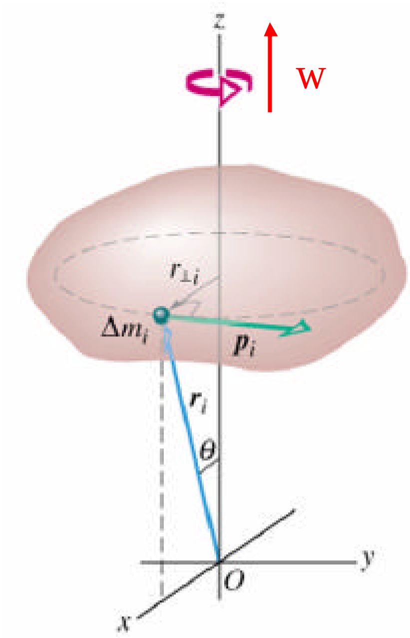
Dinamica del corpo rigido

Un **corpo rigido** è un oggetto in cui la distanza tra una coppia qualunque di suoi punti non varia. Quindi tutti i punti di un corpo rigido si muovono lungo traiettorie parallele.



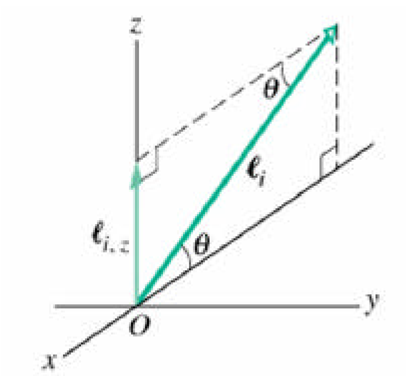
Consideriamo un corpo rigido qualunque ed esminiamone il moto di **rotazione attorno all'asse fisso z**.
Consideriamo innanzitutto un **elemento infinitesimo di massa dm$_i$** del corpo e determiniamo il suo momento angolare rispetto all'asse di rotazione z. Abbiamo

$$\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{w} \text{ e } \left|\vec{v}_i\right| = w r_i \sin J_i$$

$$\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \text{ e } \left|\vec{\ell}_i\right| = dm_i r_i^2 \sin J_i w$$

Volendo ora valutare il **momento angolare totale**, dovremmo sommare su tutti gli elementi dm_i che compongono il corpo; ognuno di essi avrà un $\boldsymbol{l_i}$ con **componente costante lungo l'asse di rotazione z** e **componenti variabili sul piano (xy) ortogonale all'asse z**. Di conseguenza possiamo dire che solo la **componente di L parallela all'asse di rotazione z resta costante nel moto** e siamo pertanto autorizzati a considerare solo le quantità scalari l_{iz}.

$$\ell_{i_z} = dm_i w r_i^2 \sin J_i \cos\left(\frac{p}{2} - J_i\right) = dm_i w r_i^2 \sin^2 J_i$$



Sommando su tutti gli elementi mi del corpo otteniamo

$$L_z = \sum_i \left(dm_i r_i^2 \sin^2 J_i\right) w = \sum_i \left(dm_i R_i^2\right) w$$

Vediamo che L_z **dipende** dalla **velocità angolare** del corpo e da un **termine, caratteristico del corpo** stesso, che **tiene conto della distribuzione della sua massa rispetto all'asse di rotazione**.

Questo termine prende il nome di **momento d'inerzia** del corpo **rispetto all'asse di rotazione z**, è una quantità **scalare** e si indica con I_z.

$$I_z = \sum_i dm_i R_i^2 \Rightarrow I_z = \int R^2 dm \text{ per un corpo continuo}$$

Ritornando ora al momento angolare, troviamo che

$$L_z = I_z w$$

La relazione generale trovata è una **relazione scalare**. Essa ha anche **validità vettoriale se** la rotazione del corpo rigido avviene attorno ad uno degli **assi principali d'inerzia del corpo**, ovvero se il **vettore L è parallello all'asse di rotazione**.

Si può dimostrare che **ogni corpo rigido possiede almeno tre assi principali d'inerzia**, quindi ha almeno **tre possibilità di ruotare** mantenendo **L parallelo ad** w. In questi casi si ottiene

$$\vec{L} = I_z \vec{w}$$

Se **L non è parallelo ad** w, solo L_z **si conserva nel tempo** mentre **la componente di L nel piano (xy) varia**. Abbiamo visto che ogni variazione di L è dovuta alla presenza di un momento di forza esterna diverso da 0, quindi in questo caso avremo un t **nel piano (xy)**.

A questo punto riesaminiamo il principio di conservazione del momento angolare ricordando che l'equazione fondamentale per la descrizione del moto rotatorio di un corpo rigido in termini di momento angolare è

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{t}_{ext}}$$

con **L** e t calcolati rispetto allo stesso polo.

Possiamo distinguere **tre** diversi casi

1. **Corpo rigido che ruota attorno ad un asse principale d'inerzia con un punto fisso in un sistema inerziale**

$$\vec{L} = I\vec{w} \text{ e } \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(I\vec{w}\right)}{dt} = \vec{t}_{ext}$$

Se l'asse è fisso rispetto al corpo rigido

$$I\,\frac{d\vec{w}}{dt} = I\vec{a} = \vec{t}_{ext}$$

Allora si ha

$$\vec{t}_{ext} = 0 \Rightarrow I\vec{w} = \text{costante} \Rightarrow I, \vec{w} \text{ sono entrambe costanti}$$

Un corpo rigido che ruota attorno ad un asse principale d'inerzia con un punto fisso in un sistema inerziale, si muove con w **costante quando i momenti delle forze esterne sono nulli.**

2. **Corpo rigido che ruota attorno ad un asse che non è principale d'inerzia con un punto fisso in un sistema inerziale**

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} = \tau_z \text{ non è più vettoriale}$$

$$\frac{dL_\perp}{dt} = \tau_\perp$$

La seconda equazione corrisponde alla forza centripeta, infatti $\tau_\perp$ determina il moto del corpo

3. **Corpo rigido che ruota attorno ad un asse che non è principale d'inerzia e non c'è un punto fisso in un sistema inerziale per l'asse di rotazione**

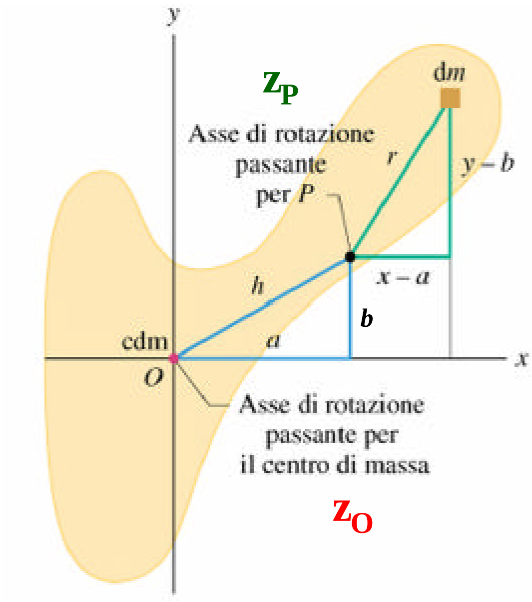
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} \text{ non è più applicabile}$$

Bisogna allora risolvere il problema nel **sistema del CM**

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}\,'_{ext}$$

Momento d'inerzia

Abbiamo visto che il momento d'inerzia di un corpo rigido dipende dall'asse a cui il momento è riferito. Vediamo se è possibile collegare un momento d'inerzia qualunque ad un momento d'inerzia facilmente ricavabile



Dobbiamo calcolare I rispetto ad un asse z_P passante per P e $\perp$ al piano del foglio. Consideriamo anche un secondo asse z_O passante per il CM del corpo (O) e || al primo asse.

$$I_{z_P} = \int r^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm =$$
$$= \int \left(x^2 + y^2\right) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int \left(a^2 + b^2\right) dm =$$
$$= \int \left(x^2 + y^2\right) dm + \int \left(a^2 + b^2\right) dm$$

Nell'ultimo passaggio si è ricorsi alla proprietà del centro di massa $\sum m_i x'_i = 0$

Infine

$$I_{z_P} = I_{z_O} + Mh^2$$

Il risultato ora ottenuto, noto come **Teorema di Steiner** o **degli assi paralleli**, ci dice che il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse qualunque è sempre uguale alla somma del momento d'inerzia del corpo stesso, calcolato rispetto ad un asse parallelo a quello dato e passante per il CM (I_{zO}), e di un termine in cui compare la massa del corpo e la distanza fra i due assi al quadrato (Mh^2).
Come conseguenza si ha che **I_{zO} è sempre minore di un qualunque altro momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse parallelo a z_O**.

Energia cinetica di rotazione

Consideriamo un **corpo che ruota attorno ad un asse z con velocità angolare** ω e non trasla

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i R_i^2 \right) \omega^2 \Rightarrow E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

La relazione trovata ci dà **l'energia cinetica di rotazione** del corpo rigido; è una relazione **sempre valida**, anche quando la rotazione avviene attorno ad un asse che non è principale d'inerzia, in quanto **$v_i = \omega R_i$ vale sempre**.

Se la **rotazione** avviene attorno ad un **asse principale d'inerzia**, otteniamo

$$E_K = \frac{L^2}{2I}$$

Consideriamo ora un **corpo rigido che ruota e trasla** e utilizziamo il teorema di König per l'energia cinetica

$$E_K = E_K^{'} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$E_K^{'} = \frac{1}{2}I^{'}w^2$ energia cinetica di rotazione rispetto al CM

$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ energia cinetica di traslazione del CM rispetto al lab.

Otteniamo così

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}I^{'}w^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2}$$

Consideriamo ora **l'energia potenziale** e **l'energia meccanica** del corpo rigido. La prima osservazione che facciamo è che l'energia potenziale interna del corpo (**E_p^{int}**) **dipende dalle distanze relative** tra le parti del corpo rigido, **distanze che**, per definizione, **rimangono costanti**, quindi

$$E_{p_{\text{int}}} = \text{costante per un corpo rigido}$$

Di conseguenza, la **conservazione dell'energia meccanica** per un corpo rigido **dipende** dalla **variazione dell'energia cinetica totale (di rotazione e di traslazione)** del corpo e dalla **variazione dell'energia potenziale esterna** del corpo stesso.

$$L_{ext} = E_{K_f} - E_{K_i} = \left(\frac{1}{2} I w_f^2 + \frac{1}{2} M v_{CM\,f}^2\right) - \left(\frac{1}{2} I w_i^2 + \frac{1}{2} M v_{CM\,i}^2\right)$$

Se le **forze esterne** sono **conservative**, abbiamo

$$L_{ext} = E_{p_i}^{ext} - E_{p\,f}^{ext} = E_{K_f} - E_{K_i}$$

$$E = \frac{1}{2} I w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_{p_{ext}} = \text{costante}$$

Lavoro e potenza

Dalle considerazioni fatte consegue che

$$dL = dE_K = I_z w dw = I_z \frac{dJ}{dt} dw = I_z \frac{dJ}{dt} a dt = t_z dJ$$

E quindi

$$L = \int_{J_i}^{J_f} t_z dJ$$

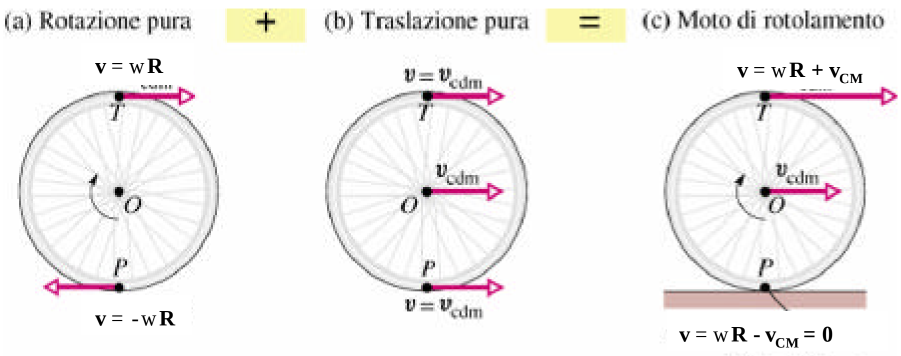
Per la **potenza istantanea** abbiamo

$$\frac{dL}{dt} = t_z \frac{dJ}{dt} = t_z w$$

Relazione **analoga alla (dL/dt) = F·v**.

Il moto di puro rotolamento

Il **moto di puro rotolamento** è un moto in cui **il punto di contatto tra la superficie ed il corpo che rotola** (a sezione circolare) **è fermo istante per istante: $v_P = 0$**. Ricordiamo che, grazie ai teoremi di König, possiamo separare il moto **rototraslatorio** in **rotazione** del corpo rispetto al suo CM, e **traslazione** del CM rispetto al laboratorio.



$$\mathbf{v_P} = -w\mathbf{R} \qquad \mathbf{v_P} = \mathbf{v_{CM}} \qquad \mathbf{v_P} = \mathbf{v_{CM}} - w\mathbf{R}$$

$$\mathbf{v_O} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v_O} = \mathbf{v_{CM}} \qquad \mathbf{v_O} = \mathbf{v_{CM}}$$

$$\mathbf{v_T} = w\mathbf{R} \qquad \mathbf{v_T} = \mathbf{v_{CM}} \qquad \mathbf{v_T} = \mathbf{v_{CM}} + w\mathbf{R}$$

$$v_P = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_{CM} = wR$$

Abbiamo così trovato una relazione tra la velocità del centro di massa del corpo rigido e la sua velocità di rotazione attorno al centro di massa (velocità di rotazione). Sfruttiamo quanto appena trovato per ricavare **l'energia cinetica** del corpo rigido che si muove di moto di puro rotolamento su di una superficie orizzontale. Dal primo teorema di König abbiamo

$$E_K = E_K^{'} + \frac{1}{2} M v_{Cm}^2$$

Nel caso considerato, il moto di ogni punto del corpo rigido rispetto al centro di massa è un **moto circolare con velocità angolare** w, quindi

$$E_K^{'} = \frac{1}{2} I^{'} w^2$$

Con **I' momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il CM**.
Otteniamo così

$$E_K = \frac{1}{2} I^{'} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

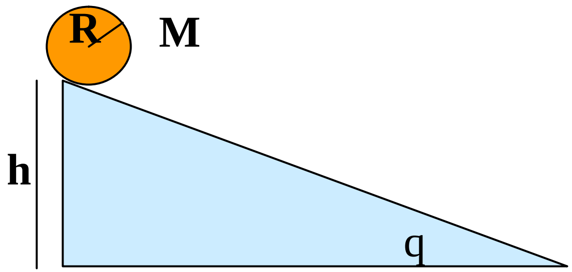
La relazione appena trovata ha **validità generale**, ovvero può essere applicata ad ogni corpo rigido che ruota e trasla, senza che il moto sia di puro rotolamento. Nel caso particolare di puro rotolamento si ha

$$E_K = \frac{1}{2} I' w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I'}{R^2} + M \right) v_{CM}^2$$

Pertanto, **nota la geometria dell'oggetto e la sua $\mathbf{v_{CM}}$**, ne **conosciamo l'energia cinetica totale**, mentre nel caso di una generica rototraslazione abbiamo bisogno di conoscere anche la velocità angolare.
Si può inoltre osservare che, dalla relazione tra $\mathbf{v_{CM}}$ e w, per derivazione, si ricava

$$a_{CM} = aR$$

Dal punto di vista **dinamico** ci possiamo ora chiedere quali siano le **forze in gioco nel moto di puro rotolamento**. Oltre alla forza di interazione gravitazionale e alla reazione vincolare **N**, **c’è bisogno di una forza che permetta al corpo rigido di entrare in rotazione e, nel contempo, di mantenere fermo il punto di contatto con il suolo P**, istante per istante. Questa forza è la **forza di attrito statico**.
Dal punto di vista energetico il **sistema risulta conservativo**, dato che la **forza di attrito statico non compie mai lavoro** non essendo associata ad uno spostamento.
Esaminiamo ora il **moto di puro rotolamento** di un corpo a sezione circolare **lungo un piano inclinato** di un **angolo** q.
Analizziamo il problema **prima dal punto di vista energetico** e **poi** dal **punto di vista dinamico.**



Sia m_s il coefficiente di attrito statico tra il piano e il corpo rigido e supponiamo che il corpo sia fermo quando inizia il moto e si trovi ad un'altezza **h** dal suolo. Sia inoltre **I' il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il CM** e ⊥ al foglio.

All'istante t = 0 s il corpo viene lasciato libero di muoversi e scende lungo il piano inclinato con velocità angolare w; il moto è fin dall'inizio di **puro rotolamento**.

$$E_{m_i} = E_{m_f}$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I' w^2$$

Ricordando la condizione di puro rotolamento, $\mathbf{v_{CM}} = \omega \mathbf{R}$, si ha

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = +\frac{1}{2}I'\frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

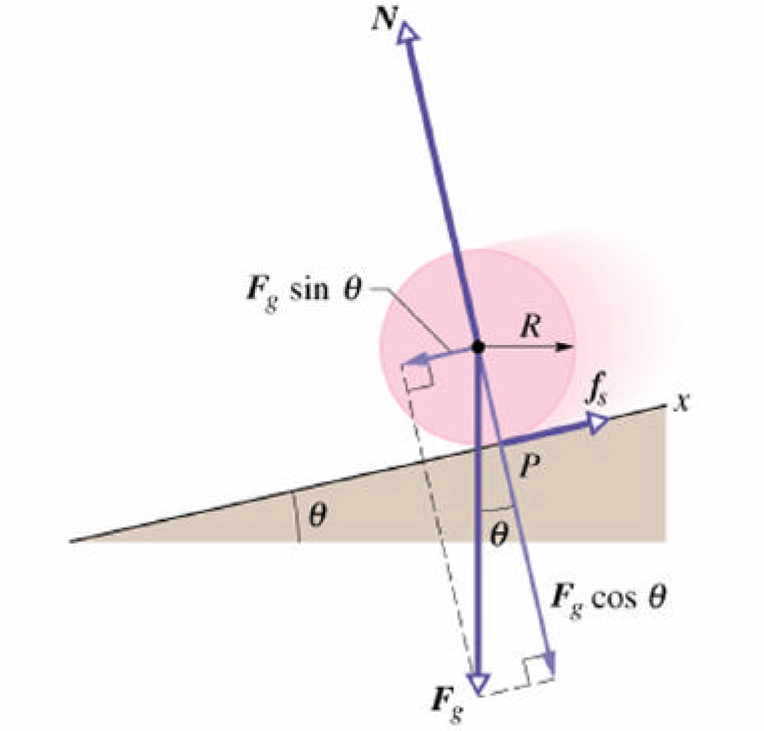
$$v_{CM}^2 = 2Mgh\left(\frac{1}{M+\frac{I'}{R^2}}\right)$$

Ricordiamo ora che il **rapporto** tra **I' ed R è proporzionale ad M**, il coefficiente di proporzionalità α dipendendo dalla **geometria** del corpo

$I' = MR^2$	anello	$v_{CM} = \sqrt{gh}$
$I' = \frac{1}{2}MR^2$	cilindro	$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$
$I' = \frac{2}{3}MR^2$	sfera cava	$v_{CM} = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$

I risultati così ottenuti vanno confrontati con quelli ricavati nel caso in cui il **corpo rigido scende senza rotolare** dalla stessa altezza lungo un **piano liscio** con lo stesso **angolo di inclinazione** θ, sappiamo già che otteniamo **per ogni corpo** lo stesso risultato, $\mathbf{v_{CM} = \sqrt{2gh}}$.
La differenza tra le velocità ottenute nei due casi (**entrambi conservativi** dal punto di vista energetico e con la **medesima E_m iniziale**) è dovuta al fatto che, nel caso del puro rotolamento, **il corpo deve impiegare parte della sua energia potenziale gravitazionale per entrare in rotazione**, ciò a discapito della traslazione. Come conseguenza, nel caso del puro rotolamento, abbiamo **velocità finali del CM più piccole**.
Esaminiamo ora il problema dal **punto di vista dinamico**. Scriviamo le due **equazioni cardinali della dinamica per il corpo rigido** **(rotazione attorno ad un asse principale d'inerzia senza punto fisso in un sistema inerziale)**

$$\begin{cases} \vec{\tau}'_{ext} = I'\vec{\alpha} \\ \sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \end{cases}$$



$$\begin{cases} Rf_s = I' a \\ M\vec{g} + \vec{f}_s + \vec{N} = M\vec{a}_{CM} \end{cases}$$

$$a_{CM} = aR$$

$$\begin{cases} f_s = \dfrac{I' a_{CM}}{R^2} \\ Mg \sin J - f_s = Ma_{CM} \\ N - Mg \cos J = 0 \end{cases}$$

Infine

$$a_{CM} = g \sin J - \frac{f_s}{M} \quad \text{e} \quad f_s = \frac{I'}{R}\left(g \sin J - \frac{f_s}{M}\right)$$

$$f_s\left(1 + \frac{I'}{MR^2}\right) = \frac{I'}{R^2} g \sin J \quad \text{e} \quad f_s = \frac{I'}{I' + MR^2} g \sin J$$

$$a_{CM} = g \sin J \frac{MR^2}{I' + MR^2} \quad \text{costante} \Rightarrow \text{moto uniformemente accelerat}$$

Per i vari corpi

$f_s = \frac{1}{2} Mg \sin J$	anello	$a_{CM} = \frac{1}{2} g \sin J$
$f_s = \frac{1}{3} Mg \sin J$	cilindro	$a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin J$
$f_s = \frac{2}{5} Mg \sin J$	sfera cava	$a_{CM} = \frac{3}{5} g \sin J$
$f_s^{MAX} = m_s Mg \cos J$	strisciamento	$a_{CM} = g \sin J$

In conclusione bisogna sottolineare che la **forza di attrito statico necessaria per il puro rotolamento non è necessariamente la massima forza di attrito statico**.
Inoltre **la sua direzione non è scontata**, infatti **f_s può avere verso concorde con il moto** nel caso in cui ci siano altre forze agenti sul corpo parallelamente al piano inclinato.