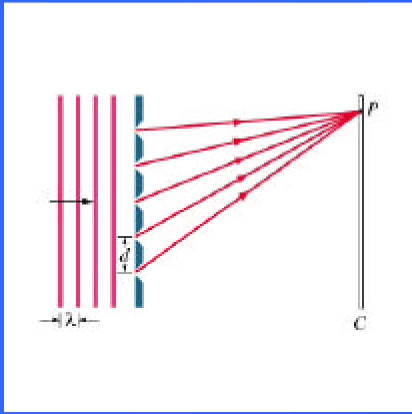
$\left(\cos^2 b\right)$ fattore di interferenza

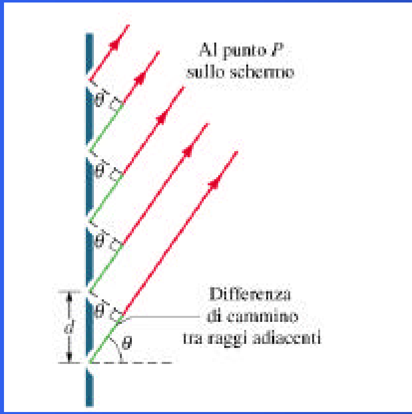
$\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2$ fattore di diffrazione

Per a→0, α→0, il termine di diffrazione →1, →abbiamo una figura di pura interferenza da due fenditure molto strette i cui centri distano d. Per d = 0 otteniamo l'effetto di sovrapporre tra di loro le due fenditure ottenendone una sola di larghezza a. Quindi β =0 e $\cos^2\beta=1$ e abbiamo il solo fenomeno della diffrazione da una fenditura.

Reticoli di diffrazione

In un reticolo si hanno N fenditure (incisioni) (anche migliaia/cm).



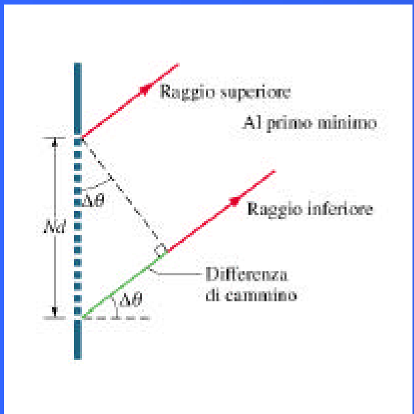


Per ricavare le posizioni dei massimi si procede come fatto in precedenza per l'interferenza e la diffrazione, tenendo presente che ora d rappresenta la distanza tra due fenditure adiacenti e si chiama passo del reticolo

$$d \sin q = m\, l \quad \text{con } m = 0,1,2,\ldots \qquad \text{massimi}$$

m = numero d'ordine. θ =θ(λ), quindi misurando θ ottengo λ

Il potere risolvente di un reticolo dipende dalla larghezza delle righe. definiamo la larghezza del massimo centrale come l'intervallo angolare Δθ tra il centro del massimo centrale (θ=0º) e l'angolo in cui l'intensità del massimo centrale va a zero ed ha inizio il primo minimo scuro.
La posizione del primo minimo si ha per



$Nd \sin(\Delta q) = l$ analogia con $a \sin ? = ?$

Ricordando che abbiamo a che fare con angoli piccoli

$$\Delta q = \frac{l}{Nd} \qquad \text{larghezza massimo centrale}$$

Per gli altri massimi si trova

$$\Delta q = \frac{l}{Nd \cos q} \qquad \text{larghezza del massimo in direzione } q$$

N grande mi permettere di distingure lunghezze d'onda più vicine

Dispersione e potere risolvente di un reticolo

La dispersione è la capacità di un reticolo di distinguere tra due diverse lunghezze d'onda e vale

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

Cerchiamo ora un'espressione di D che dipenda dai parametri del reticolo

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \text{differenziando ottengo}$$

$$d \cos\theta\, d\theta = m\, d\lambda \qquad \text{e passando alle diffrenze finite}$$

$$d \cos\theta\, \Delta\theta = m\Delta\lambda \qquad \text{ovvero}$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

Quindi

$$D = \frac{m}{d\cos\theta}$$

D alta se ci sono incisioni molto vicine, ovvero d deve essere piccolo, inoltre si devono osservare gli ordini m elevati. D non dipende da N

Il potere di risoluzione di un reticolo è definito come

$$R = \frac{\bar{l}}{\Delta l}$$

Nella pratica abbiamo

$$d\cos q \Delta q = m \Delta l \quad \text{se } \Delta q \text{ e' il piu' piccolo possibile}$$

$$\Rightarrow \text{criterio di Rayleigh} = \text{larghezza di ogni riga} \Rightarrow$$

$$\Delta q = \frac{l}{N d \cos q}$$

$$\frac{l}{N} = m \Delta l$$

Infine

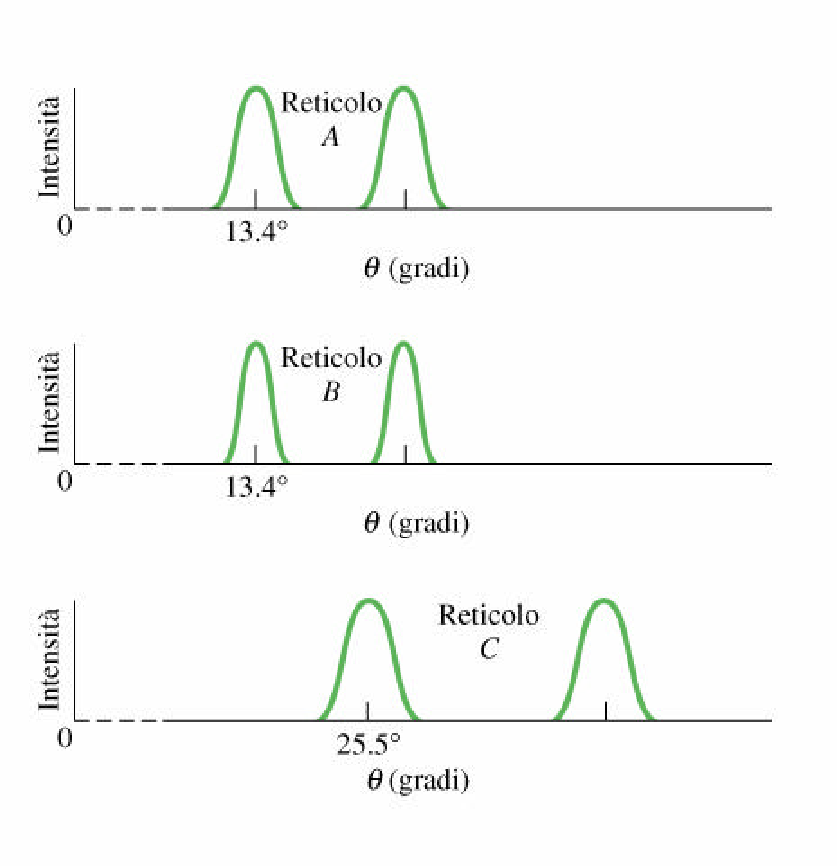
$$\boxed{R = Nm}$$

Alto potere risolvente se N elevato

Tre reticoli a confronto[a]

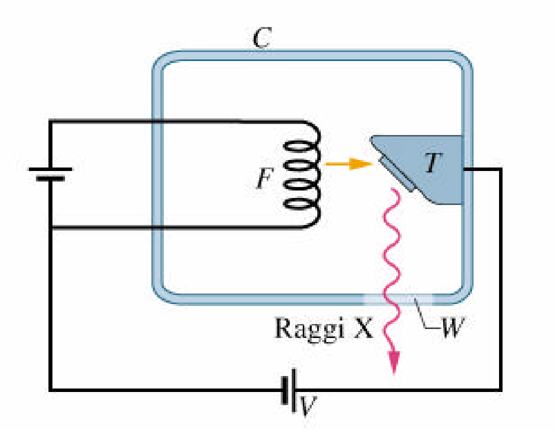
Reticolo	N	d (nm)	θ	D (gradi/μm)	R
A	10 000	2540	13.4°	23.2	10 000
B	20 000	2540	13.4°	23.2	20 000
C	10 000	1370	25.5°	46.3	10 000

[a]Valori per $\lambda = 589$ nm e $m = 1$.



$\lambda \sim 589$ nm

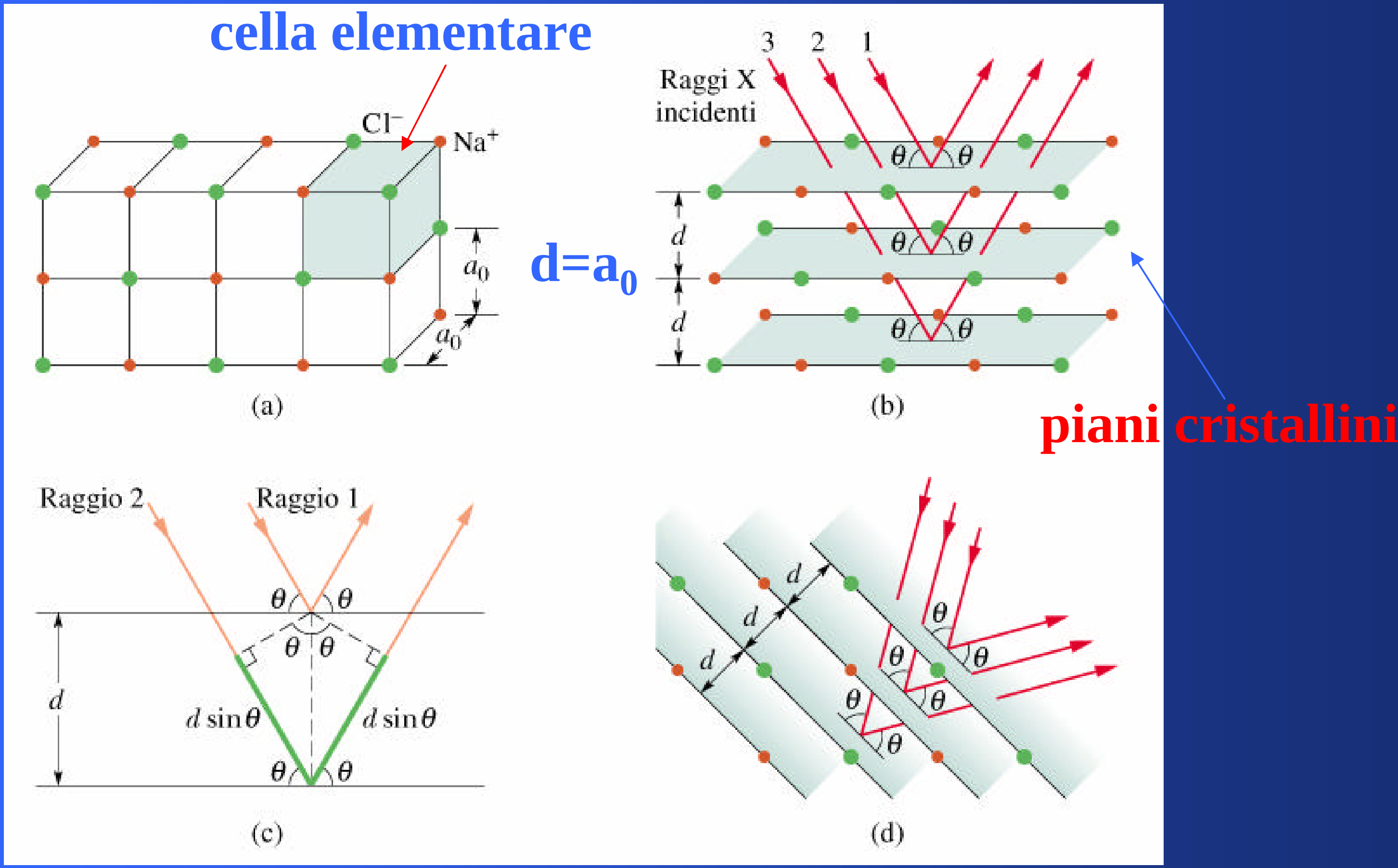
Diffrazione dei raggi X



I raggi X sono onde elettromagnetiche con lunghezza d’onda dell’ordine di 0.1 nm.
Se vogliamo distinguere tra raggi X con λ diverse non possiamo usare un reticolo di diffrazione, infatti (λ =0.1 nm e d=3000) il massimo di ordine 1 si ha ad un angolo

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} = 0.0019^{o}$$

Per poter utilizzare un reticolo con i raggi X si dovrebbe avere un passo d dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d’onda dei raggi X, ovvero delle dimensioni degli atomi.
1912 Max von Laue pensa ad un cristallo come ad un reticolo.
Cristallo di NaCl. Cella elementare che si ripete in tre dimensioni.
I raggi X vengono difratti dalla struttura del cristallo e danno origine a massimi e minimi di intensità dovuti a fenomeni di interferenza



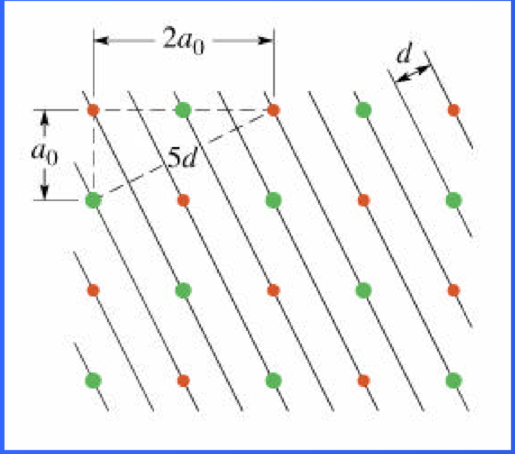
Il fenomeno, che è diverso dai fenomeni di diffrazione che abbiamo visto, viene descritto come se i raggi X venissero riflessi da dei pianidi atomi del cristallo detti **piani di riflessione paralleli** o **piani cristallini**.

Le riflessioni ed i piani di riflessione sono definiti in modo che siano coerenti con i massimi della figura di diffrazione dei raggi X dal cristallo. Non c’è rifrazione. Per i massimi si ottiene

$$2d\sin q = m\,l \quad \text{con } m = 1,2,3,\ldots \quad \text{Legge di Bragg}$$

q è detto **angolo di Bragg**

I piani cristallini che soddisfano alla legge di Bragg sono sempre individuabili in un cristallo, indipendentemente dall’angolo con cui i raggi X colpiscono il cristallo



$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}$$

Misurando d posso ricavare a_0

Studio degli spettri dei raggi X

Disposizione degli atomi nei cristalli

Determinazione della struttura della cella elementare