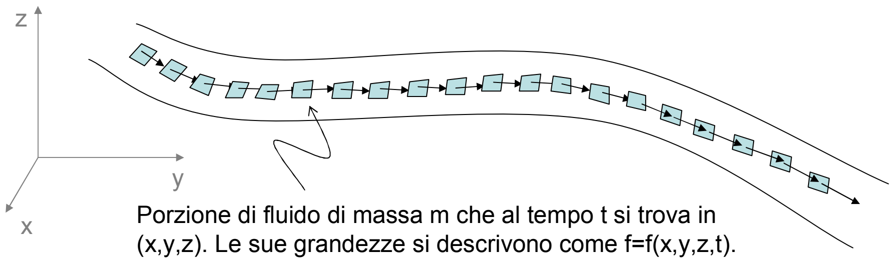
Dinamica del fluidi

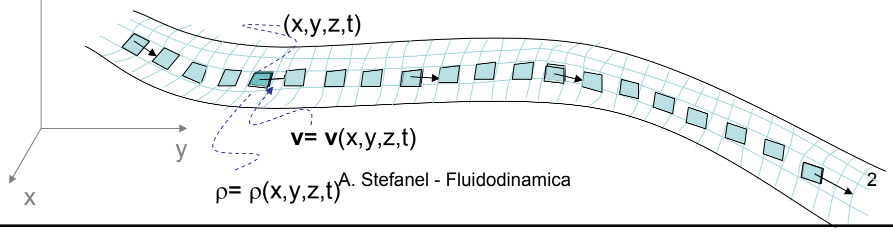
Per descrivere il **moto di un fluido** ci sono due formalismi equivalenti:

Lagrange: si descrive il moto di **ogni porzione** di fluido



Porzione di fluido di massa m che al tempo t si trova in (x,y,z). Le sue grandezze si descrivono come f=f(x,y,z,t).

Eulero: si descrive ciò che accade in ogni singolo volumetto attraversato dal fluido



Tipi di flusso:

Flusso non stazionario: ad ogni punto viene associata una velocità che dipende esplicitamente dal tempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z,t)$

Flusso stazionario: ad ogni punto viene associata una velocità costante: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z)$

Flusso rotazionale: $\omega \neq 0$

Flusso irrotazionale: $\omega = 0$

Proprietà del fluido:

Densità: $\rho = \rho(x,y,z,t)$ in generale varia da punto a punto da istante a istante

Fluido incomprimibile: $\rho=\rho(x,y,z,t) = \rho_o$ [con ottima approx Liquidi]

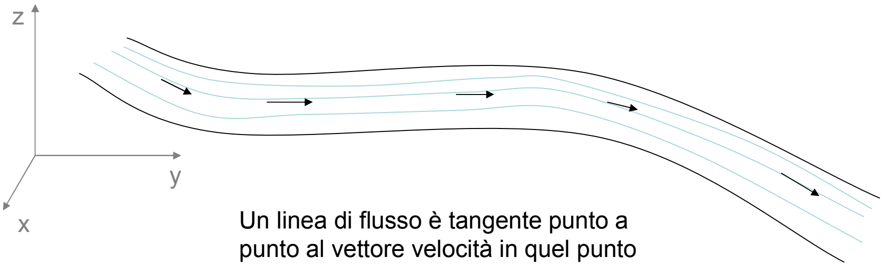
Viscosità: $\eta = \eta(x,y,z,t)$ si manifesta come forza parallela alla velocità e che dipende da essa. Si oppone allo scorrimento delle diverse parti di fluido una sull'altra (forze di taglio presenti in condizioni dinamiche)

Fluido non viscoso: $\eta=0$ [solo in prima approssimazione]

Si tratta da **qui** fino a indicazione contraria di:

Flussi stazionari, irrotazionali di fluidi incomprimibili e non viscosi.

Linea di flusso

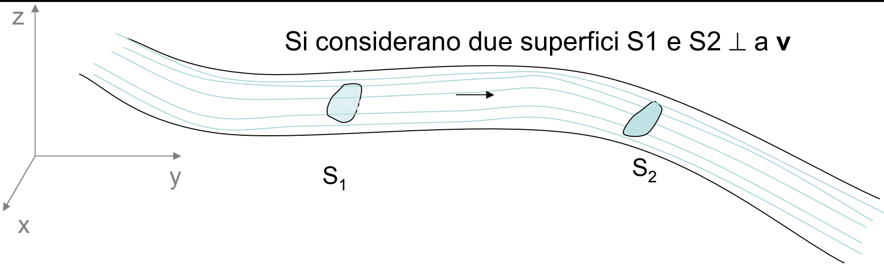


Un linea di flusso è tangente punto a punto al vettore velocità in quel punto

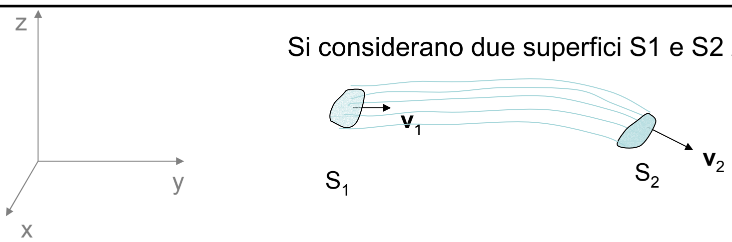
Con moti stazionari:

le linee sono fisse nel tempo e non si incrociano

Si considerano due superfici S1 e S2 $\perp$ a **v**



Si considerano due superfici S1 e S2 $\perp$ a **v**



Nel volume delimitato dalle due superfici considerate in un tempo Δt:

- entra una massa di fluido : $\Delta m_1=\rho_1 S_1 v_1\, \Delta t$
- esce una massa di fluido : $\Delta m_2=\rho_2 S_2 v_2\, \Delta t$

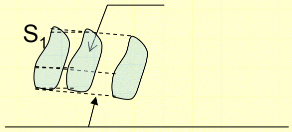
Dato che non vi sono sorgenti:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

e quindi

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

$S_1 v_1 \Delta t$ Volume di fluido entrato



$v_1 \Delta t$ Distanza percorsa da fluido in Δt

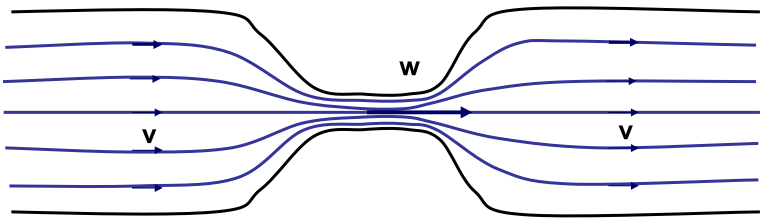
Equazione di continuità: ρ S v =cost

Per un **fluido incomprimibile**: $\rho_1=\rho_2=\rho$ uniforme

Non solo: ρ S v =cost

Ma anche: S v =cost'   la **portata Q=Sv è costante**

Se la portata è costante la velocità e inversamente proporzionale alla sezione



w > v

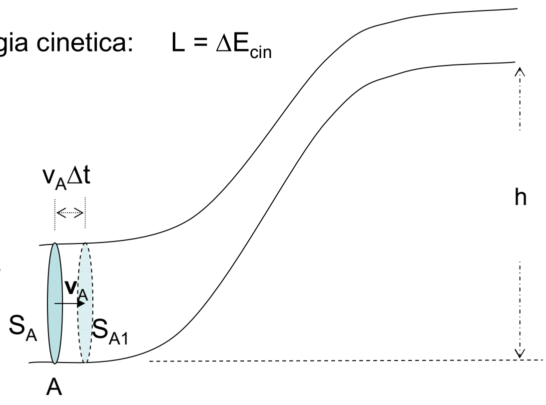
Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$

Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_A \Delta t$.

Questa massa è compresa tra le superfici S_A e S_{A1}

Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A1}

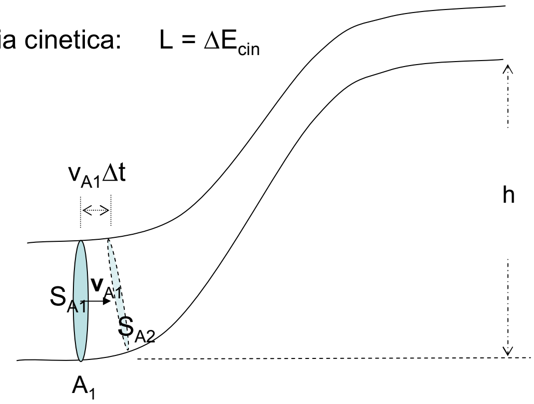


Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$

Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A1, percorre un tratto $v_{A1}\,\Delta t$.

Questa massa è compresa tra le superfici S_{A1} e S_{A2}



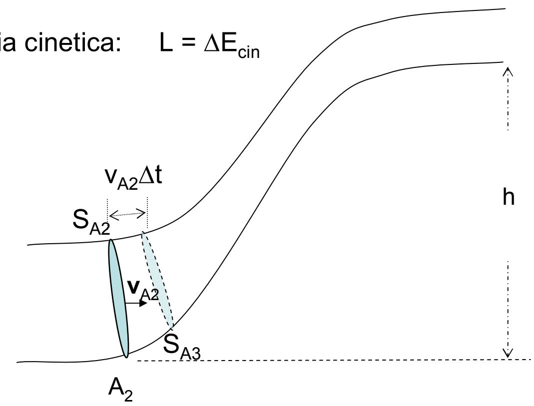
Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A2}

Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$

Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_{A2}\,\Delta t$.

Questa massa è compresa tra le superfici S_{A2} e S_{A3}

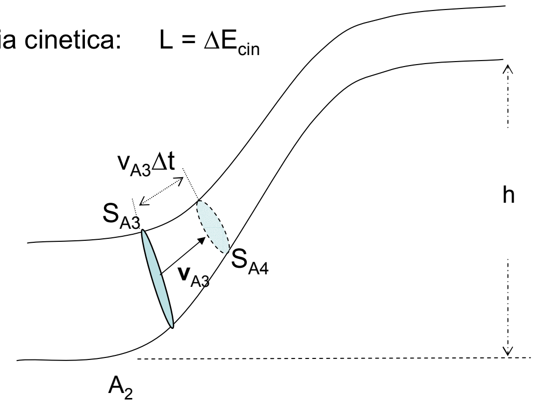


Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A3}

Dopo ogni ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente la superficie che la delimitava anteriormente

Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$



Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_{A3}\ \Delta t$.

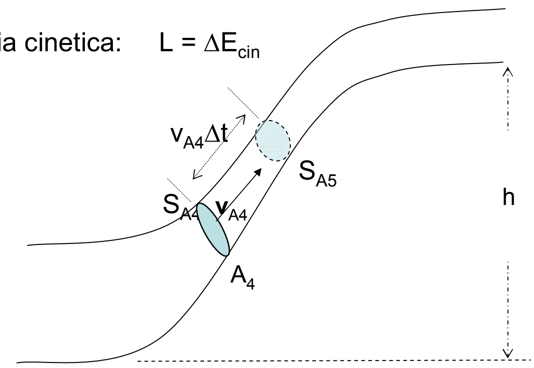
Questa massa è compresa tra le superfici S_{A3} e S_{A4}

Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A4}

Dopo ogni ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente la superficie che la delimitava anteriormente

Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$



Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_{A4}\ \Delta t$.

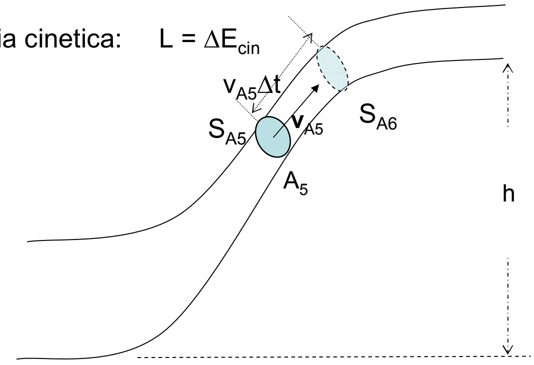
Questa massa è compresa tra le superfici S_{A4} e S_{A5}

Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A5}

Dopo ogni ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente la superficie che la delimitava anteriormente

Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$



Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_{A5}\ \Delta t$.

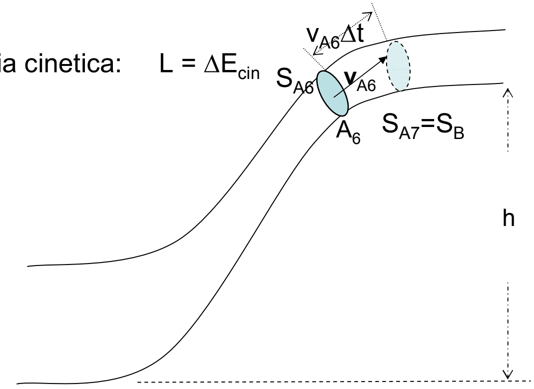
Questa massa è compresa tra le superfici S_{A5} e S_{A6}

Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A6}

Dopo ogni ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente la superficie che la delimitava anteriormente

Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$



Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_{A6}\ \Delta t$.

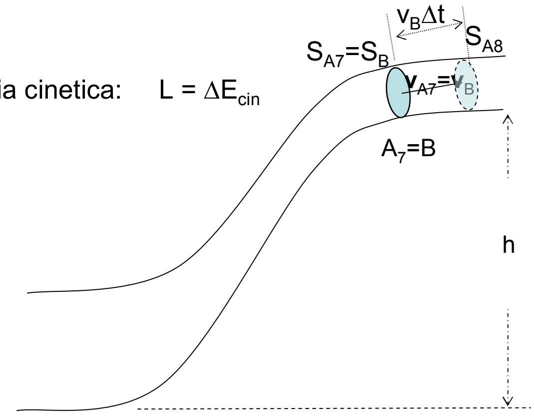
Questa massa è compresa tra le superfici S_{A6} e S_{A7}

Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A7}

Dopo ogni ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente la superficie che la delimitava anteriormente

Teorema di Bernoulli

Si applica il teorema dell'energia cinetica: $L = \Delta E_{cin}$



Si considera la massa di fluido che in un tempo Δt, quando si trova in A ,percorre un tratto $v_{A7}\ \Delta t$.

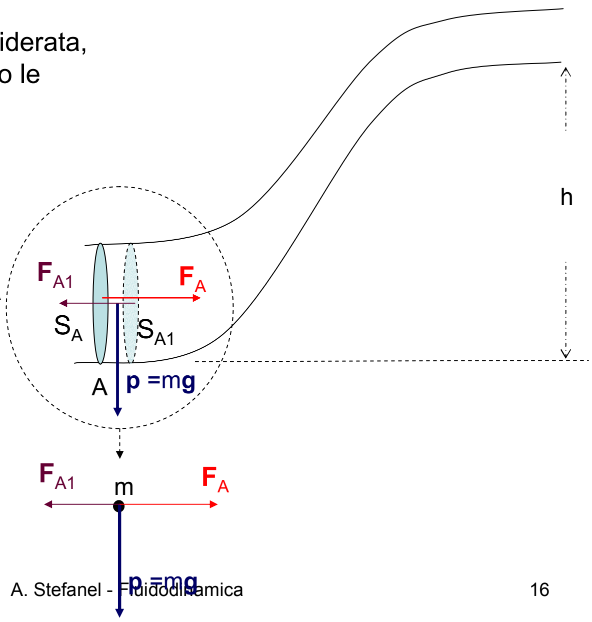
Questa massa è compresa tra le superfici S_{A7} e S_{A8}

Dopo un ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente S_{A8}

Dopo ogni ulteriore intervallo di tempo Δt la massa avrà attraversato completamente la superficie che la delimitava anteriormente

Teorema di Bernoulli

Sulla massa di fluido considerata, all'istante iniziale, agiscono le seguenti forze:



$F_A = P_A\ S_A$, dovuta al fluido che precede S_A e che si trova a pressione P_A

$F_{A1} = -\ P_{A1}\ S_{A1}$, dovuta al fluido che segue S_{A1} e che si trova a pressione P_{A1}

$p=mg=\rho g S_A v_A \Delta t$, la forza peso

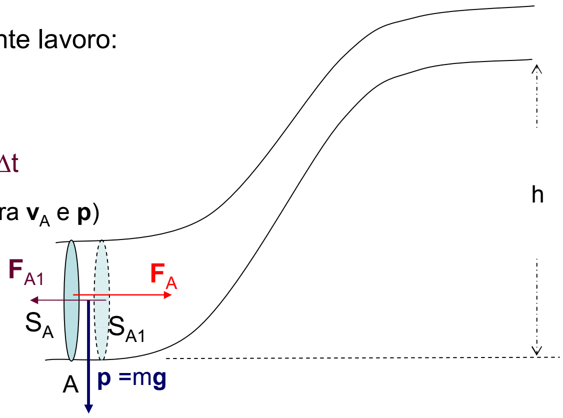
Teorema di Bernoulli

Tali forze compiono il seguente lavoro:

$L_A=F_A\, v_A\Delta t= P_A\, S_A\, v_A\Delta t$

$L_{A1}=F_{A1}\, v_{A1}\Delta t = -\, P_{A1}\, S_{A1}\, v_{A1}\Delta t$

$L1=mg\, v_A\Delta t\, \cos\theta$ (θ angolo fra $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{p}$)



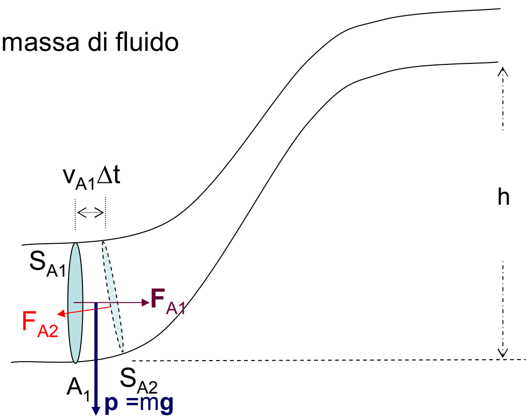
Teorema di Bernoulli

Nell'intervallo successivo, sulla massa di fluido considerata agiranno le forze:

$-F_{A1} = P_{A1}\, S_{A1}$, dovuta al fluido che precede S_A e che si trova a pressione P_A

$F_{A2} = -P_{A2}\, S_{A1}$, dovuta al fluido che segue S_{A1} e che si trova a pressione P_{A1}

$p=mg=\rho g S_{A1} v_{A1}\Delta t$, la forza peso



Tali forze compiono il seguente lavoro:

$-L_{A1}=-F_{A1}\, v_{A1}\Delta t= -P_{A1}\, S_{A1}\, v_A\Delta t$

$L_{A2}=F_{A2}\, v_{A2}\Delta t = -\, P_{A2}\, S_{A2}\, v_{A2}\Delta t$

$Lp=mg\, v_{A1}\Delta t\, \cos\theta_1$ (θ_1 angolo fra $\mathbf{v}_{A1}$ e $\mathbf{p}=m\mathbf{g}$)

Lavoro delle forze agenti tra 0 e t=Δt	Lavoro delle forze agenti tra t=Δt e t=2Δt
$L_A=F_A\, v_A\Delta t= P_A\, S_A\, v_A\Delta t$	$-L_{A1}=-F_{A1}\, v_{A1}\Delta t= -P_{A1}\, S_{A1}\, v_A\Delta t$
$L_{A1}=F_{A1}\, v_{A1}\Delta t = - P_{A1}\, S_{A1}\, v_{A1}\Delta t$	$L_{A2}=F_{A2}\, v_{A2}\Delta t = - P_{A2}\, S_{A2}\, v_{A2}\Delta t$
$L_1=mg\, v_A\Delta t \cos\theta$ (θ angolo fra $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{p}$)	$L_2=mg\, v_{A1}\Delta t \cos\theta_1$ (θ_1 angolo fra $\mathbf{v}_{A1}$ e $\mathbf{p}$)

Se si somma il lavoro compiuto dalle diverse forze agenti sulla massa di fluido considerata si ottiene:

$$(L_A+L_{A1}+Lp)+ (-L_{A1}+L_{A2}+Lp1)= L_A+L_{A2}+Lp+Lp_1 =$$

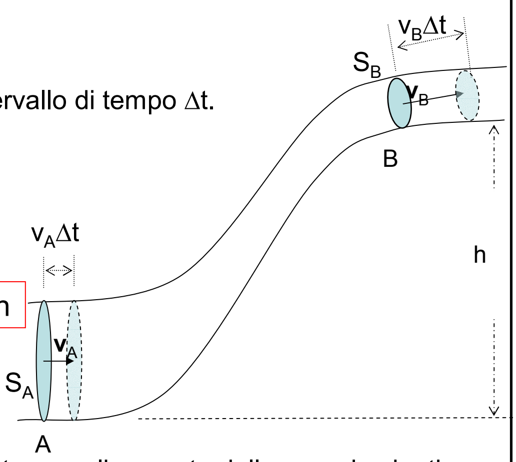
$$= P_A\, S_A\, v_A\Delta t - P_{A2}\, S_{A2}\, v_{A2}\Delta t-p\, \Delta h$$

Teorema di Bernoulli

Si ripete la procedura per ogni intervallo di tempo Δt.

Si ottiene che il lavoro complessivamente effettuato dalle forze agenti sulla massa fluida in movimento è dato da:

$$\boxed{L= P_A\, S_A\, v_A\Delta t - P_B\, S_B\, v_B\Delta t - mg\, h}$$



La variazione di energia cinetica è data semplicemente dalla energia cinetica finale (energia cinetica in B), meno l'energia cinetica iniziale (energia cinetica in A) della massa di fluido considerata:

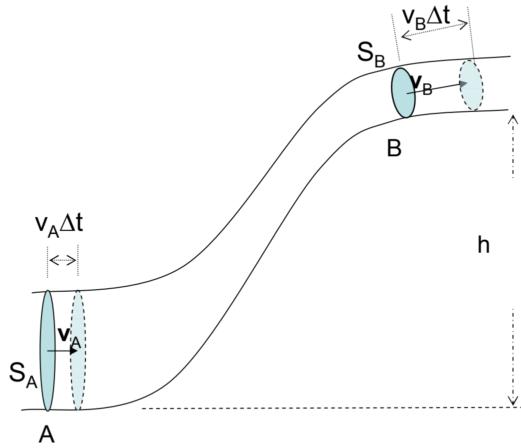
$$\boxed{\Delta E_c= (1/2)\, m\, v_B^2 - (1/2)\, m\, v_A^2}$$

Teorema di Bernoulli

Il teorema dell'energia cinetica

$L = \Delta E_c$

permette di scrivere la relazione:



$$P_A\, S_A\, v_A \Delta t - P_B\, S_B\, v_B \Delta t - mg\, h = (1/2)\, m\, v_B^2 - (1/2)\, m\, v_A^2$$

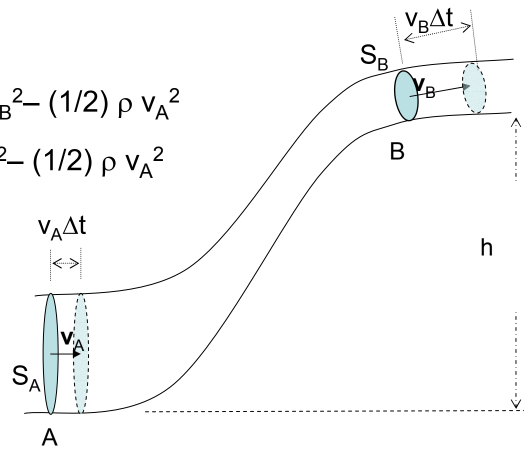
Dato che il fluido è incomprimibile: $S_A\, v_A\, \Delta t = S_B v_B \Delta t = V$

$$P_A\, \cancel{V} - P_B\, \cancel{V} - \rho \cancel{V} g\, h = (1/2)\, \rho\, \cancel{V}\, v_B^2 - (1/2)\, \rho\, \cancel{V}\, v_A^2$$

Teorema di Bernoulli

$$P_A - P_B - \rho\, g\, h = (1/2)\, \rho\, v_B^2 - (1/2)\, \rho\, v_A^2$$

$$P_A - P_B = \rho\, g\, h + (1/2)\, \rho\, v_B^2 - (1/2)\, \rho\, v_A^2$$



$$P_A + (1/2)\, \rho\, v_A^2 + 0 = P_B + (1/2)\, \rho\, v_B^2 + \rho\, g\, h$$

$$\boxed{P + (1/2)\, \rho\, v^2 + \rho\, g\, h = \text{cost.}}$$

In un tubo di flusso la somma dei tre termini è uguale agli estremi del tubo stesso

$P_A - P_B = \rho g h + (1/2) \rho v_B^2 - (1/2) \rho v_A^2$ Teor. Bernoulli

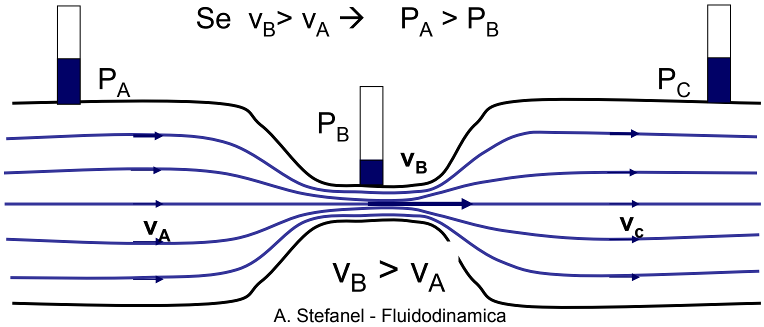
Casi particolari:

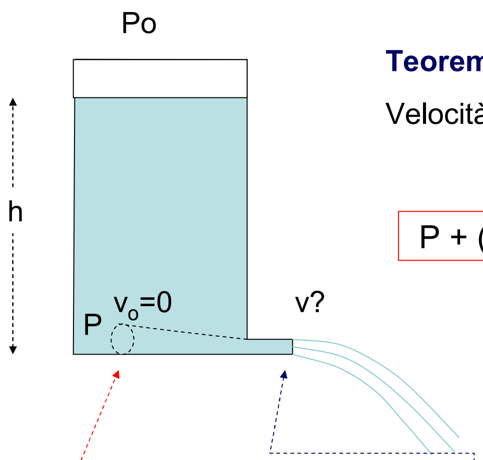
$v=0$ $P_A - P_B = \rho g h$ Legge di Stevino

$v=0$ e $h=0$ $P_A - P_B = 0$ Principio di Pascal

$h=0$ $P_A - P_B = (1/2) \rho v_B^2 - (1/2) \rho v_A^2$

Se $v_B > v_A \rightarrow P_A > P_B$





Teorema di Torricelli

Velocità di efflusso

$$\boxed{P + (1/2) \rho v^2 + \rho g h = \text{cost.}}$$

$$P_o + \rho g h = Po + (1/2) \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Indipendente da ρ

Uguale velocità di un sasso che cade!