Spettro elettromagnetico

Onde elettromagnetiche : luce, radioonde, raggi X, raggi γ, microonde

Differiscono per la frequenza e la lunghezza d'onda

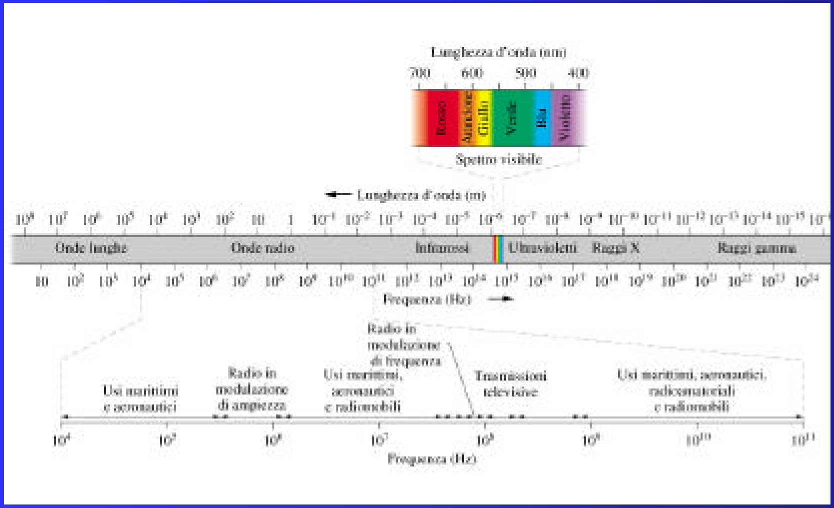
$$n = \frac{c}{l}$$

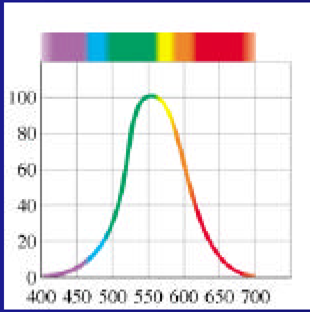
L'occhio umano è sensibile ad onde con **400 nm** < λ < **700 nm**: **luce**

λ < 400 nm **ultravioletto**

λ > 700 nm **infrarosso** (radiazione termica)

Teoricamente le lunghezze d'onda possibili sono illimitate





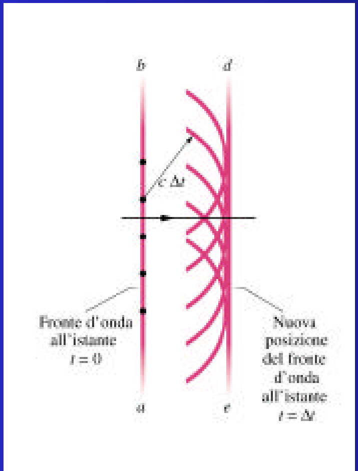
Principio di Huygens (1680)

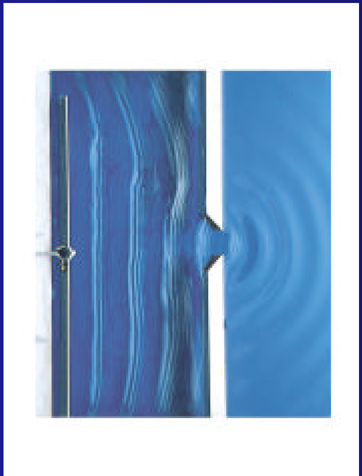
Superficie d’onda o fronte d’onda

Superficie con fase costante che passa per i punti del mezzo che sono raggiunti dall’onda in moto nello stesso istante (per un’onda piana sono piani ⊥ al vettore di propagazione)

Principio di Huygens

Ogni punto di un fronte d’onda primario funge da sorgente di onde sferiche secondarie o elementari che si propagano con velocità e frequenza uguali a quelle dell’onda primaria. Il fronte d’onda primario ad un istante successivo è l’inviluppo di queste onde secondarie.





Il principio di Huygens è **valido solo in un mezzo**. Viene rivisto verso il 1850 da Kirchhoff che lo sviluppa dal punto di vista matematico.

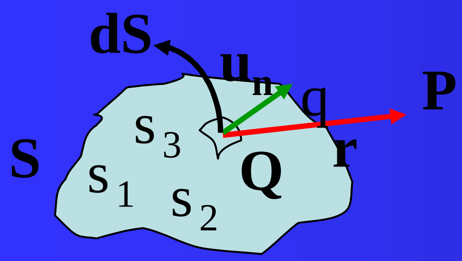
In generale si ha

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

Bisogna trovare una x**(r,t)** con le dovute **condizioni al contorno**

$$x_p(t) = \int_S g(q)\frac{f(r-vt)}{r}dS$$

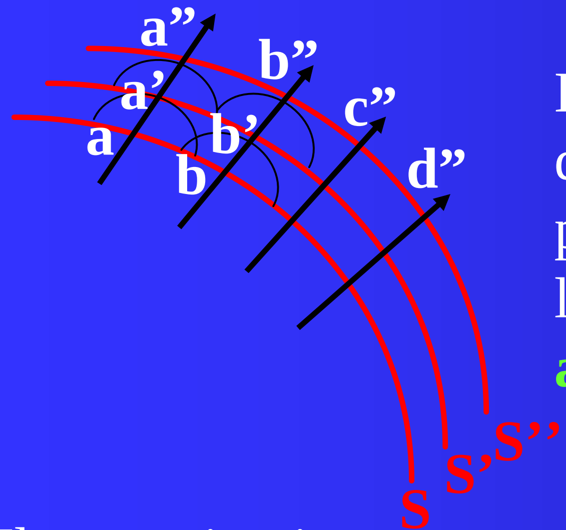
$$g(q) = \frac{1}{2}(1+\cos q) \quad \begin{cases} g_{MAX} = 1 & q = 0 \\ g_{\min} = 0 & q = p \end{cases}$$



f(Q,t): onda in ogni punto Q di S all'istante t. x_P**(t)**: perturbazione in P **f(r-vt)/(r)**: onda sferica emessa da dS nell'istante t-r/v e che arriva in P all'istante t. **g(q)**: fattore direzionale che garantisce che l'onda non si propaghi all'indietro. s_i **= sorgenti**

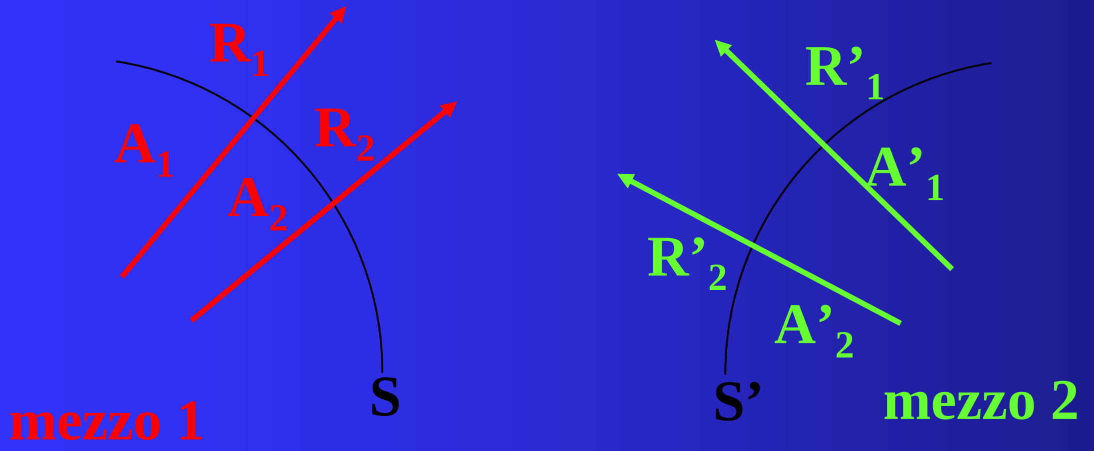
In conclusione abbiamo che ogni superficie infinitesima dS appartenente ad una **superficie chiusa S** è sorgente di onde secondarie

Teorema di Malus



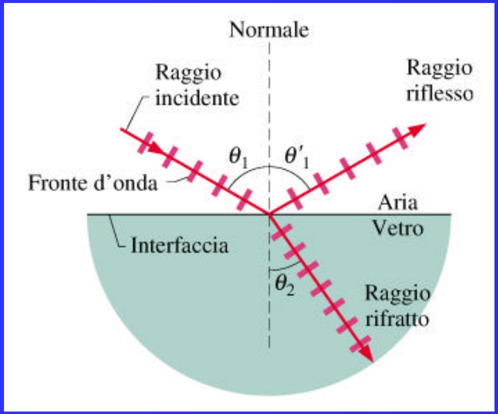
Le frecce sono ⊥ ai fronti d’onda e sono dette raggi: corrispondono alle linee di propagazione dell’onda (analogia con linee di forza e superifici equipotenziali)
a, a’,a” e b, b’, b” sono **punti corrispondenti**

Il tempo impiegato per andare da S ad S” non dipende dal raggio seguito perché in S” le onde sono in fase tra loro. **L’intervallo di tempo che separa punti corrispondenti di due superfici d’onda è lo stesso per tutte le coppie di punti corrispondenti**.
I tempi per percorrere i tratti aa”, bb”, cc” dipendono dalla velocità dell’ onda sui percorsi. Se il **mezzo è isotropo ed omogeneo**, la **distanza tra due fronti d’onda è la stessa** ovunque ⇒ **i raggi sono delle rette**.
Mezzi isotropi ed omogenei: all’interno di ciascuno i raggi sono ⊥ ai fronti d’onda



A_1 e A'_1 sono punti corrispondenti perché $R_1 \perp S$ e $R'_1 \perp S'$. Il tempo per andare da A_1 ad A'_1 è lo stesso necessario ad andare da A_2 ad A'_2.

Riflessione e rifrazione di onde piane



Considero un'onda piana che si propaga secondo **u_i**.

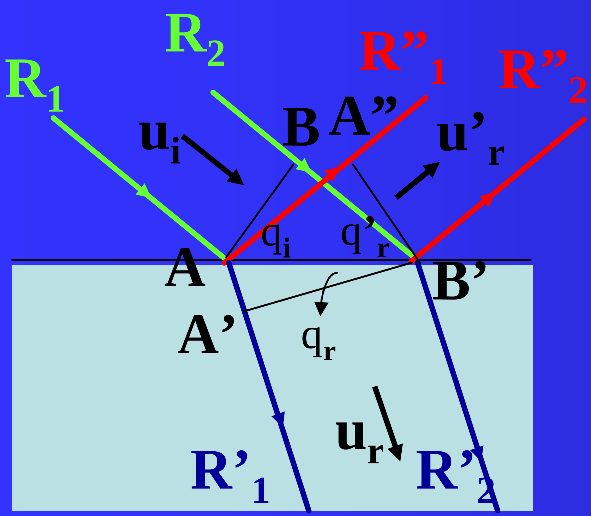
u'_r: onda riflessa

u_r: onda rifratta

1. **u_i, u_r, u'_r** giacciono nello stesso piano ⊥ alla superficie di separazione dei mezzi e contenente N normale a detta superficie
2. $q'_r = q_i$
3. **$(\sin q_i)/(\sin q_r)$ = costante = n_{21}**

n_{21}: indice di rifrazione del mezzo 2 rispetto al mezzo 1

Dimostrazione della 2^a e 3^a legge



Considero le superfici d'onda AB (incidente), A'B' (rifratta) e A"B" (riflessa)

A, A' e B, B' sono punti corrispondenti dell'onda rifratta

A, A" e B, B" sono punti corrispondenti dell'onda riflessa

Applico il teorema di Malus

Sia t il tempo necessario per andare da B a B' lungo il raggio R_2 con velocità $\mathbf{v_1}$; nello stesso tempo l'onda rifratta si è mossa lungo R'_1 da A ad A' con velocità $\mathbf{v_2}$ e l'onda riflessa lungo $R"_1$ da A ad A" con velocità $\mathbf{v_1}$

$$\overline{BB'} = v_1 t \quad \overline{AA'} = v_2 t \quad \overline{AA''} = v_1 t$$

$$1.\ \sin q_i = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{v_1 t}{\overline{AB'}} \quad 2.\ \sin q_r = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}} = \frac{v_2 t}{\overline{AB'}} \quad 3.\ \sin q_r^{'} = \frac{\overline{AA''}}{\overline{AB'}} = \frac{v_1 t}{\overline{AB'}}$$

$$1.\ +\ 3. \Rightarrow q_i = q_r^{'}$$

$$1.\ +\ 2. \Rightarrow \frac{\sin q_i}{\sin q_r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{costante}$$

$$\boxed{n_{21} = \frac{v_1}{v_2}} \qquad \boxed{n = \frac{c}{v}}$$

c = $3 \cdot 10^8$ $m \cdot s^{-1}$ per le onde e.m.

n = indice di rifrazione

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c}{v_2}\frac{v_1}{c} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} \quad \text{indice relativo}$$

$$n_1 \sin q_i = n_2 \sin q_r \quad \text{legge di Snell}$$

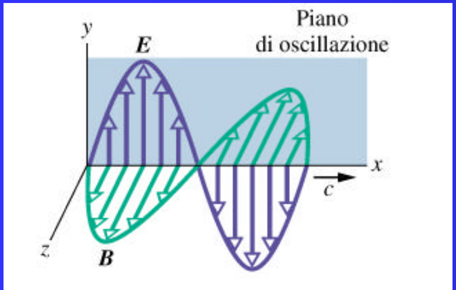
$$v_2 \lessgtr v_1 \Rightarrow n_2 \gtrless n_1 \Rightarrow n_{21} \gtrless 1 \Rightarrow q_i \gtrless q_r$$

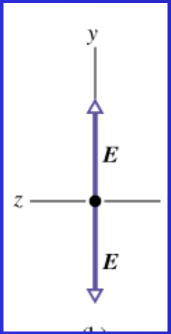
Se **n_{21} < 1** si ha un caso particolare quando

$$\sin q_i = \sin q_c = n_{21} \Rightarrow \sin q_r = 1 \Rightarrow q_r = \frac{p}{2} \qquad q_c = \text{angolo limite}$$

Polarizzazione

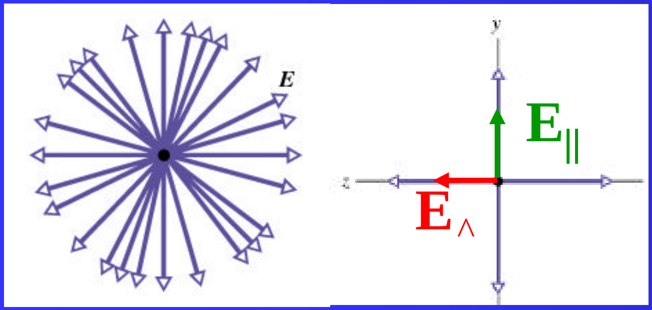
Polarizzazione dll’onda: **direzione di oscillazione del campo elettrico**





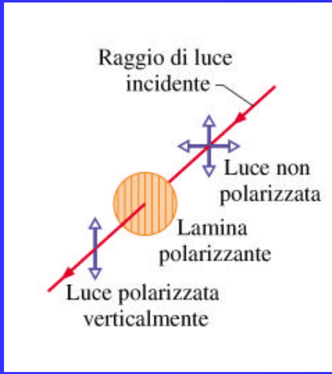
Polarizzazione piana

Le onde emesse da una lampadina non sono polarizzate, le onde radio sono polarizzate



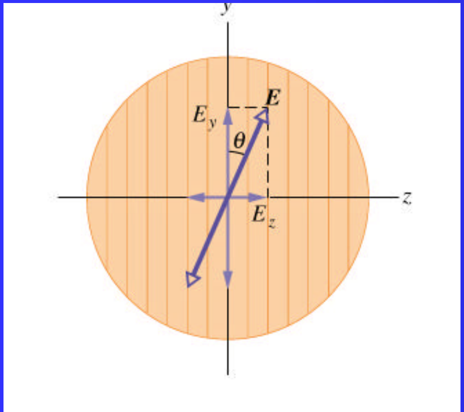
Onda non polarizzata: ogni direzione è equiprobabile, scompongo ogni vettore E in una componente || all’asse y (**$E_{||}$**) ed una ⊥ (**$E_{\wedge}$**) e le sommo, **ottengo** allora **due onde polarizzate su due piani tra di loro ^**.

Polaroid: lamina polarizzante con un direzione di polarizzazione lungo cui le componenti del campo elettrico non vengono assorbite



Le componenti di $\mathbf{E}_{||}$ alla dir. di polarizzazione vengono **trasmesse** attraverso la lamina, mentre le componenti $\mathbf{E}_{\wedge}$ vengono **assorbite**
Vediamo ora quanto vale l'intensità della luce trasmessa dalla lamina

Prendiamo l'asse di polarizzazione || all'asse delle y, dopo la lamina avrò solo componenti di **E** || y; due casi:



1. **L'onda iniziale non è polarizzata**.
2. Passerà solo metà dell'intensità ⇒ $\mathbf{I = ½I_0}$ (**regola di dimezzamento**)

2. **Onda già polarizzata**

$$E_y \text{ trasmessa} \qquad E_z \text{ assorbita}$$

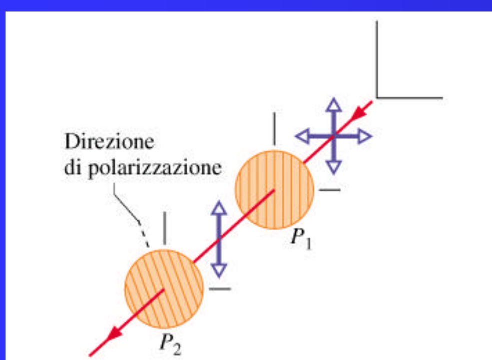
$$E_y = E\cos q \qquad I = \frac{1}{cm_0}\left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2$$

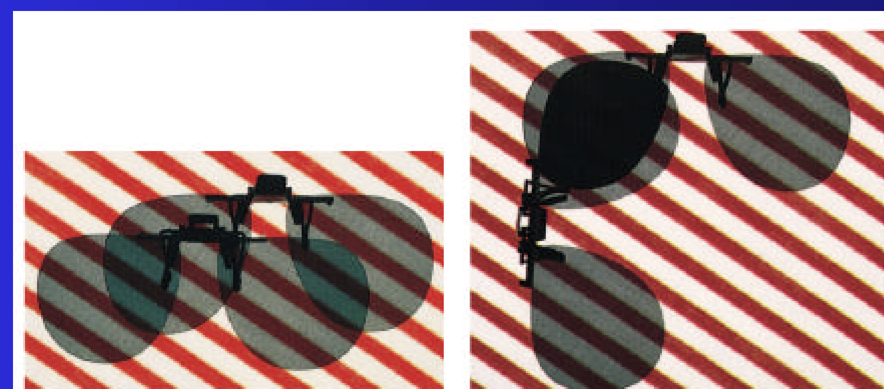
$$\Rightarrow I \propto E_y^2 \qquad I_0 \propto E^2$$

onda emergente   onda originaria

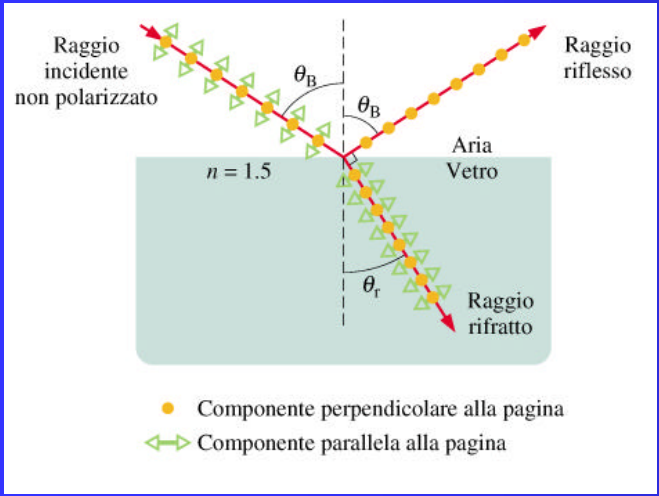
$$I = I_0 \cos^2 q \qquad \text{regola del } \cos^2 \text{ o legge di Malus}$$

I diviene **massima** quando l'onda originaria è polarizzata || alla direzione di polarizzazione della lamina (**q = 0 o q = 180º**). **I = 0 per q = 90º**.
Posso mettere insieme due lamine, la prima si chiama polarizzatore, la seconda analizzatore.





Polarizzazione per riflessione



Consideriamo un raggio di luce **non polarizzata** che incide su di una superficie di vetro (da aria a vetro). **E** viene diviso in $\mathbf{E}_{||}$ ed $\mathbf{E}_{\wedge}$, rispetto al piano di incidenza.

$\mathbf{I}_{\mathbf{E}||} = \mathbf{I}_{\mathbf{E}\wedge}$

Nel raggio riflesso entrambe le componenti $\mathbf{E}_{||}$ ed $\mathbf{E}_{\wedge}$ sono in genere presenti e la luce risulta pertanto parzialmente polarizzata.

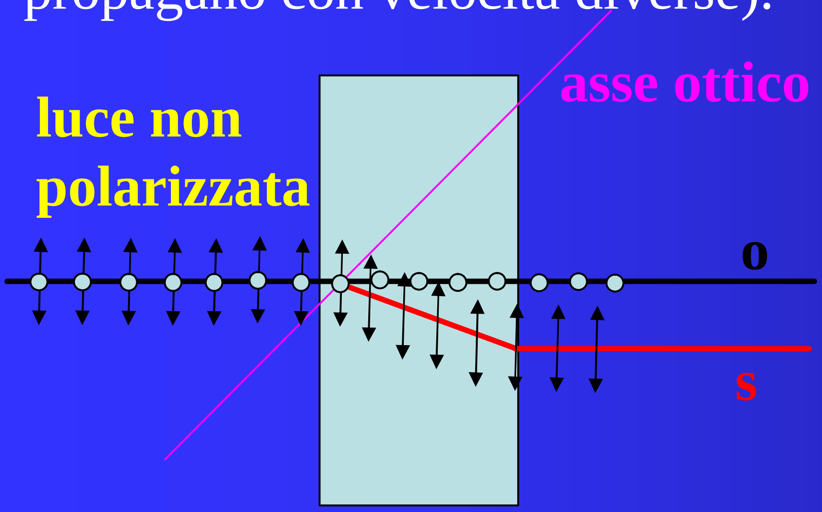
Tuttavia nel caso in cui l'angolo di incidenza sia tale che $q_i + q_r = 90_o$, ovvero $q_i = q_B$ = **angolo di Brewster**, la **luce riflessa** risulta **polarizzata ∧ al piano di incidenza**. L'onda rifratta porta con sé tutta la componente $\mathbf{E}_{||}$ e parte della $\mathbf{E}_{\wedge}$.

$$n_1 \sin q_B = n_2 \sin q_r \Rightarrow n_1 \sin q_B = n_2 \sin\left(90^o - q_B\right) = n_2 \cos q_B$$

$$q_B = arctg\,\frac{n_2}{n_1} \qquad \text{angolo di Brewster}$$

Birifrangenza

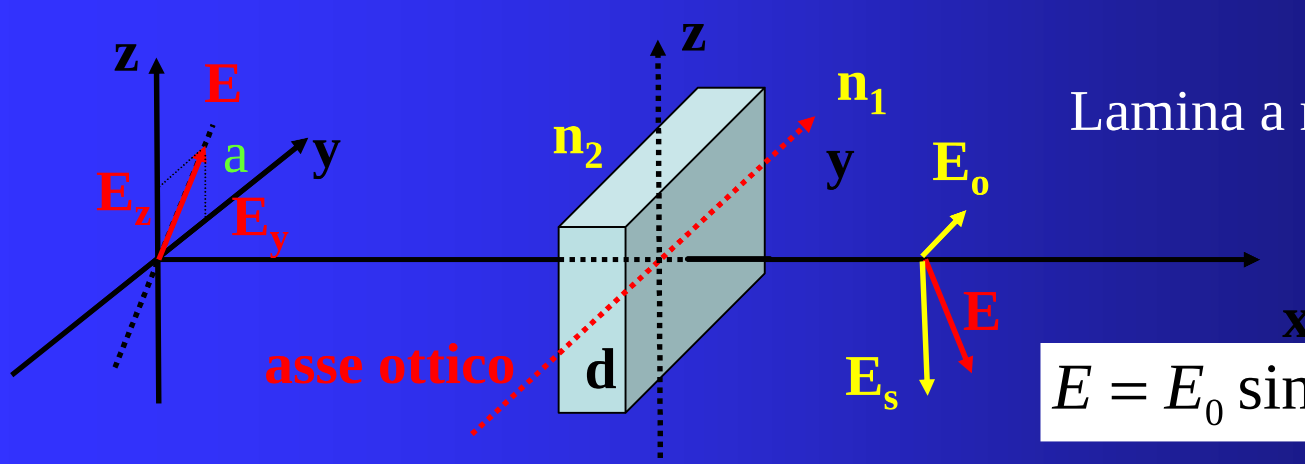
Prendiamo un materiale anisotropo: la radiazione e.m. si propaga con **velocità diverse a seconda della direzione**. Solo lungo l'asse ottico la luce si propaga senza essere separata in **raggio ordinario** e **raggio straordinario** (o ed s sono **polarizzati in direzioni** ^ tra di loro e si propagano con velocità diverse).



Fascio sottile di luce incide su di una lamina birifrangente ⊥ all'asse ottico ⇒ I due raggi si propagano nella stessa direzione con v diverse. Il numero di lunghezze d'onda dentro la lamina dipende dalla velocità di propagazione ($\lambda = v/\nu$) ⇒ i percorsi di **s** ed **o** sono diversi ⇒ **s** ed **o** sono sfasati

Lamine a ½ onda e a ¼ d'onda

Consideriamo un'onda polarizzata linearmente che incide su di una lamina sottile di un materiale uniassico (un solo asse ottico), esaminiamo la differenza di fase tra le onde ordinaria e straordinaria e lo stato di polarizzazione dell'onda uscente ($\alpha = 45^o$).



Lamina a mezz'onda

$$E = E_0 \sin(wt - kx)$$

Il cristallo ha l'asse ottico (indice n_1) parallelo all'asse y e perpendicolare all'asse di propagazione dell'onda. L'asse di polarizzazione del raggio ordinario (indice n_2) coincide con l'asse z.

Qunado si propaga nel cristallo l'onda incidente si separa in 2 onde con campi elettrici rispettivamente lungo l'asse y e lungo l'asse z, queste 2 onde componenti corrispondono **all'onda straordinaria e all'ordinaria**. I campi elettrici delle due onde valgono

$$E_y = E_{0y} \sin(wt - kx) \qquad E_z = E_{0z} \sin(wt - kx)$$

$$E_{0y} = E_0 \cos a \qquad E_{0z} = E_0 \sin a$$

La differenza di fase risulta ($v_1=c/n_1$, $v_2=c/n_2$) dalla differenza dei vettori d'onda $k_1=\omega/v_1=\omega n_1/c=kn_1$ e $k_2=\omega/v_2=\omega n_2/c=kn_2$ con $k=\omega/c$

$$f = (k_1 - k_2)d = k(n_1 - n_2)d = \frac{2p(n_1 - n_2)d}{l}$$

Dopo aver attraversato la lamina le onde si ricompongono in una sola onda che, a causa della differenza di fase sarà in generale polarizzata ellitticamente. Gli assi dell'ellisse saranno paralleli a y e z se f **è un multiplo dispari di** p/2, ovvero

$$(n_1 - n_2)d = \text{intero dispari}\ \frac{l}{4}$$

Se f **è multiplo intero di** p, si ha invece

$$\left(n_1 - n_2\right)d = \text{intero}\,\frac{l}{2}$$

E l’onda trasmessa sarà polarizzata linearmente; se l’intero è pari, l’onda trasmessa sarà polarizzata nello stesso piano dell’onda incidente, se l’intero è dispari, l’onda è polarizzata in un piano simmetrico rispetto al piano (xz); se l’angolo iniziale α è 45°, allora i due piani saranno tra di loro perpendicolari e la luce sarà polarizzata circolarmente.

Le lamine corrispondenti a queste due ultime eventualità sono chiamate lamine a quarto d’onda e lamine a mezz’onda.

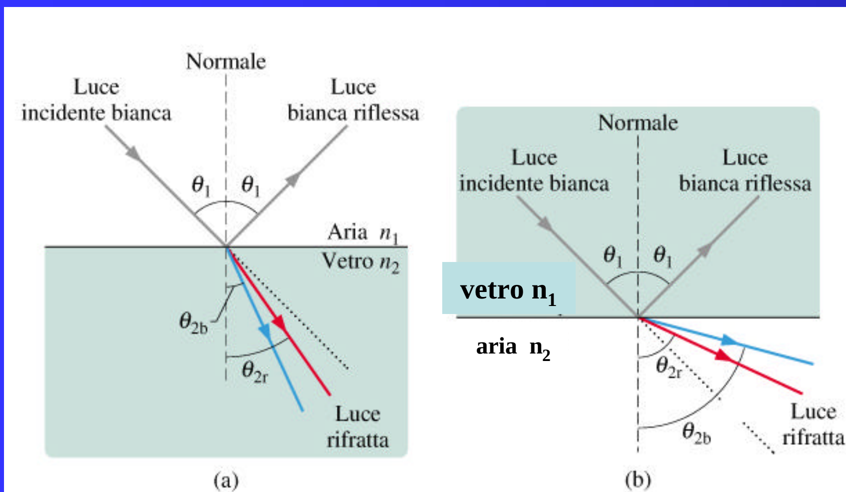
Il sistema funziona anche all’inverso, luce polarizzata ellitticamente che attraversa una lamina a quarto d’onda ne esce polarizzata in un piano.

I campi elettrici dopo aver attraversato lo spessore d valgono

$$E_y = E_{0y}\sin\left(wt - k_1 d\right) \text{ e } E_z = E_{0z}\sin\left(wt - k_2 d\right)$$

Dispersione cromatica

L'indice di rifrazione **n dipende dalla lunghezza d'onda** l quindi la luc con λ maggiore viene deviata di più in seguito alla rifrazione ⇒ **dispersione cromatica**.



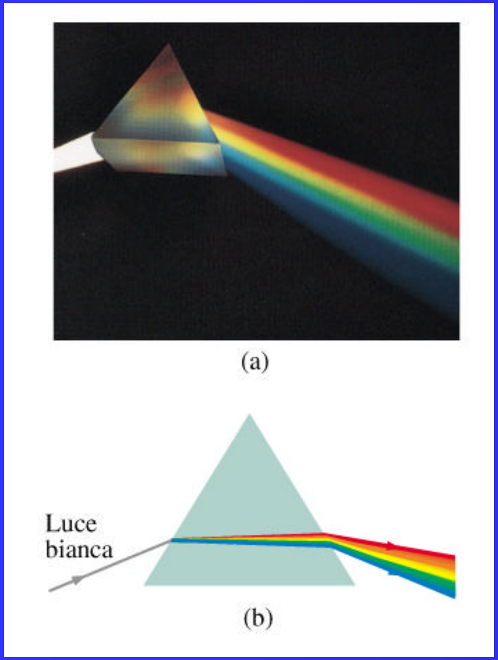
$$n = \frac{c}{v} \qquad l = \frac{c}{n} \quad \text{nel vuoto}$$

$$l = \frac{v}{n} \quad \text{in un mezzo} \qquad v = l n$$

$$\Rightarrow n = \frac{c}{l n}$$

La luce blu viene deflessa maggiormente della rossa nel passaggio da aria a vetro, quindi $\theta_{r,blu} < \theta_{r,rosso}$.

Altri esempi di dispersione della luce sono il **prisma di vetro** e l'**arcobaleno**.



Le gocce che inviano colori separati formano un angolo di **42º** rispetto all'asse direttamente opposto al sole.