Lavoro ed energia

Le relazioni ricavate dalla cinematica e dalla dinamica ci permettono di descrivere il moto di un oggetto puntiforme quando conosciamo le **variabili cinematiche e le forze applicate all'oggetto in funzione del tempo**. Spesso non abbiamo tutte queste informazioni.

C'è quindi la **necessità di trovare dei metodi alternativi** per studiare il moto dell'oggetto. Introduciamo due concetti nuovi: **energia cinetica e lavoro**. **L'energia cinetica K** viene così definita

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

L'energia cinetica dipende dalla **massa m** e dalla **velocità v** dell'oggetto, quindi è un parametro definito senza aver bisogno di conoscere le interazioni che coinvolgono l'oggetto ovvero è un **parametro che non dipende dall'ambiente esterno**.

L'unità di misura dell'energia cinetica è il **Joule (J)**

$$\boxed{Joule = J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$$

L’equazione dimensionale per l’energia è

$$[K] = [M][L]^2[T]^{-2}$$

L’energia cinetica è una **quantità scalare** che assume **sempre valore positivo o al più nullo**, in quanto **dipende da v^2**.
Abbiamo bisogno ora di trovare un parametro che sia analogo all’energia cinetica, però dipenda dal mondo esterno, cioé contenga l’interazione.
Innanzitutto ricordiamo che l’effetto dell’interazione con l’ambiente esterno provoca una variazione nel moto dell’oggetto, in particolare ne cambia la velocità $\rightarrow$ cambia pure K.
L’interazione varia l’energia cinetica di un corpo.
L’interazione trasferisce energia da un corpo ad un altro.
Chiamiamo questo trasferimento di energia **lavoro L**.
Quando al corpo viene ceduta energia si ha lavoro positivo (il corpo aumenta la sua energia), quando è il corpo a cedere energia si ha lavoro negativo (l’energia del corpo diminuisce).
Non è un flusso di qualche sostanza !!!!

Cerchiamo di dare una formulazione matematica al lavoro

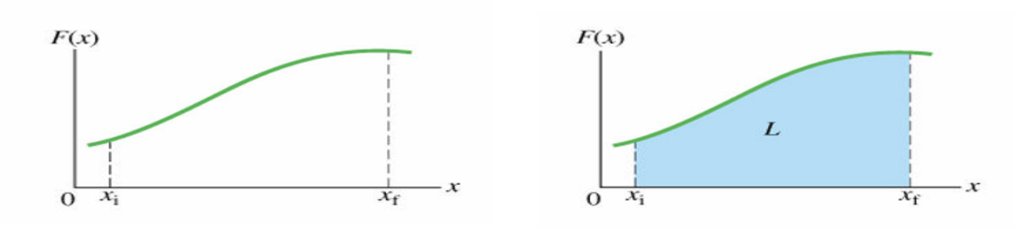
$$L = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

Il lavoro è una quantità **scalare** ottenuta integrando il **prodotto scalare tra la forza F** agente sul corpo e il **suo spostamento ds**. Per conoscere il lavoro fatto da una forza, dobbiamo sapere **come questa forza varia lungo il percorso seguito dall'oggetto**, ovvero dobbiamo conoscere la **funzione F(s)**. A volte abbiamo a che fare con **forze costanti**, allora possiamo riscrivere il lavoro nel modo seguente

$$L = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$$ se **F è costante**

Dalla definizione di lavoro come prodotto scalare tra forza e spostamento, ricaviamo che **se F ^ ds**, **allora L = 0**; è questo il caso di ogni **forza centripeta** in cui lo **spostamento infinitesimo è sempre ^ alla forza**, pertanto possiamo affermare che **una forza centripeta non compie mai lavoro** e quindi, come vedremo, **non può modificare l'energia del corpo** su cui agisce.

Se disegnamo il grafico di F(x), vediamo che il **lavoro** corrisponde **all'area sottesa dalla curva F(x)** tra i punti di coordinata x_1 ed x_2.



Sviluppando il prodotto scalare otteniamo che, nel caso di una forza costante si ha

$$L = F\Delta s \cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra la direzione di F e quella di Δs. Quindi una forza produce un lavoro tanto più elevato quanto più parallela allo spostamento è la sua retta di applicazione. Il **lavoro** può essere **positivo** (quando cosθ > 0) con **aumento di energia** o **negativo** (quando cosθ < 0) con **diminuzione dell'energia** del corpo. Vediamo ora se possiamo trovare una **relazione tra energia cinetica e lavoro**.

$$\vec{F} \bullet d\vec{s} = m\vec{a} \bullet d\vec{s} = ma_T ds = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = mvdv$$

$$\Rightarrow L = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Infine otteniamo

$$L = K_f - K_i = \Delta K \qquad (1)$$

La relazione (1) ci dà il collegamento cercato tra lavoro ed energia e ci dice che un **lavoro** si manifesta sempre come **variazione di energia cinetica** di un corpo.
La relazione (1) è nota come **teorema dell'energia cinetica ed è una relazione sempre valida**, qualunque sia la forza che compie il lavoro.
Essa, inoltre, ci fornisce un ulteriore collegamento tra il punto di vista del corpo e quello dell'ambiente esterno.
Passiamo ora ad analizzare il lavoro svolto da alcune forze particolari.
L'unità di misura del lavoro è il N·m oppure il Joule (J).

Lavoro svolto dalla forza gravitazionale

Consideriamo un corpo su cui agisce la sola forza di gravità $\mathbf{F_g}$ e calcoliamo il lavoro compiuto da $\mathbf{F_g}$ quando il corpo sale dalla quota y_1 alla quota y_2 e quando scende da y_2 ad y_1.
Ricordiamo che $\mathbf{F_g}$ è una **forza di modulo costante sempre rivolta verso il basso**. Scegliamo come riferimento l'asse delle y orientato come il moto.

$$L_1 = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \bullet d\vec{y} = \vec{F}_g \bullet \int_{y_1}^{y_2} d\vec{y} = m\vec{g} \bullet \int_{y_1}^{y_2} d\vec{y} = -mg\Delta y$$

$$L_2 = \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}_g \bullet d\vec{y} = \vec{F}_g \bullet \int_{y_2}^{y_1} d\vec{y} = m\vec{g} \bullet \int_{y_2}^{y_1} d\vec{y} = mg\Delta y$$

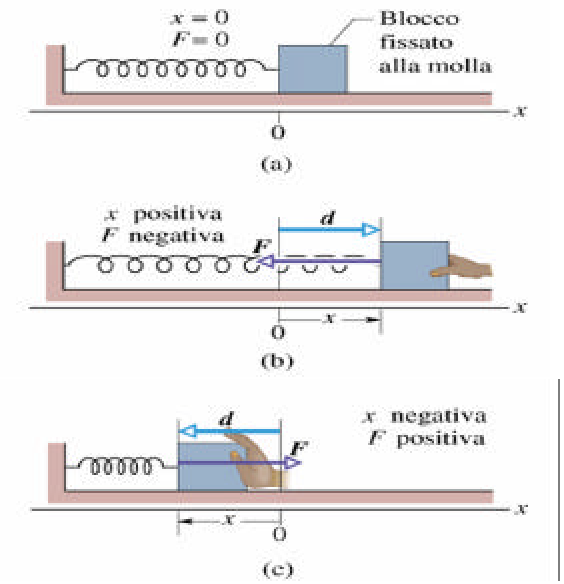
Notiamo che **in modulo i due lavori sono uguali**, il lavoro nella fase di **salita è negativo** dato che forza e spostamento sono vettori antiparalleli, mentre il lavoro **in discesa è positivo** in quanto forza e spostamento sono vettori paralleli. Se avessimo saputo le velocità iniziale e finale del corpo avremmo potuto calcolare il lavoro fatto a partire dalla variazione dell'energia cinetica. Avremmo così ottenuto:

$$L_1 = K_2 - K_1 = \Delta\mathrm{K} \text{ e } L_2 = K_1 - K_2 = -\Delta\mathrm{K}$$

Vediamo così che **i due lavori sono opposti** e che **la velocità con cui il corpo passa per y_1** sia che stia salendo sia che stia cadendo **è sempre la stessa in modulo** (la direzione varia), quindi a punti del moto che si trovano alla stessa quota compete sempre la stessa energia cinetica (nel caso qui considerato).

Notiamo inoltre che essendo **$L_1 = -L_2$**, il **lavoro totale** fatto da **F_g** per spostare il corpo da y_1 fino ad y_2 e riportarlo ad y_1, **è nullo**, ovvero, dal punto di vista energetico, **per il corpo non è variato nulla durante il tragitto y_1-y_2-y_1**.

Forza elastica e lavoro della forza elastica



Molla a riposo

Molla allungata

Molla compressa

La molla reagisce alle deformazioni con una forza di **tipo elastico**, detta **forza di richiamo** espressa dalla **legge di Hooke**

$$\vec{F} = -k\vec{d}$$

con **d** = spostamento e **k = costante elastica** misurata in Nm^{-1}

La forza elastica **F_{el}** è una forza che dipende dalla posizione. Calcoliamo ora il lavoro fatto dalla molla per spostare il blocco di massa **m** dalla posizione x_1 alla posizione x_2 e viceversa. Trascuriamo gli attriti e prendiamo come asse di riferimento l'asse orizzontale x orientato da sx a dx.

$$L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$L_{21} = -\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \text{ e } L_{12} = -L_{21}$$

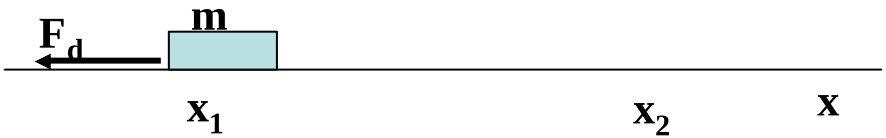
Abbiamo quindi che **se il blocco di massa m si avvicina alla posizione di riposo x = 0**, allora **il lavoro** fatto dalla **F_{el} è positivo**, viceversa se il blocco **si allontana** dalla posizione di riposo della molla **il lavoro** fatto dalla **F_{el} è negativo**. Se la **F_{el}** fa compiere al corpo di massa m uno spostamento globalmente nullo, il **lavoro è nullo**. Se applichiamo il teorema dell'energia cinetica otteniamo

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Per il percorso completo x_1-x_2-x_1 si ha $v_{1i} = v_{1f}$, quindi **il corpo quando passa per x_1 ha sempre la stessa velocità (in modulo)**.

Lavoro della forza di attrito

Consideriamo un corpo di massa **m** che striscia su di un piano, tra corpo e piano c'è **attrito** con e il coefficiente di attrito dinamico vale m_d. Calcoliamo il **lavoro fatto dalla forza di attrito** lungo il percorso da x_1 a x_2 e da x_2 a x_1 (l'asse delle x è orientata concordemente al moto).



Ricordiamo che la forza di attrito si oppone sempre al moto.

$$L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \bullet d\vec{x} = -\int_{x_1}^{x_2} m_d N dx = -m_d mg\,(x_2 - x_1) =$$
$$= -m_d mgd$$
$$L_{21} = \int_{x_2}^{x_1} \vec{F} \bullet d\vec{x} = -\int_{x_2}^{x_1} m_d N dx = -m_d mg\,(x_1 - x_2) =$$
$$= -m_d mgd$$

Troviamo così che il lavoro **L_{12} è uguale al lavoro L_{21}** e, in un percorso chiuso, **l'effetto della forza di attrito sul corpo di massa m energeticamente non è nullo**.

Potenza

A volte è utile sapere con che rapidità può essere fornito un dato lavoro. Questa quantità prende il nome di **potenza P istantanea**

$$P = \frac{dL}{dt}$$

Mentre la potenza media è

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t}$$

L'unità di misura della potenza nel S.I. è il ***watt***

$$W = Js^{-1} = kg \cdot m^{2} \cdot s^{-3}$$

mentre l'equazione dimensionale è

$$[P]=[M][L]^{2}[T]^{-3}$$

Inoltre

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \bullet d\vec{s}}{dt} = \frac{F \cos q ds}{dt} = F \cos q v = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

Energia potenziale

Riconsideriamo il lavoro fatto dalla forza di interazione gravitazionale e quello della forza elastica

$$L_g = mgy_i - mgy_f$$

$$L_{el} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

In entrambi i casi il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale, ovvero

$$L_g = f(y_i) - f(y_f)$$

$$L_{el} = f(x_i) - f(x_f)$$

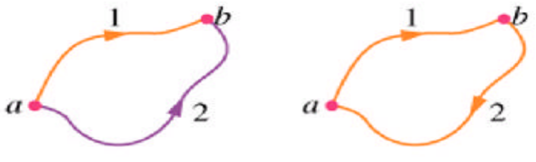
Possiamo quindi definire una funzione U(x)

$$L_g = -\Delta U(y) = U(y_i) - U(y_f)$$

$$L_{el} = -\Delta U(x) = U(x_i) - U(x_f)$$

La funzione U(x) prende il nome di **energia potenziale gravitazionale o elastica**.

L'energia potenziale ci dice quanta energia può sviluppare il sistema qualora venga spostato dalla posizione in cui si trova. Il fatto che U(x) dipenda unicamente dalla posizione in cui si trova la particella, ci permette di affermare che qualunque variazione $\Delta U(x)$ è indipendente dal percorso seguito dalla particella, purché esso congiunga sempre i medesimi punti iniziale (x_i) e finale (x_f).

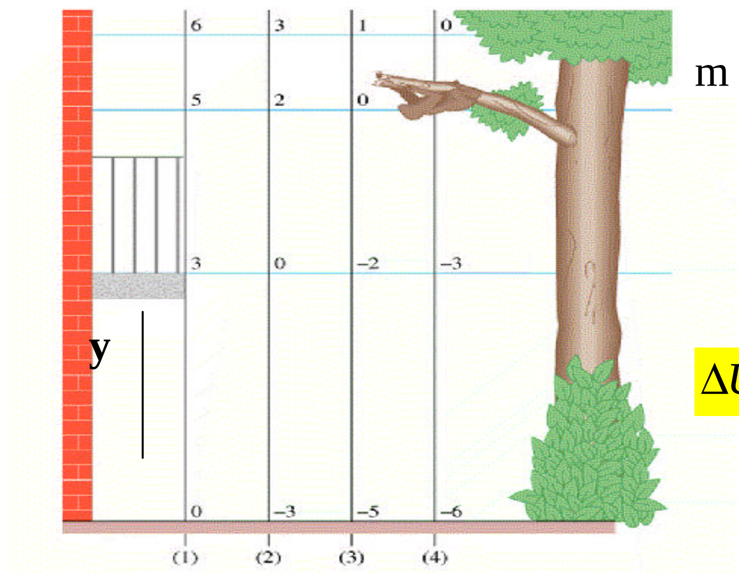


(a) (b)

Il percorso **1 e il percorso 2 si equivalgono** dal punto di vista del lavoro e dell'energia potenziale, non siamo in grado di distinguerli sulla base delle sole informazioni energetiche. Cerchiamo di capire meglio il significato di questa nuova funzione U(x).

$$L_{i\to f} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\Delta U = -\left(U_f - U_i\right)$$

Vediamo che la funzione U(x) non ha significato quando è valutata in un punto preciso, ciò che **ha significato fisico è la differenza DU(x)**, pertanto l'energia potenziale è sempre **definita a meno di una costante arbitraria**. La scelta di detta costante è fatta di volta in volta cercando sempre la soluzione più conveniente.



m = 2.0 kg

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = \Delta U_4 = -98 J$$

Non sempre è possibile associare ad un lavoro una variazione di energia potenziale, ci sono infatti interazioni che comportano un lavoro che dipende dal percorso scelto (ad es. la forza di attrito). Abbiamo visto che in questi casi il lavoro su un percorso chiuso è diverso da zero. Di conseguenza abbiamo **due tipi di forze**

Forze conservative

- ✓ il lavoro su un percorso chiuso è nullo
- ✓ si definisce U(x)/ L = -ΔU(x)

$$\oint \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0$$

Forze non conservative

- ✓ il lavoro su un percorso chiuso non è nullo
- ✓ non si definisce U(x)

$$\oint \vec{F} \bullet d\vec{s} \neq 0$$

Quindi abbiamo visto che **un corpo può possedere due tipi di energia, cinetica e potenziale**. La prima è una proprietà del corpo e per definirla non dobbiamo specificare le interazioni a cui è soggetto il corpo.
Per definire **l'energia potenziale** invece, dobbiamo conoscere le interazioni a cui è soggetto il corpo, quindi l'energia potenziale è **un'energia di interazione**. Vediamo ora se possiamo mettere in relazione i due tipi di energia.

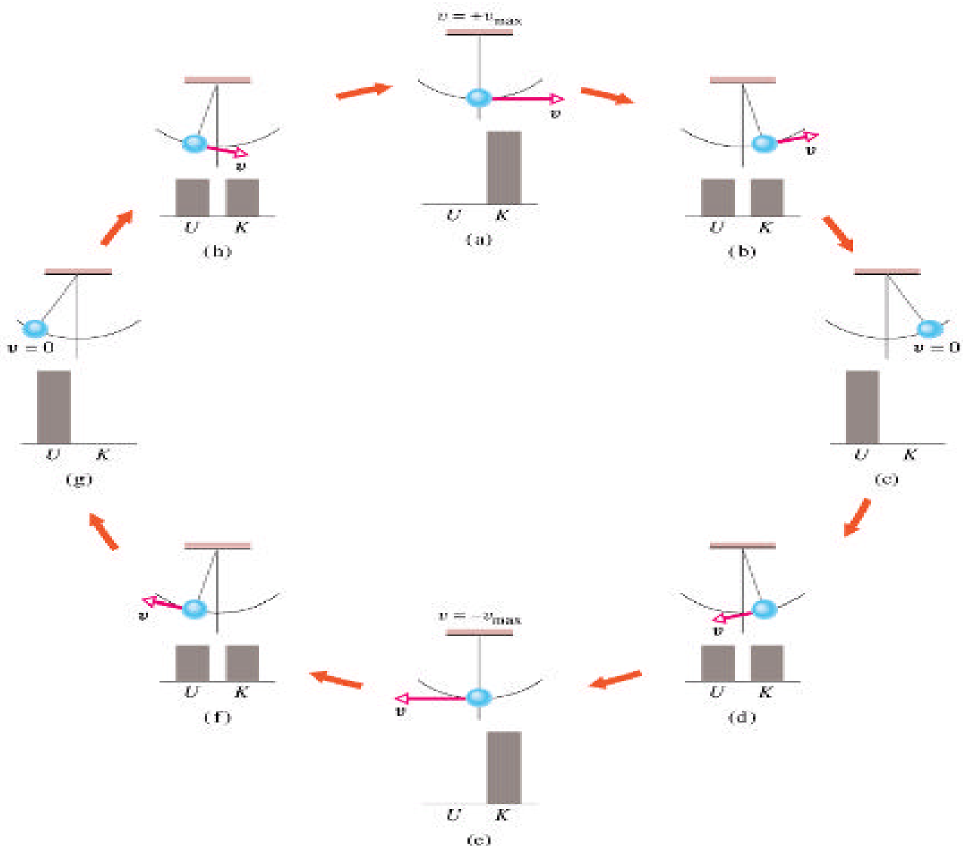
$$L = \Delta K \text{ e } L = -\Delta U$$

$$\Delta K = -\Delta U$$
$$K_f - K_i = U_i - U_f$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Possiamo allora definire una nuova funzione, che chiamiamo **energia meccanica E_m** e che, nei casi considerati, si mantiene costante.

$$E_{m_i} = E_{m_f}, E_m = K + U \qquad (1)$$

La relazione (1) esprime il **principio di conservazione dell'energia meccanica**.



$v = +v_{max}$
v
U K
(a)
v
U K
(b)
$v = 0$
U K
(c)
v
U K
(d)
$v = -v_{max}$
v
U K
(e)
v
U K
(f)
$v = 0$
U K
(g)
v
U K
(h)

Ci chiediamo ora se il principio di conservazione dell'energia meccanica sia sempre valido. Consideriamo il caso della **forza di attrito**. Avevamo trovato che il lavoro fatto dalla forza di attrito su di un percorso chiuso non è nullo, quindi il lavoro totale dipende dal percorso seguito e non solo dalla posizione iniziale e da quella finale. **Non possiamo pertanto, in questo caso, parlare di energia potenziale**.

Supponiamo di esaminare una particella che risente di più interazioni alcune conservative ed altre non conservative, possiamo scrivere

$$L = \Delta K, L = L_{n.c.} + L_{c.}, L_{c.} = -\Delta U$$

$$L_{n.c.} = \Delta K + \Delta U = \Delta E_m$$

Quindi il **lavoro fatto dalle forze non conservative provoca una diminuzione dell'energia meccanica della particella**.

Curve dell'energia potenziale

Dalla definizione di lavoro, per forze conservative, ricaviamo che

$$dL = -dU \text{ e } dL = \vec{F} \bullet d\vec{r} \Rightarrow -dU = \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Proiettando sugli assi cartesiani otteniamo

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

che in forma compatta si scrive

$$\vec{F} = -gr\vec{a}dU = -\vec{\nabla}U$$

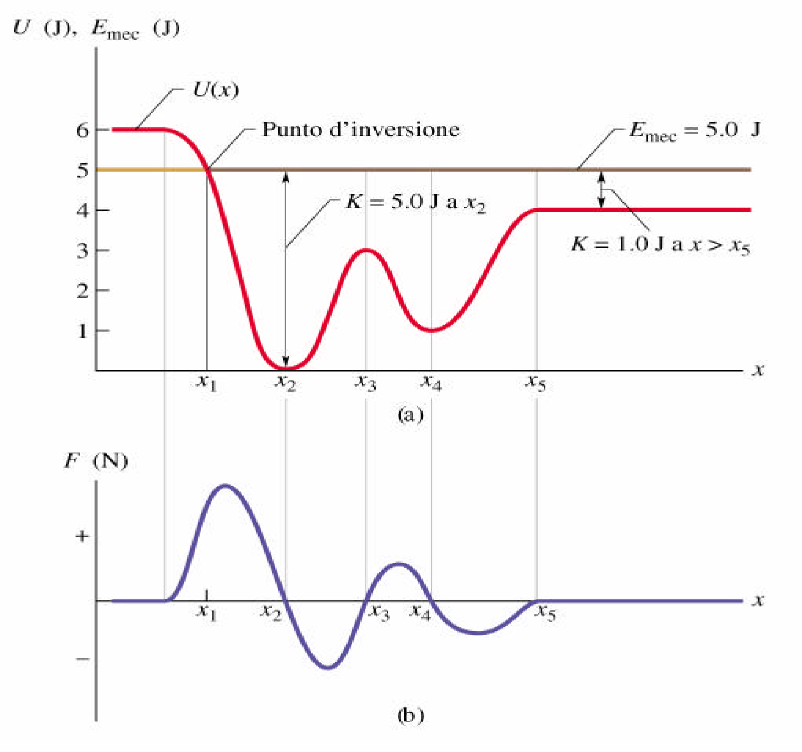
$$gr\vec{a}dU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Il gradiente ci indica il verso di diminuzione di U

La forza F è ⊥ alla superficie su cui U è costante.

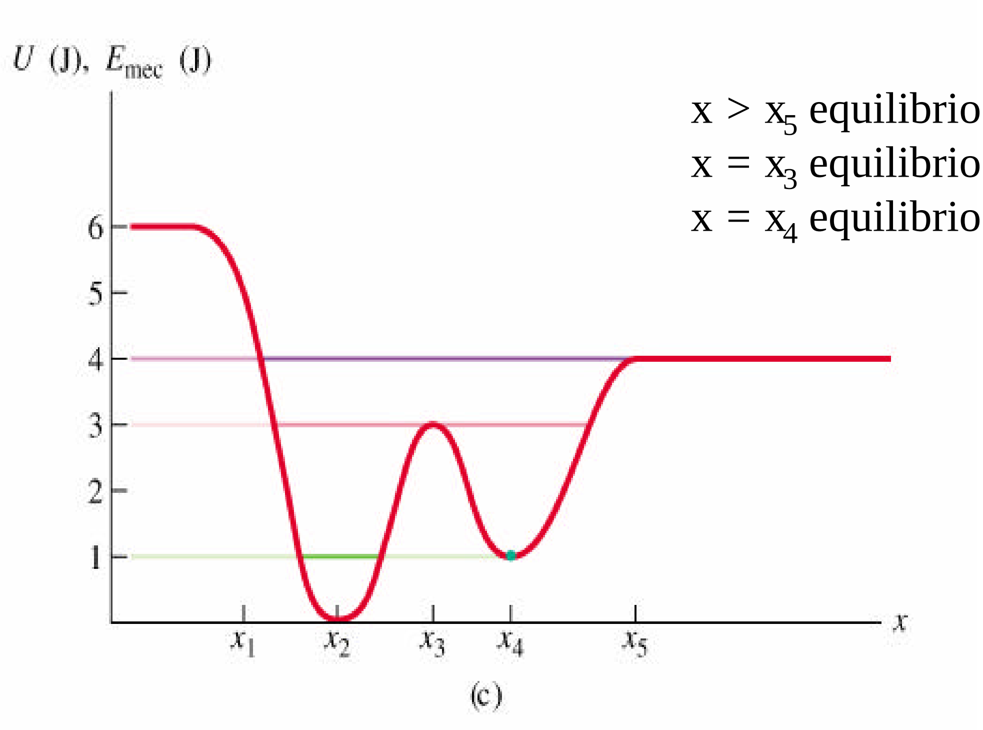
Le superfici caratterizzate da U = costante si dicono **superfici equipotenziali**.

Consideriamo ora una forza che sia funzione della sola variabile x, possiamo rappresentare U, K ed E_m con i seguenti grafici



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Condizioni di equilibrio



$x > x_5$ equilibrio **indifferente**
$x = x_3$ equilibrio **instabile**
$x = x_4$ equilibrio **stabile**