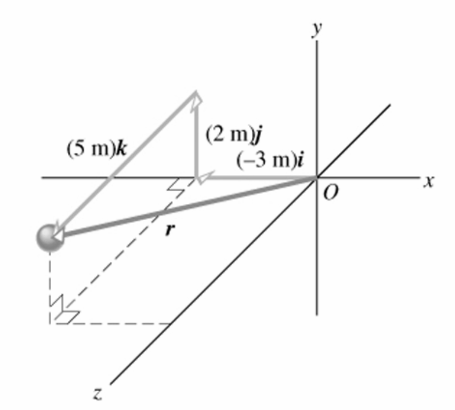
Moto in due e tre dimensioni

Vettore posizione r è il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento scelto, con il punto in cui si trova l'oggetto il cui moto vogliamo studiare.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = (-3m)\vec{i} + (2m)\vec{j} + (5m)\vec{k}$$



r è funzione del tempo, **r**(t), e, in genere, varia ad ogni istante, quindi all'istante t_1 avremo $\mathbf{r_1}$ e all'istante t_2 avremo $\mathbf{r_2}$; lo **spostamento** dell'oggetto sarà allora

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \Delta\vec{r} = \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$

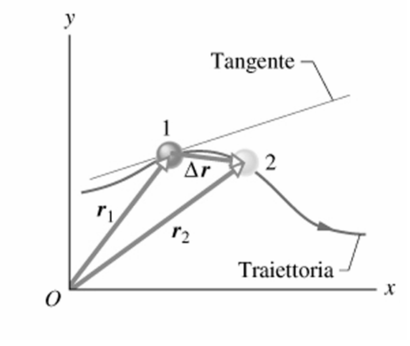
$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} +$$

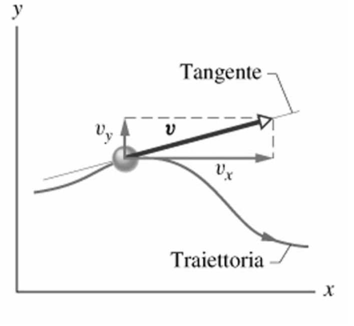
Per quanto riguarda la velocità avremo

$$\bar{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ **Velocità vettoriale media**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ **Velocità vettoriale istantanea**

La **velocità vettoriale istantanea** è un vettore **parallelo** al vettore **spostamento infinitesimo dr**, cioé ha sempre la **direzione della tangente alla traiettoria**.





Considerando ora le componenti in un sistema cartesiano ortogonale, si ha

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\text{prendendo } v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \text{si ottiene}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

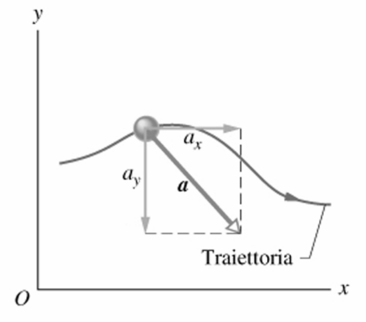
Infine per l'accelerazione avremo

$$\overline{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$ **Accelerazione vettoriale media**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$ **Accelerazione vettoriale istantanea**

Va notato che per avere un'accelerazione è sufficiente avere una **variazione del vettore velocità** $\rightarrow$ una variazione della direzione del vettore velocità dà origine ad un'accelerazione (moto circolare uniforme)

Il **vettore accelerazione** è **parallelo alla variazione istantanea di velocità ed è diretta sempre verso la concavità della curva**, non è, in generale, né tangente, né ⊥ alla traiettoria.



Utilizzando le componenti cartesiane, si ha

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

prendendo $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$, si ottiene

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Equazioni del moto

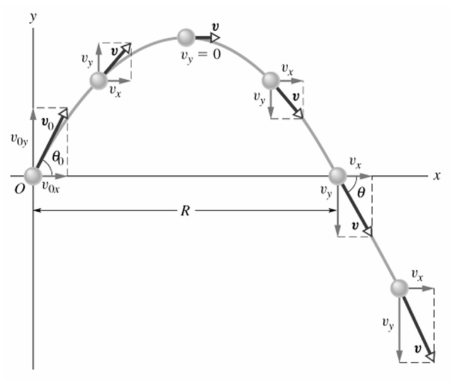
Analogamente a quanto fatto per il moto in una dimensione si ricava (per accelerazione costante):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \qquad (1)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \qquad (2)$$

Moto dei proiettili

Particella che si muove in due dimensioni, in caduta libera con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ e accelerazione di gravità $\mathbf{g}$ costante diretta verso il basso.



g

$$\vec{v}_0 = v_{0_x}\vec{i} + v_{0_y}\vec{j}$$

$$v_{0_x} = v_0 \cos q_0, v_{0_y} = v_0 \sin q_0$$

Il **vettore spostamento r e il vettore spostamento v variano istante per istante**, mentre il vettore **accelerazione g è costante**. Il moto in direzione orizzontale non è soggetto ad accelerazioni. Possiamo **scomporre il moto in due moti indipendenti**:

direzione x ® moto uniforme

direzione y ® moto uniformemente accelerato

Moto orizzontale

$a_x = 0$ ® $\mathbf{v_x}$ resta **costante nel tempo** (3)

$x = x_0 + v_{0x}(t-t_0) = x_0 + (v_0\cos\theta_0)(t - t_0)$

Moto verticale

$a_y = -g$

$v_y = v_{0y} - g(t-t_0) = v_0\sin\theta_0 - g(t-t_0)$ (4)

$y = y_0 + v_{0y}(t-t_0) - 1/2g(t-t_0)^2$

$y = y_0 + (v_0\sin\theta_0)(t-t_0) - 1/2g(t-t_0)^2$

Equazione della traiettoria

Eliminiamo t dalle (3) e (4) e ricaviamo y(x), ovvero la traiettoria (per semplicità poniamo $t_0 = 0$)

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} \overset{\substack{x_0 = 0 \\ y_0 = 0}}{\Rightarrow} y = (tg\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

La **traiettoria** risulta una **parabola** come già osservato. Vediamo ora la **gittata**, ovvero il punto di impatto con il suolo.

$$x - x_0 = R \Rightarrow R = (v_0 \cos\theta_0)t$$

$$y - y_0 = 0 \Rightarrow 0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

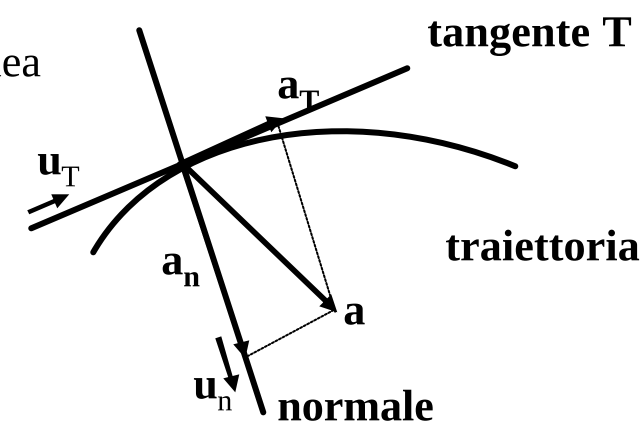
$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0 \cos\theta_0, \sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0 \cos\theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)$$

R è massima per θ_0 = 45°

Accelerazione centripeta e tangenziale

Consideriamo un oggetto puntiforme in moto lungo una traiettoria curvilinea qualunque



a può essere scomposto secondo le componenti **tangente e normale alla traiettoria**

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n$$

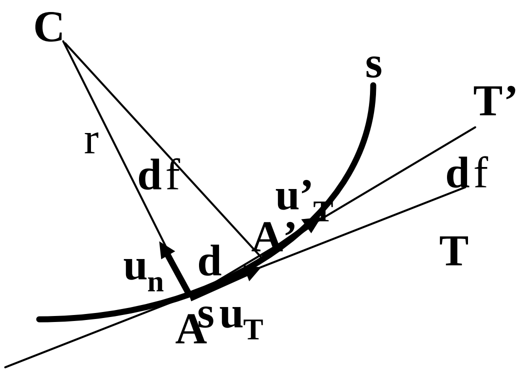
Cerchiamo ora di trovare delle espressioni per $\mathbf{a}_\mathbf{T}$ e $\mathbf{a}_\mathbf{n}$ in cui compaiano gli altri parametri del moto (ad es. velocità e raggio di curvatura).

L'accelerazione è definita come la derivata della velocità istantanea vettoriale fatta rispetto al tempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v\vec{u}_T\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \qquad (5)$$

Se il moto è **rettilineo**, il **versore $\mathbf{u_T}$**, che individua la retta tangente alla traiettoria in ogni istante, **è costante in modulo direzione e verso**, se invece il moto è **curvilineo** il versore $\mathbf{u_T}$ **non è più costante in direzione** e pertanto la sua derivata rispetto al tempo è diversa da 0. Dobbiamo pertanto trovare un'espressione per la derivata del versore $\mathbf{u_T}$, e, più in generale per la derivata di un generico versore **u**.

Derivata di un versore



Direzione di d**u**$_T$

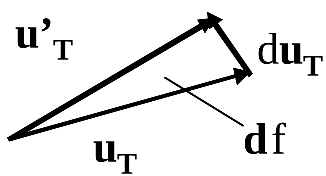
$$d\vec{u}_T = \vec{u}_T^{\,'} - \vec{u}_T \text{ è parallelo a } \vec{u}_n$$

$$\vec{u}_T \bullet \vec{u}_T = 1 \text{ e } \frac{d}{dt}\left(\vec{u}_T \bullet \vec{u}_T\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{u}_T \bullet \vec{u}_T\right) = \frac{d}{dt}\vec{u}_T \bullet \vec{u}_T + \vec{u}_T \bullet \frac{d}{dt}\vec{u}_T = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_T \bullet \vec{u}_T = \vec{u}_T \bullet \frac{d}{dt}\vec{u}_T = 0 \Rightarrow \vec{u}_T \perp \frac{d}{dt}\vec{u}_T$$

Modulo di d**u**$_T$



$$df = \frac{\left|d\vec{u}_T\right|}{\left|\vec{u}_T\right|}, \text{ ma } \left|\vec{u}_T\right| = 1$$

$$\Rightarrow df = \left|d\vec{u}_T\right|$$

$$d\vec{u}_T = df\ \vec{u}_n$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{u}_n$$

La derivata di un versore è un **vettore di modulo (d**f/**dt) e di direzione ⊥ a quella del versore stesso**; la derivata di un versore **<u>non è un versore</u>**
Quando deriviamo un vettore dobbiamo sempre controllare se il versore che ne individua la direzione è costante nel tempo oppure varia.

Torniamo ora all'accelerazione del moto curvilineo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v\vec{u}_T\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \qquad (6)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{df}{ds};\ v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = r\,df \Rightarrow \frac{df}{ds} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{v}{r}$$

Infine

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{r}\vec{u}_n$$

Quindi la (6) diventa

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$

parte tangenziale
accelerazione tangenziale

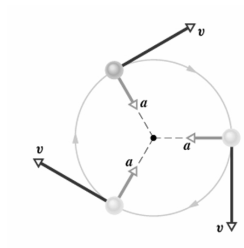
$\vec{a}_T$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

parte normale
accelerazione normale

$\vec{a}_n$

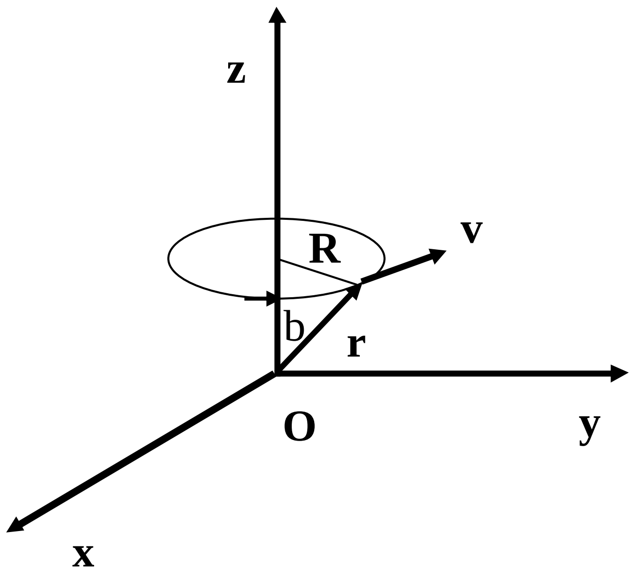
$$a_n = \frac{v^2}{r}$$



Se il moto è **curvilineo con velocità costante in modulo** → $\mathbf{a_T} = 0$
Se il moto è **rettilineo la direzione di v ($\mathbf{u_T}$) non cambia** → $\mathbf{a_n} = 0$

Moto circolare

Consideriamo un oggetto puntiforme che si muove lungo una **traiettoria circolare**, cioé ruota attorno ad un **asse fisso** passante per il centro della circonferenza (**asse di rotazione**). Possiamo descrivere il moto del nostro oggetto facendo ricorso alle **variabili angolari** (q è l'angolo al centro della circonferenza ed **s** è l'arco di circonferenza).



v è $\perp$ ad R e **r**

R = **r**sinβ

s = Rθ

θ va misurato in **radianti**

θ quantità **adimensionale**

1 angolo giro = 360º = 2πR/R = 2π rad

1 rad = 57.3º = 0.159 angoli giro

Spostamento angolare

$$\Delta q = q_2 - q_1$$

Velocità angolare

$$\overline{w} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Velocità angolare media

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Velocità angolare istantanea

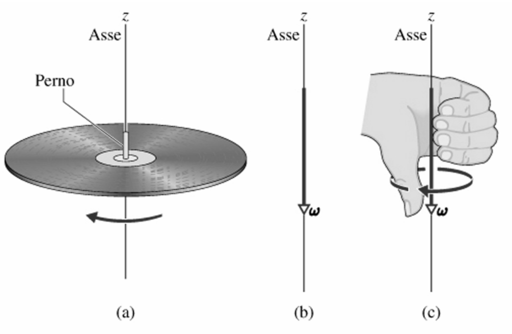
La velocità angolare si misura in **rad/s** o **s^{-1}**
Moto in senso **antiorario** → w **positiva**
Moto in senso **orario** → w **negativa**

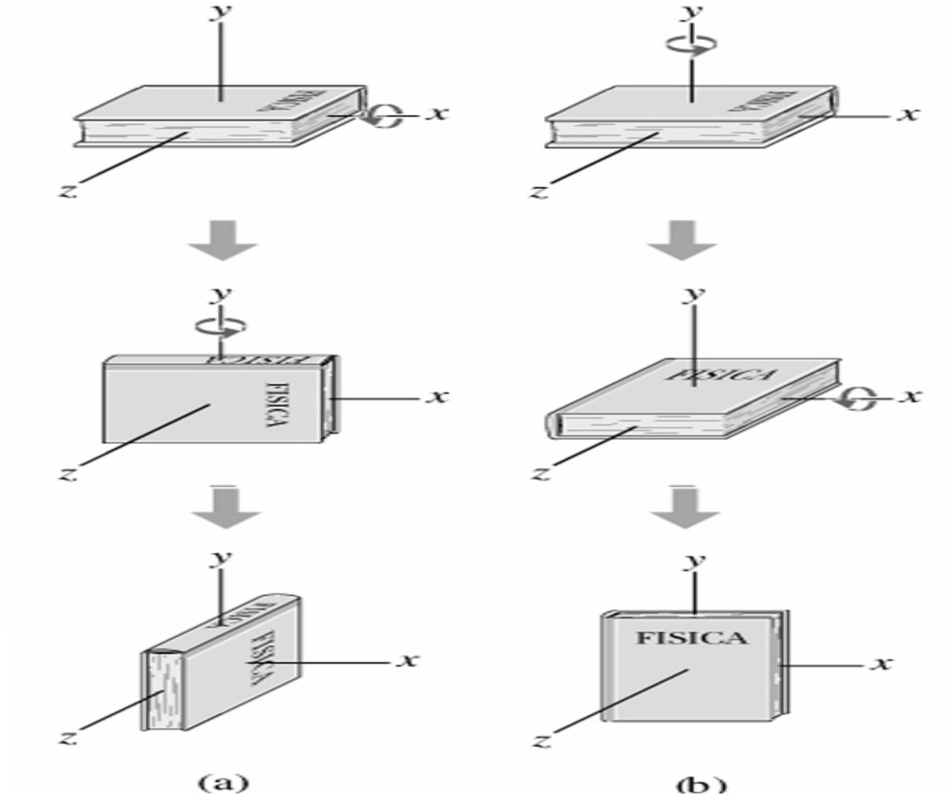
Accelerazione angolare

$$\overline{a} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$ **Accelerazione angolare media**

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$$ **Accelerazione angolare istantanea**

L'accelerazione angolare si misura in **rad/s^{-2}** o **s^{-2}**
Le grandezze angolari quali **velocità ed accelerazione** risultano essere grandezze **vettoriali**, mentre lo **spostamento angolare** è una grandezza **scalare**.




y
x
z
FISICA
(a)
(b)

In analogia a quanto ricavato per il moto rettilineo uniformemente accelerato, nel caso di moto circolare con accelerazione angolare costante si ricavano le seguenti **equazioni del moto angolare uniformemente accelerato**

$$w = w_0 + a\left(t - t_0\right)$$

$$q = q_0 + w_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}a\left(t - t_0\right)^2$$

$$w^2 = w_0^2 + 2a\left(q - q_0\right)$$

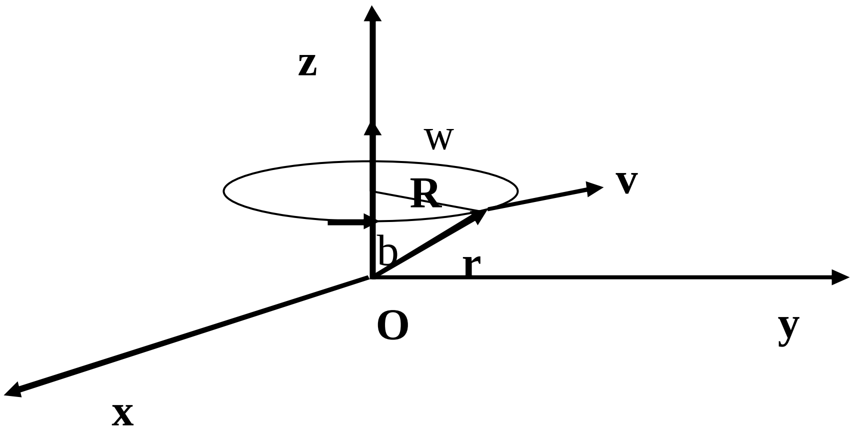
Relazione tra variabili lineari e variabili angolari

$$s = Rq$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(Rq\right)}{dt} = R\frac{dq}{dt} = wR$$

$$R = r\sin b \;, v = w\, r\sin b$$

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$$



Se w **è costante in modulo** → il moto è **periodico**

$$T = \frac{2pR}{v}\,,\, u = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{w}{2p}$$

T è il periodo del moto e n la sua **frequenza**

Vediamo ora l'accelerazione angolare

$$a_T = \frac{dv}{dt} \text{ e } a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(wR)}{dt} = R\frac{dw}{dt}$$
$$a_T = Ra$$

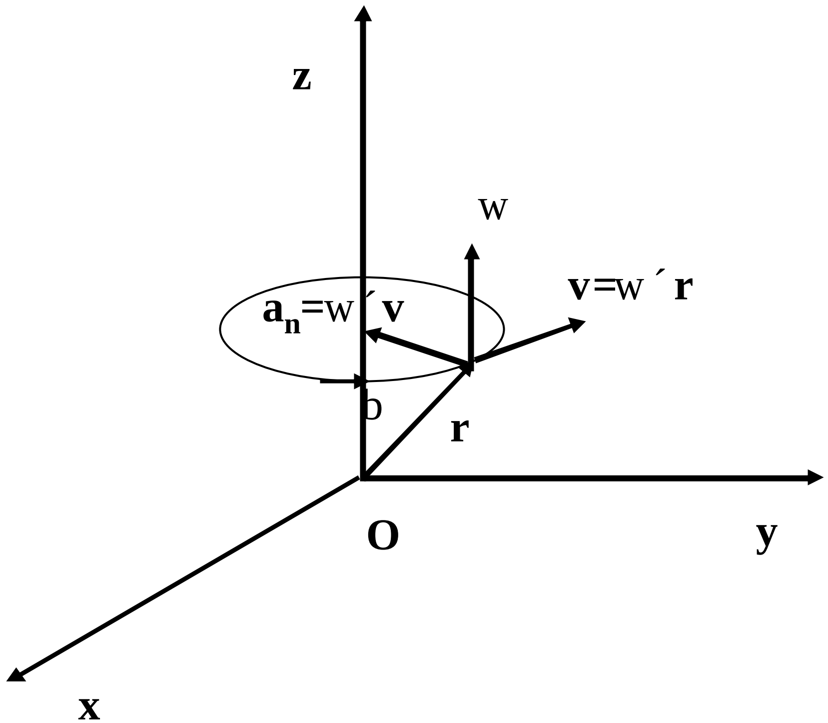
$$a_n = \frac{v^2}{R} = w^2 R$$

Se a = 0 ® $\mathbf{a_T}$ = 0, ma $\mathbf{a_n}$ ¹ 0 e w è costante

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{w}\times\vec{r})}{dt} = \vec{w}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w}\times\vec{v}$$
$$\vec{a} = \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

In generale

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{w}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt}\times\vec{r} + \vec{w}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{a} = \vec{a}\times\vec{r} + \vec{w}\times\vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_n$$



z
w
v=w ´ r
a
n
=w ´ v
b
r
O
y
x