

# Gradiente, divergenza e rotore

## Gradiente di una funzione scalare della posizione

Sia  $f(x,y,z)$  una funzione scalare continua e derivabile delle coordinate costruiamo in ogni punto dello spazio un vettore le cui componenti  $x,y,z$  siano uguali alle derivate parziali della funzione  $f(x,y,z)$ . Questo vettore prende il nome di **gradiente di  $f$**  (**grad  $f$**  o  **$\tilde{\nabla}f$** )

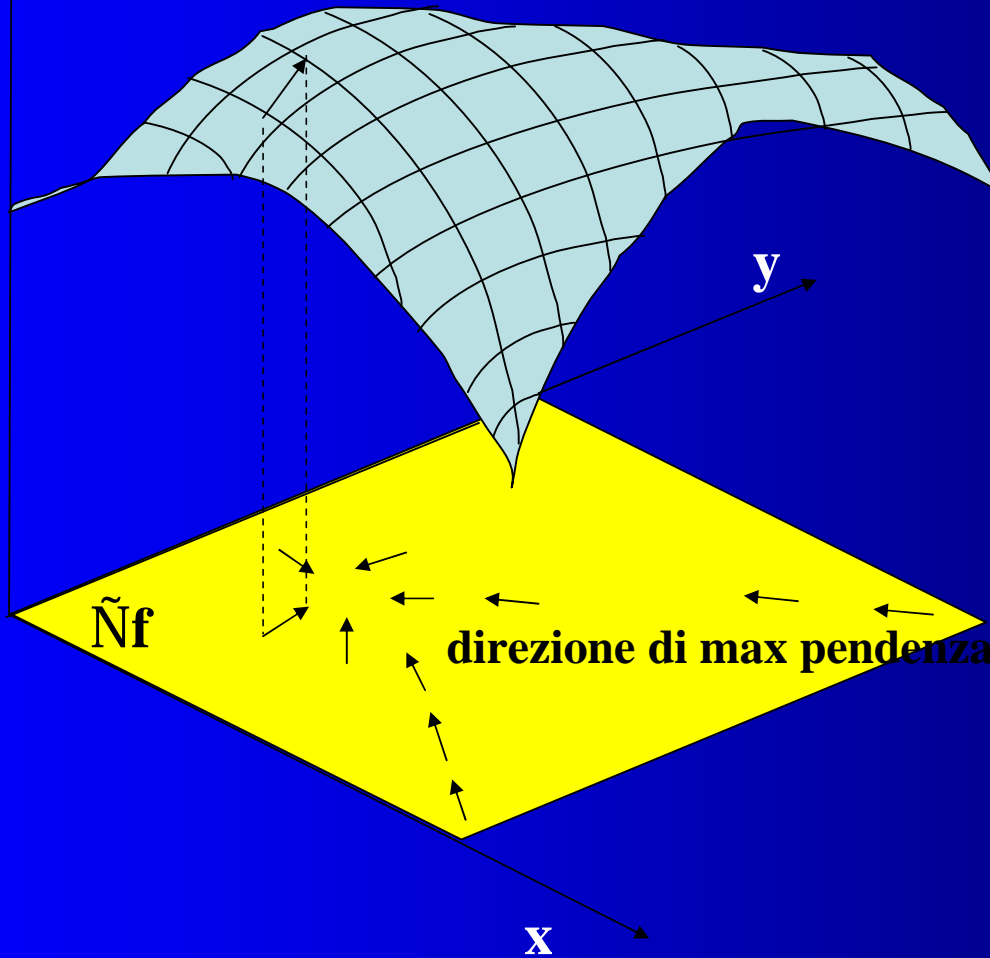
$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

**$\tilde{\nabla}f$**  ci dice come varia la funzione  $f$  nell'intorno di un punto, la sua componente  $x$  è la derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $x$  e indica quanto rapidamente varia  $f$  quando ci si muove lungo  $x$ .

La direzione di  **$\tilde{\nabla}f$**  in un punto qualsiasi è quella in cui, a partire da quel punto, ci si deve muovere per trovare l'incremento più rapido della funzione  $f$ .

$f(x,y,z)$



Consideriamo ora la variazione del potenziale  $V$  tra  $(x,y,z)$  e  $(x+dx, y+dy, z+dz)$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Sia inoltre  $d\vec{s}$  lo spostamento infinitesimo

$$d\vec{s} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

Ricordando che

$$dV = -\vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Si ottiene

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

Il campo elettrico va da zone a  $V+$  a zone a  $V-$ , il gradiente di  $V$  invece è un vettore con verso concorde a quello dei  $V$  crescenti

$$V = -kxy \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y\right)(-kxy) = k(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$$

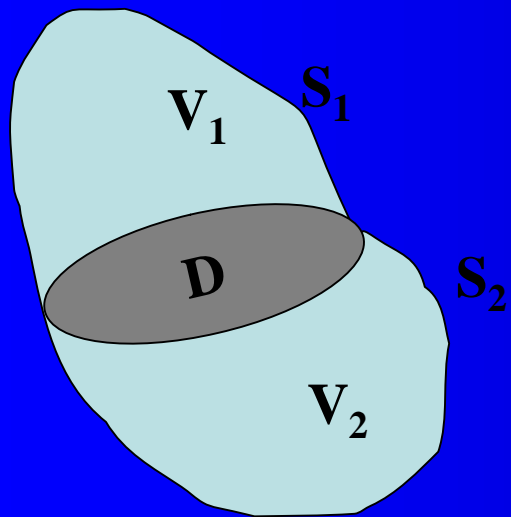
## Divergenza di una funzione vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z)$

Consideriamo un volume finito  $V$  di forma qualsiasi e superficie  $S$ , il flusso della funzione  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$  vale

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Dividiamo ora il volume  $V$  in due parti tramite un diaframma  $D$  in modo da ottenere i due volumi  $V_1$  e  $V_2$  delimitati da  $S_1$  ed  $S_2$ , con  $S_1$  ed  $S_2 \supset D$

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$$



Suddivido poi il volume in parti sempre più piccole in modo da avere integrali di superficie sempre più piccoli.

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

L'obiettivo è quello di ottenere qualcosa che sia caratteristico di una regione molto piccola, ovvero una caratteristica locale o puntuale dello spazio. Ritorna pertanto utile ricorrere alla seguente quantità

$$\frac{\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{V_i}$$

Questo rapporto tende, procedendo per suddivisioni successive, ad un limite che costituisce una proprietà caratteristica della funzione  $\mathbf{F}$  in quell'intorno e che prende il nome di divergenza di  $\mathbf{F}$

$$\text{div}\vec{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i \quad (1)$$

Naturalmente si dà per scontato che questo limite esista e che esso sia indipendente da come si fa la suddivisione dello spazio.

Nella pratica la  $\text{div}\mathbf{F}$  è il flusso uscente da  $V_i$  per unità di volume nel caso limite in cui  $V_i$  sia infinitesimo.

La  $\text{div}\mathbf{F}$  è una grandezza scalare ed è funzione delle coordinate  $x,y,z$ .

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^N V_i \left[ \frac{\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{V_i} \right]$$

Per  $N \rightarrow \infty$  e  $V_i \rightarrow 0$ , il termine tra parentesi quadre tende alla  $\text{div}\mathbf{F}$  e  $\sum V_i \rightarrow \int dV$ , quindi

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{F} dV$$

Quest'ultima relazione è il **Teorema di Gauss** o della divergenza ed è valido per ogni campo vettoriale per cui la relazione (1) ha un limite. Nel caso in cui il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  si il campo elettrico  $\mathbf{E}$  abbiamo

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{E} dV$$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \forall \text{ punto}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$\operatorname{div} \vec{E} > 0 \rightarrow$  flusso netto uscente nell'intorno

## Laplaciano

Sappiamo che

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La componente x di E è  $E_x = -\partial V / \partial x$ , analogamente per le componenti  $E_y$  ed  $E_z$ , quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \\ &= - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} V} \end{aligned}$$

Definiamo la seguente quantità

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Laplaciano in coordinate cartesiane ortonormali}$$

Il Laplaciano in coordinate cartesiane può anche essere scritto sotto forma di prodotto scalare.

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Laplaciano = divergenza del gradiente di...**

Allora si ricava

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0}$$

Quest'ultima equazione è l' **equazione di Poisson** che ha validità locale e che in modo esplicito si scrive

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0}$$

### Equazione di Laplace

Se  $\mathbf{r} = 0$  allora il potenziale  $V$  deve soddisfare all' **equazione di Laplace**

$$\nabla^2 V = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono dette **funzioni armoniche** e godono della proprietà seguente:

se  $V(x,y,z)$  soddisfa l'equazione di Laplace, allora il valor medio di  $V$  sulla superficie di una sfera qualunque (anche non piccola) è uguale al valore di  $V$  calcolato nel centro della sfera.

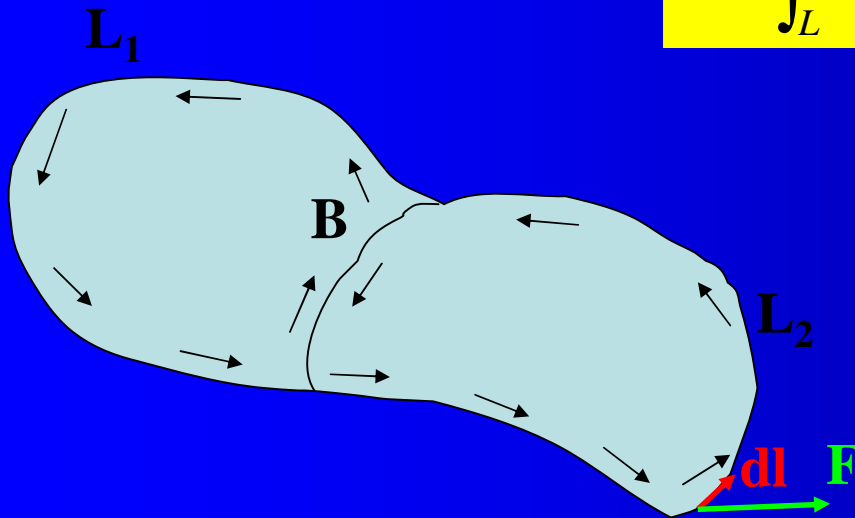
Un'altra proprietà ci dice che è impossibile realizzare un campo elettrostatico capace di mantenere una particella carica in equilibrio stabile nel vuoto.

## Rotore di una funzione vettoriale

Facciamo l'integrale di linea di un campo vettoriale  $F(x,y,z)$  lungo un percorso chiuso  $L$

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{circuitazione}$$

$d\vec{l}$  = spostamento infinitesimo



La linea di integrazione  $L$  non giace necessariamente in un piano  
Il procedimento ricalca quello seguito per la divergenza  
Suddivido  $L$  in  $L_i$  sempre più piccole

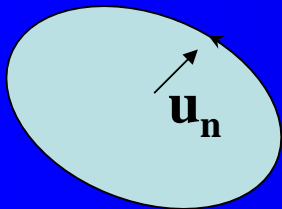
$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$$

In questo caso torna utile considerare il rapporto tra la circuitazione e l'area ad essa associata. Tuttavia l'area è un vettore e si deve decidere come orientarla.

$\mathbf{u}_n$  = versore normale alla superficie  $S_i$  /  $\mathbf{u}_n$  resti costante al tendere a zero dell'area dell'elemento che circonda un certo punto P, allora consideriamo il seguente limite

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} \text{ oppure } \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i}{S_i}$$



Il verso di  $\mathbf{u}_n$  è quello di percorrenza della linea L (vite destrorsa)

Il limite che otteniamo è uno scalare associato al punto P nel campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e alla direzione  $\mathbf{u}_n$ . La grandezza ottenuta risulta quindi un vettore

$$(\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{u}_{n_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i}{S_i}$$

## Teorema di Stokes

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N S_i \left( \frac{\Gamma_i}{S_i} \right)$$

Per  $N \rightarrow \infty$  e  $S_i \rightarrow 0$ , il termine tra parentesi tende a  $(\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}_{ni}$

$$\sum_{i=1}^N S_i \left( \frac{\Gamma_i}{S_i} \right) = \sum_{i=1}^N S_i (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{u}_{n_i} \rightarrow \int_S \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

quindi

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

**Teorema di Stokes**

In coordinate cartesiane abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

infine

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Un campo vettoriale con **rot**  $\neq 0$  ha circolazione o vorticosità.

Per il campo elettrostatico si ha sempre **rot** $\mathbf{E} = 0$  **condizione sufficiente perché il campo elettrostatico sia conservativo**

## Gauss



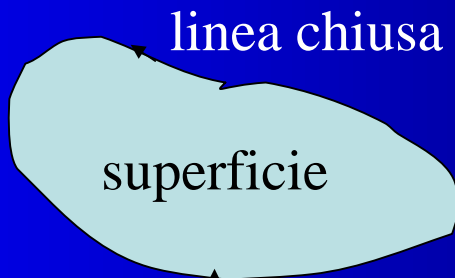
superficie che limita  
un volume

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{F} dV$$

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

## Stokes

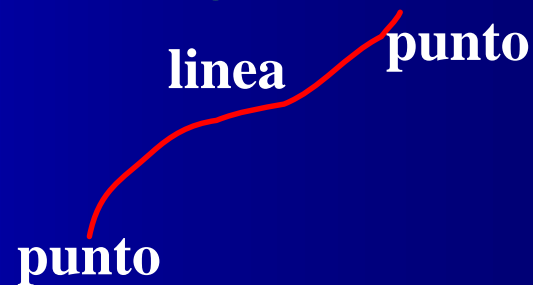


linea che limita  
una superficie

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \\ &\quad \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \\ &\quad \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{F} \end{aligned}$$

## Grad



punti che limitano  
una linea

$$V_2 - V_1 = \int_L \overrightarrow{\text{grad} V} \cdot d\vec{l}$$

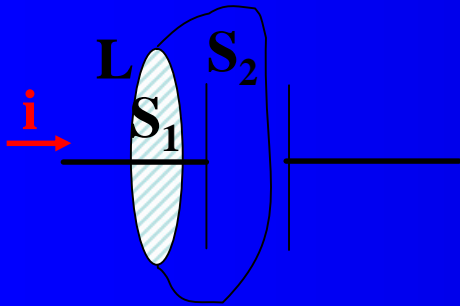
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad} V} &= \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = \\ &= \vec{\nabla} V \end{aligned}$$

## Equazioni di Maxwell

Esaminiamo la legge di Ampère

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Prendiamo un condensatore e consideriamo il flusso della densità di corrente attraverso due superfici, entrambe delimitate dalla linea di integrazione L, ma con  $S_1$  che non contiene alcuna armatura ed  $S_2$  contenente la prima armatura del condensatore. (carica)



Se consideriamo la superficie  $S_1$  delimitata dalla linea L ed applichiamo Ampère, abbiamo che la circuitazione del campo magnetico B risulta proporzionale alla corrente  $i$  che scorre nel circuito ed arriva alla prima armatura del condensatore. Se invece consideriamo  $S_2$ , delimitata da L, abbiamo in entrata la corrente  $i$ , ma non registriamo alcun flusso uscente

Per mantenere tutto consistente dobbiamo ipotizzare, ed è quanto fece Maxwell, che tra le armature del condensatore vi sia una corrente, non convenzionale, legata al variare del campo elettrico nel condensatore. A questa corrente si dà il nome di corrente di spostamento  $i_s$ . Pertanto la legge di Ampère viene riscritta e prende il nome di legge di Ampère – Maxwell

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_s)$$

$i_c$  = corrente  
concatenata

Per collegare  $i_s$  al campo elettrico partiamo dal teorema di Gauss

$$\Phi_{\vec{E}_{tot}} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}_{tot}}}{dt} = i_s$$

In termini differenziali si ha

$$\text{rot}\vec{B} = \mathbf{m}_0 \vec{j} + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mentre in termini integrali abbiamo

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mathbf{m}_0 i_c + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS$$

Riassumendo

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q_{\text{int}}}{\mathbf{e}_0}$$

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0$$

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mathbf{m}_0 i + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS$$

$$\text{rot}\vec{B} = \mathbf{m}_0 \vec{j} + \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$