Capitolo 1

Ovvero

Dai principi primi allo spazio-tempo

1.1 Il terzo principio della dinamica

Anzitutto alcuni chiarimenti sulla terminologia.

I. i *principi*, in fisica, non sono *mai* oggetto di dimostrazione, ma sempre, e solamente, di *verifica sperimentale*. Quindi ogni principio è sempre da considerarsi provvisorio, approssimato, e mai *assoluto* nel senso filosofico del termine (cioè di "avente validità indiscutibile");

II. in fisica il termine *assoluto* ha il significato latino originario: *absolutus* = "sciolto, svincolato da, indipendente", sottinteso "da ogni sistema di riferimento"; la radice è la stessa di *assolvere* = "sciogliere dal debito che tu hai contratto con un peccato verso la Divinità o la Comunità". Così sono *assoluti* alcuni valori di costanti fisiche, quali la velocità della luce, la carica dell'elettrone, la massa a riposo delle particelle, e così via, proprio perché *indipendenti dal sistema di riferimento* nel quale si misurano;

III. *relativo* non vuol dire "*approssimativo, dipendente dall'opinione o dalla corrente ideologico-politica*", ma dipendente dal sistema di riferimento usato. Einstein si è ben guardato dal dire che "tutto è relativo" (questo lo dicono politici e presentatori TV), ma che le misure di spazio e tempo sono –appunto- relative, vale a dire che il loro risultato numerico dipende dal sistema di riferimento nel quale il misuratore si trova ad operare.

Torniamo ai principi della meccanica classica: contrariamente a quanto di solito insegnato, soprattutto nelle scuole secondarie, i più importanti (e fondamentali) principi della dinamica classica sono il *terzo* ed il *primo*, non potendosi considerare di validità generale il *secondo principio* pur con la sua enorme utilità pratica. Vediamone i limiti principali:

- nel mondo macroscopico il secondo principio perde gradualmente di validità all'aumentare del modulo della forza agente su un corpo: se dapprima si ottengono grandi accelerazioni (e proporzionali al modulo della risultante delle forze agenti), all'aumentare dei moduli delle forze seguono inevitabilmente prima deformazioni (anche permanenti) dei corpi, e poi la loro rottura;

- ciò che intendiamo per *forza* va attentamente esaminato: anche se per tutte le grandezze fisiche vale pur sempre la classica definizione operativa ("si definisce come forza ciò che si misura coi dinamometri") non possiamo non rilevare che nel mondo macroscopico una "forza" è la risultante di uno sterminato numero di interazioni elementari, che si esplicano a livello molecolare ed atomico. È davvero sorprendente come un qualcosa di così complicato finisca per fornire una legge dinamica così semplice quale la $F = M\ a$.

- la stessa idea di punto materiale è un'estrapolazione di situazioni reali: i punti materiali semplicemente non esistono. Possiamo considerare la terra un punto materiale nel suo moto attorno al Sole, a meno che non siamo interessati alle maree solari; nel qual caso dovremo considerare le dimensioni della Terra in questo moto. In altri termini: trascurare le dimensioni del corpo mobile (considerarlo quindi come un punto dotato però di massa) è lecito entro precisi limiti di approssimazione, variabili da caso a caso;

- nel mondo microscopico (intenderemo con questo riferirci alla scala di lunghezze atomica, con distanze tipicamente attorno ai $10^{-10}\,m$) il secondo principio ha, al massimo, un valore orientativo, essendo valida, a tale scala di distanze, la meccanica quantistica, e non più quella classica. Su scala nucleare o subnucleare (da $10^{-15}\,m$ a $10^{-18}\,m$ ed oltre) anche la meccanica quantistica cede il passo ad altri tipi di descrizione, tuttora oggetto di ricerca.

Il *terzo principio* ha invece, a tutt'oggi, validità assolutamente generale, essendo verificato con la massima precisione oggi conosciuta. Messo in termini più precisi del solito *"ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria*", esso stabilisce che le forze, *sempre* definite anche nella meccanica classica in modo puramente operativo (e cioè come "*ciò che si misura coi dinamometri*"), possono esistere *solamente a coppie* con risultante nulla, ed in generale con braccio *diverso da zero*; cosa evidente soprattutto nel caso dell'elettromagnetismo.

Detto in altri termini: ***non esiste in tutto l'Universo nulla che possa chiamarsi una forza isolata***. O, in altri termini ancora, ***ciò che chiamiamo forza è sempre il risultato di un'interazione***.

La diretta conseguenza del terzo principio è la conservazione del *momento lineare* (la "*quantità di moto*" di Newton) definito come il vettore $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$, e poiché ad ogni principio di costanza corrisponde un principio di invarianza (è un fondamentale teorema dovuto a Emily Noether), ne deriva che le leggi della meccanica sono, nel nostro Universo, *invarianti per traslazione*. Sono cioè le stesse qui e sulla galassia di Andromeda.

Finora non si conoscono eccezioni a queste affermazioni, verificate con precisioni incredibilmente alte: superiori ad una parte su 10^{33} . Per darne un'idea: all'incirca il rapporto che esiste fra il volume della Terra e quello di un granello a mala pena visibile ad occhio nudo (con diametro di circa $0.1\,mm$, lo spessore di un foglio di carta).

E siccome ciò che chiamiamo *forza* causa il moto di un corpo, possiamo mettere il terzo principio anche in una forma sia pure qualitativa, ma molto pittoresca ed efficace, cara ai nostri amici statunitensi:

nel nostro Universo, se vuoi muovere qualcosa, devi muovere qualcos'altro

Ci sono conseguenze molto importanti di questo principio che sono (e sono state) molto sottovalutate:

I. se le forze sono il risultato d'interazioni, ciò implica che esse debbono potersi *propagare* in qualche modo da un corpo all'altro. Quindi tramite un *messaggio* che avviene in Natura: cioè un messaggio *fisico*;

II. qualunque sia il tipo di messaggio, esso avviene in ultima analisi nel principale costituente del nostro Universo, vale a dire in ciò che chiamiamo *vuoto*: esso pertanto viene ad assumere un ruolo di *ente fisico* del quale solo ora cominciamo ad intravedere leggi e struttura. Non come un *ente geometrico* più o meno astratto;

III. è da aspettarsi che le interazioni si propaghino nel vuoto con una certa *velocità*.

È chiaro che solo gli esperimenti possono chiarirci quanto sopra descritto. E ci possiamo aspettare di dover superare notevoli difficoltà concettuali e psicologiche, per interpretare correttamente il risultato degli esperimenti medesimi: si tratta infatti di chiarire a noi stessi la natura stessa di ciò che significhi *spazio* (qualcosa nel quale viviamo e siamo immersi fin dalla nostra nascita) e *tempo*: un qualcosa di impalpabile e misterioso, indagato da filosofi, mistici e poeti. Un qualcosa che abbiamo imparato anche a misurare (con gli *orologi*, oggi divenuti dei veri e propri laboratori a sé stanti), ma che comunque è legato alla nostra vita, scorre in senso unico, è la base di ogni cambiamento del nostro ambiente, e ci porta inesorabilmente alla morte. Per noi ci sono dei fortissimi coinvolgimenti psicologici, tali da renderci estremamente difficile una sua visione astratta, come di una grandezza fisica qualunque, i cui valori sono il risultato di ricette precise applicate ad apparecchiature complesse: parlare del tempo è, per noi uomini, cosa ben diversa che parlare della viscosità di un olio o della portanza di un'ala.

Nella meccanica classica è stato dato per più o meno scontato il fatto che le interazioni si propaghino con velocità infinita, anche se con varie difficoltà in campo concettuale, molto spesso sottaciute. Sono stati necessari molti esperimenti raffinati, e molti sforzi concettuali, per scoprire che:

I. nel nostro Universo le interazioni si propagano nel vuoto con velocità *finita*;

II. la velocità massima di ogni interazione è quella della luce (o, meglio, di una qualunque onda elettromagnetica) nel vuoto, $c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^{8}\,m\,s^{-1}$. Oggi tale valore è considerato *esatto*, e ciò equivale ad affermare che questa velocità è considerata un *campione di misura*: da essa, e dall'unità di tempo, si *deriva* l'unità spaziale;

III. in nessun modo, ed in nessun sistema di riferimento, alcun ente fisico può superare la velocità c.

Nella meccanica le conseguenze di quanto detto sono estremamente importanti da un punto di vista concettuale, anche se nel mondo che circonda, dove le velocità sono sempre *molto* piccole rispetto a c, esse sono difficilmente rilevabili.

Per capire l'importanza di queste conseguenze, riprendiamo il teorema di composizione delle velocità nella meccanica classica. Espresso nella ben nota formula $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t$, esso si dimostra in modo molto semplice, partendo da una somma di vettori valida negli spazi euclidei, e derivandola rispetto al tempo, che assume il ruolo di un parametro, *uguale in ogni sistema di riferimento*.

È facile vedere che il teorema non pone alcun limite alla velocità raggiungibile nel nostro Universo. Limitandoci al caso unidimensionale, se fosse $v_r = v_t = c$, risulterebbe $v_a = 2c$, ed il ragionamento si potrebbe iterare a volontà. Il fatto che alla fine del secolo scorso gli esperimenti condotti da Michelson e Morley abbiano dimostrato che questo teorema è *sperimentalmente falso*, ha quindi implicazioni notevoli, proprio a causa della semplicità della sua deduzione, che coinvolge solo operazioni elementari effettuate su spazio e tempo.

Se questo teorema non è valido vuol dire che non sono valide le sue ipotesi, e quindi...

I. ***o*** nello spazio ordinario non sono validi i principi della geometria euclidea, ed in particolare per due sistemi in moto uno rispetto all'altro non si può pensare che si abbiano *identiche unità di misura spaziali*;

II. ***o*** il tempo non è trattabile come un *parametro indipendente*, svincolato dallo stato di moto dei sistemi di riferimento in questione;

III. ***o*** si è in presenza di una *combinazione dei punti precedenti*. Ed a questo punto la soluzione del problema viene demandata all'esperimento, e ad un'attenta analisi teorica dei nostri concetti di spazio e di tempo.

In ogni caso gli esperimenti di Michelson e Morley ci ricordano che spazio e tempo *non possono* essere trattati alla stregua di parametri matematici, ma che hanno precise realtà fisiche, che sono risultati di misure, che non hanno nulla di primigenio e/o filosofico, e che pertanto occorre sottoporre ad un attento vaglio critico *tutti* concetti di spazio e di tempo sui quali ci siamo (troppo ingenuamente) basati.

Ribadendo quindi che *spazio* e *tempo*, in fisica, sono risultati di *misure*, ricordiamo che *ogni* misura è -per definizione- una precisa *ricetta di procedure* che coinvolgono il sistema fisico soggetto alla misura ed un altro sistema fisico (o complesso di sistemi fisici), genericamente denominato "*apparecchio*": il risultato di quest'interazione di sistemi fisici (ricordiamolo:*attraverso procedimenti ben codificati e ripetibili, e sempre soggetti a cambiamenti ed evoluzioni*) è alla fine -nel caso più semplice- un *numero*. Sono questi *numeri*, riferiti alle misure di spazio e di tempo, ciò di cui parleremo d'ora in avanti. Ogni "*concetto filosofico*" semplicemente non ha diritto di cittadinanza in fisica.

Precisiamo ora alcuni punti:

I. Qualunque sistema di misure, o procedimento, che sia dedicato a misurare delle *lunghezze* verrà d'ora in avanti denominato *règolo*, mentre ogni sistema di misura che sia dedicato a misurare degli intervalli temporali sarà denominato *orologio*;

- **Attenzione**: un *règolo* (o un *orologio*) può essere un oggetto e/o un procedimento estremamente complessi. Provate a pensare come si possano misurare distanze molto piccole (le dimensioni di un batterio?) e molto grandi (la distanza fra le vette di due montagne?) per convincervene. E considerazioni analoghe valgono per gli intervalli temporali;

II. Supporremo, d'ora in avanti, che anche gli orologi forniscano come misura una *lunghezza* e precisamente la quantità $x^0 = ct$, vale a dire la *lunghezza che luce percorre nel vuoto nel tempo t*. Questa convenzione sarà chiamata *geometrizzazione dello spazio tempo*. Può sembrare un'inutile complicazione, ma lo è molto meno se pensiamo che in astronomia si usa ancora l'anno-luce...

III. Ciò che accade all'istante t in un punto (x, y, z) dello spazio (che sarà sempre riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, salvo avviso in contrario), sarà chiamato *evento* e potrà quindi essere individuato da una *quaterna di numeri* $(ct, x, y, z) = (x^0, x, y, z)$, indicanti *tutti* delle lunghezze.

In termini più formali: un *evento* potrà essere presentato da un *punto* in uno spazio *quadridimensionale*, cui sarà dato il nome di *spazio-tempo* (*space-time*) o *spazio di Minkowsky* (*Minkowsky space*).

Useremo spesso il formalismo matriciale: un evento sarà rappresentato in forma matriciale come

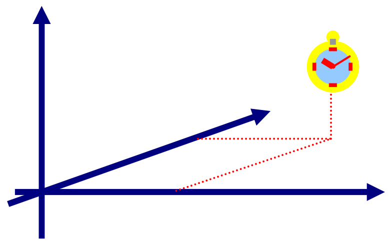
$$E = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^\alpha \qquad (\alpha = 0,1,2,3)$$

vale a dire come un *vettore nello spazio di Minkowsky* o, come ormai si dice comunemente, un *quadrivettore* (*four vector*). Tutte le quantità che si trasformino come un evento verranno anch'esse chiamate *quadrivettori*.

D'ora in avanti seguiremo delle convenzioni precise, e costanti, sugli indici:

- Gli indici delle coordinate saranno sempre $0,1,2,3$ (e non, ad esempio $1,2,3,4$);
- La coordinata temporale sarà sempre la *prima*, quindi con indice 0. Fate attenzione che in molti testi anche autorevoli, gli indici assumevano i valori $1,2,3,4$, e la coordinata temporale era la quarta;
- Gli indici *greci* saranno supposti poter assumere i valori $0,1,2,3$
- Gli indici *latini* saranno supposti poter assumere i valori $1,2,3$: saranno quindi degli "*indici spaziali*"

Una rappresentazione grafica di uno spazio tempo è riportato in figura:



dove è evidenziato in modo grafico che ad ogni *punto* dello spazio è associato un *orologio*.

La definizione del sistema di riferimento spazio temporale richiede anche che tutti gli orologi siano *sincronizzati*. Il procedimento di sincronizzazione va attentamente definito, e lo riassumiamo come segue:

I. l'osservatore P misura la sua distanza da O. Sia d questa distanza (la misura può essere non semplice, se P è in moto rispettando O, ed è da questo molto distante: ad esempio nel caso di una sonda spaziale);

II. occorre che ci sia un accordo preventivo fra O e P in base al quale si conviene che

- ad un certo istante O lascerà un segnale verso P, che si propaga con velocità c
- O segnerà l'istante di partenza del segnale come $t = 0$;

- quando P riceverà il segnale dovrà far segnare al suo orologio il tempo $t' = \frac{d}{c}$.

Solo a questo punto lo spazio-tempo sarà definito in modo *operativo*.

I problemi che derivano dal fatto che la velocità della luce è sì elevata, ma pur sempre finita, non hanno avuto finora serie conseguenze pratiche nel mondo meccanico, dato che le più elevate velocità dei corpi con cui abbiamo a che fare sono pur sempre molto piccole rispetto a c, e le loro distanze sono relativamente piccole. Se queste limitazioni vengono a cadere la situazione, però, si complica immediatamente: la limitazione imposta dalla velocità c si avverte ad esempio per sonde spaziali viaggianti a decine di kilometri al secondo e distanti molti minuti-luce da noi. Per esse una correzione di rotta richiede la previsione sia del tempo per effettuarla a bordo, sia del tempo per calcolarla a terra, sia del tempo del viaggio d'andata e di ritorno del segnale fra sonda e base, che non può viaggiare a velocità superiori a c: si può trattare di un tempo dell'ordine di ore, nel quale -ricordiamolo- la sonda continua viaggiare senza alcuna correzione. E se è vero che le velocità massime di corpi macroscopici sono sempre piccole rispetto a c ciò non accade nell'elettromagnetismo, nel quale gli elettroni (le particelle più leggere conosciute finora in Natura) possono raggiungere facilmente velocità altissime evidenziando la fenomenologia relativistica.

Infine alcune brevi considerazioni quantitative che pensiamo sia opportuno porre fin dall'inizio per evitare equivoci.

Si sente molto spesso parlare di "*astronavi che viaggino a velocità prossime a quella della luce*" (e noi lo faremo senza risparmio anche in queste note). Questo è un modo di parlare molto usato, e molto comodo per addetti ai lavori, che però ha fatto presa sull'immaginario collettivo, e che è bene smitizzare.

Anzitutto parliamo di ***tempi***, e notiamo che difficilmente un essere umano (in un'ipotetica astronave) potrebbe sopportare, per periodi lunghi, accelerazioni superiori a $1\,g \cong 10\,m\,s^{-2}$. Ciò significa che per arrivare a velocità pari a $0.1c = 3\times10^{7}\,m\,s^{-1}$ (*solo un decimo* della velocità della luce, una velocità alla quale gli effetti relativistici sono ancora pressoché irrilevanti) occorrerebbe tenere i motori accesi per $3\times10^{6}\,s = 34.8\,giorni$. Con l'attuale limite tecnologico di qualche *minuto*, ci possiamo rendere conto di come queste velocità ci sono (e probabilmente ci saranno per sempre) precluse.

Poi ***l'aspetto energetico***. Sempre limitandoci a considerare dei corpi che si muovano con velocità pari a $0.1c = 3\times10^{7}\,m\,s^{-1}$, l'energia cinetica di un corpo di $1\,kg$ che si muova a questa velocità vale $E = \frac{1}{2}(1)\left(3\times10^{7}\right)^{2} = 4.5\times10^{14}\,J$. Traducendo questa quantità, un po' criptica, in TON (energia liberata nell'esplosione di una tonnellata di trinitrotoluene, cioè di tritolo) otteniamo

$$\frac{4.5\times10^{14}}{4.9\times10^{9}} \cong 10^{5}\,TON = 100\,kTON,$$

circa 10 volte l'energia liberata dalla bomba nucleare sganciata su Hiroshima. Questa sarebbe l'energia che verrebbe liberata se un ipotetico meteorite *di solo 1 kg*, che viaggiasse con questa velocità, urtasse "qualcosa": ad esempio la nostra Terra. Siamo a scale energetiche incredibili: se volessimo portare corpi macroscopici in questi regimi di velocità le quantità di energia che dovremmo avere a disposizione sarebbero assolutamente impensabili. È comprensibile che regimi relativistici estremi vengano raggiunti con *particelle elementari*, cioè con masse estremamente ridotte.

Infine alcune considerazioni sui ***metodi*** necessari per raggiungere queste velocità: Al momento attuale, come conseguenza diretta del III principio della dinamica, non si conoscono altri metodi che la propulsione a razzo. L'equazione del razzo ci porta a calcolare la velocità finale (in funzione della velocità di espulsione $w_{espulsione}$ e della massa iniziale M_{in}) con la formula

$$v_{fin} = w_{espulsione} \ln \frac{M_{in}}{M_{fin}}$$

$$M_{in} = M_{fin} e^{\frac{v_{fin}}{w_{espulsione}}}$$

Introducendo dei dati realistici per la velocità di espulsione dei gas $w_{espulsione} = 3.5\,km\,s^{-1}$, e limitandoci anche in questo caso ad una massa finale di 1 kg, avremo per la massa iniziale del nostro ipotetico razzo:

$$M_{in} = M_{fin} e^{\frac{v_{fin}}{w_{espulsione}}} = (1)\exp\left[\frac{3\times10^7}{3.5\times10^3}\right] \cong \exp\left[10^4\right] \cong 10^{4342}\,kg$$

un numero che non ha bisogno di commenti. Basti dire che la massa dell'Universo stimata a tutt'oggi è quella di "una mole di stelle": pari a circa 10^{23} oggetti di masse intorno ai $10^{30}\,kg$. Per un totale di $10^{23+30} = 10^{53}\,kg$. Anche tenendo in considerazione il fatto che la materia conosciuta sembra essere una percentuale piuttosto piccola del totale, nel quale potrebbe entrare in gioco la "materia oscura" (non ancora rilevata, ma solo sospettata) ed anche tenendo presente che la materia delle stelle, nelle più audaci previsioni, potrebbe essere solo l'1% del totale, si arriverebbe comunque ad una massa dell'intero Universo conosciuto attorno ai $10^{55}\,kg$. E la massa del nostro ipotetico razzo sarebbe, a dire il meno, irrealistica.

Né le cose cambiano di molto se ipotizziamo sistemi di propulsione nei quali sia possibile avere, per i gas di scarico, *velocità di espulsione elevate*: si tratta ad esempio dei cosiddetti *motori a ioni*, attualmente oggetto di attiva ricerca, con spinte che raggiungono però (ed a stento) qualche mN. In questo caso le masse iniziali possono essere, in effetti, *molto* ridotte, ma *l'energia* necessaria per accelerare ed espellere gli ioni diviene proibitiva. Il limite si raggiunge per un'ipotetica propulsione a *fotoni* (molto cara ad effetti speciali di, peraltro affascinanti, film di fantascienza): vedremo più avanti che energia e momento sono legati, per la luce, dalle relazioni

$$\begin{aligned} &energia \quad E \\ &momento \quad p = \frac{E}{c} \end{aligned}$$

e questo vuol dire che un'ipotetica centrale da $1GW$ (una centrale decisamente grossa, per gli standard industriali attuali), funzionante su un'astronave (!), che producesse *solo* luce (e con un rendimento del 100 %, ovviamente) potrebbe sì espellere un micidiale raggio causando il rinculo dell'astronave medesima, ma questa avvertirebbe una spinta di soli $\frac{10^9 W}{3\times10^8 m\,s^{-1}} = 3\,N$. Pari al peso a avvertito sulla Terra per una massa di 300 grammi. Anche qui ogni commento è superfluo.

Insomma: sarà bene non farsi troppe illusioni tecnologiche. Continuiamo pure a parlare di "astronavi ed osservatori che viaggiano prossimi alla velocità della luce", e godiamoci in santa pace i film di fantascienza, con i loro favolosi effetti speciali. Ma teniamo sempre presente che le alte velocità ci saranno per sempre precluse, a meno di straordinari sconvolgimenti nella nostra visione dell'Universo.

Sempre possibili, ma non certo dietro l'angolo.

1.2 Conseguenze del primo principio della dinamica

Anche il *primo principio* della dinamica (*principio d'inerzia*) ha validità molto più generale di quanto non sia di solito divulgato, ed è ben lungi dall'essere "un caso particolare del secondo principio, quando le forze divengano nulle".

La critica serrata al primo principio è svolta nella teoria della relatività generale, ed inizia dall'attenta analisi di cosa s'intenda per *moto rettilineo uniforme*: anche in questo caso la critica è condotta sulla base della considerazione che il moto dei corpi avviene sempre in uno spazio fisico, e non concettuale, e che solo in tale spazio esso assume senso e significato. In particolare, il moto d'ogni corpo, *dotato sempre di massa*, avviene *sempre* in presenza d'altri corpi, dotati di *massa* pure loro.

Il risultato di tale analisi è l'estensione del formalismo relativistico a sistemi in moto qualunque, ed una completa revisione dei fenomeni gravitazionali: in tale contesto l'equivalenza di massa inerte e massa gravitazionale trova una sua spiegazione semplice ed elegante. Citiamo in particolare il *principio di equivalenza*, che stabilisce *l'equivalenza* (quindi l'impossibilità di distinguerli fisicamente) fra un osservatore in un sistema di riferimento in moto accelerato ed un osservatore soggetto ad un campo gravitazionale. [**Attenzione**: questa equivalenza vale solo *in un punto*, cioè *localmente*, dato che in una regione estesa il campo gravitazionale è distinguibile da un sistema in moto accelerato grazie alla presenza nel primo di *forze di marea*, dovute alla legge r^{-2}].

Pur essendo le deduzioni della relatività generale ancora oggetto di ricerca, pur attendendo questa teoria ancora conferme sperimentali definitive, e pur non portando essa a modifiche sostanziali nella descrizione del mondo meccanico con cui siamo quotidianamente a contatto (nessuna sonda spaziale è programmata con orbite calcolate in base alla relatività generale), essa prevede invece conseguenze estremamente importanti in presenza di campi gravitazionali molto intensi, quali si possono osservare in vicinanze di masse molto grandi, confinate in regioni di spazio molto piccole. Così oggetti di masse stellari $10^{31} kg$, condensati in regioni del diametro di pochi kilometri (stelle di neutroni o pulsar ne sono degli esempi) presentano una fenomenologia descrivibile quasi esclusivamente in base alla relatività generale. La stessa teoria prevede un tipo di visione dello spazio-tempo completamente diversa dalle nostre concezioni attuali a distanze dell'ordine di $10^{-30} m$: tali distanze, però, sono oggi ben al di là delle nostre possibilità sperimentali, che arrivano, a stento, a circa $10^{-19} m$.

Nella meccanica classica un sistema nel quale sia valido il principio di inerzia è detto, appunto, *inerziale*, e si dimostra facilmente che, dato sistema di tale tipo, sono inerziali anche tutti gli altri sistemi che si muovano rispetto ad esso di moto rettilineo uniforme, mantenendo paralleli gli assi di riferimento. Esistono pertanto ∞^3 sistemi inerziali. Si verifica *sperimentalmente* che in Natura i sistemi inerziali esistono: ad esempio sono tali, con altissimo livello di affidabilità, tutti sistemi legati alle stelle.

Definito un sistema inerziale, e dato che le equazioni del moto coinvolgono solo le derivate seconde delle grandezze spaziali, nella meccanica classica si può affermare che (relatività *galileiana*)

Le leggi della meccanica sono invarianti rispetto a trasformazioni che portino ad un sistema di riferimento inerziale ad un altro (trasformazioni galileiane)

o in altri termini, in nessun modo con esperimenti effettuati in un sistema, si può privilegiare il moto di un sistema inerziale rispetto a un altro. Non esiste insomma nell'Universo un sistema di riferimento *privilegiato*: un sistema di riferimento *assoluto*. A margine rileviamo che anche quest'affermazione è in discussione, come tutte le affermazioni scientifiche, ed oggetto di numerose verifiche sperimentali, legate soprattutto alla cosiddetta *radiazione di fondo* dell'Universo.

Limitandoci a considerare il caso di un moto unidimensionale -cui possiamo sempre ricondurci con opportune rotazioni- se in due sistemi inerziali le coordinate sono x e x' ed i tempi t e t' una trasformazione galileiana è definita dalle relazioni

$$\begin{cases} x' = x + vt \\ t' = t \end{cases}$$

Alla luce delle nostre conoscenze odierne non è sorprendente il fatto che mentre nella meccanica classica il principio di relatività galileiano sia verificato con un'accuratezza estrema, ciò non accada nell'elettromagnetismo, e che anzi proprio dall'analisi serrata dei fenomeni elettromagnetici prima, e dalla grossolana violazione del principio di relatività galileiano in essi osservata poi, abbia preso avvio tutta l'analisi di revisione sperimentale e teorica sfociata nella relatività speciale di Einstein. Oggi, infatti, sappiamo che nell'elettromagnetismo sono messe in gioco forze estremamente *grandi* che agiscono su masse estremamente *piccole*, dando così luogo ad una fenomenologia nella quale particelle cariche (ad esempio elettroni: le particelle con la massa più piccola finora osservata in Natura) possono facilmente arrivare a muoversi con velocità prossime a c, evidenziando così tutta una serie di fenomeni che altrimenti rimarrebbero inaccessibili alla sperimentazione.

A titolo di esempio, si pensi che gli elettroni di un tubo a raggi catodici di un televisore a colori che si muovono sotto la differenza di potenziale di circa $30\,kV$ raggiungono già velocità pari a $0.28\,c$, mentre le più elevate velocità riscontrabili nella meccanica, quali ad esempio quella di un meteorite, pari circa $40\,km\,s^{-1}$ (circa cinque volte la velocità dell'onda d'urto nella detonazione di un esplosivo ad alto potenziale) non superano il valore di $10^{-4}c$.

Si definisce *principio di relatività einsteiniano* la combinazione dei seguenti fatti sperimentali:

I. il principio di relatività galileiano, inteso però in modo esteso, e cioè come l'invarianza delle leggi *fisiche* (e non solo *meccaniche*) in sistemi di riferimento inerziali;

II. l'esistenza nel nostro Universo di una velocità massima, uguale a c, *identica in ogni sistema di riferimento inerziale.*

La meccanica newtoniana tende alla meccanica relativistica se in essa si suppone che $c \to \infty$, e, viceversa, la meccanica relativistica tende alla meccanica newtoniana se le velocità dei corpi o punti materiali coinvolti siano piccole rispetto a c.

1.3 Sistemi di riferimento

Nella fisica relativistica le velocità sono sempre espresse in modo *adimensionale*, tramite la quantità $\beta = \frac{v}{c}$: la velocità è definita quindi (e sempre) in modo adimensionale, come *frazione della velocità della luce nel vuoto*. Ancora una volta ricordiamo che "velocità della luce" è semplicemente un modo di dire: questa è infatti la velocità comune a *qualunque* onda elettromagnetica che si propaghi in ciò che chiamiamo *vuoto*; si tratti di un'onda radio, di radiazione infrarossa, di radiazione ultravioletta, o di un raggio γ ad altissima energia.

Quando ci si avvicina alla velocità della luce il parametro $\beta = \frac{v}{c}$ perde però rapidamente di significato, semplicemente perché diviene talmente vicina ad 1 da rendere arduo il rendersi conto del suo valore effettivo, a meno di non usare un enorme numero di cifre significative, sottoponendosi ad un ingrato e spesso fallace conteggio dei "9" in numeri come, ad esempio, $\beta = 0.9999999999752$. In tali casi si usa o la quantità $1-\beta$, o (e meglio) la quantità $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, detta *fattore di Lorentz*, il cui significato vedremo più avanti.

Forse i risultati più sconcertanti di quanto siamo venuti dicendo derivano proprio dall'analisi operativa che è svolta sui concetti di spazio e di tempo, i quali, perdendo quell'alone intuitivo-psicologico-filosofico, sempre estremamente pericoloso delle Scienze della Natura, riacquistano invece il loro ruolo di *parametri fisici*, misurabili con ben definite ricette e procedure. Come conseguenza essi non rimangono più *assoluti* (ricordiamo: "*svincolati*, *indipendenti*", e s'intende sottinteso "*dal sistema di riferimento usato*"), ma divengono, appunto, *relativi* (vale a dire *dipendenti dal sistema di riferimento nel quale le misure sono effettuate*).

Ad esempio: possiamo vedere facilmente che la costanza della velocità della luce *in ogni sistema di riferimento* porta come conseguenza il fatto che due eventi che appaiano contemporanei in un sistema non lo siano più o in un altro.

Supponiamo, infatti,

I. di considerare due sistemi $(\mathbf{S})$ e $(\mathbf{S}')$ in moto l'uno rispetto all'altro.

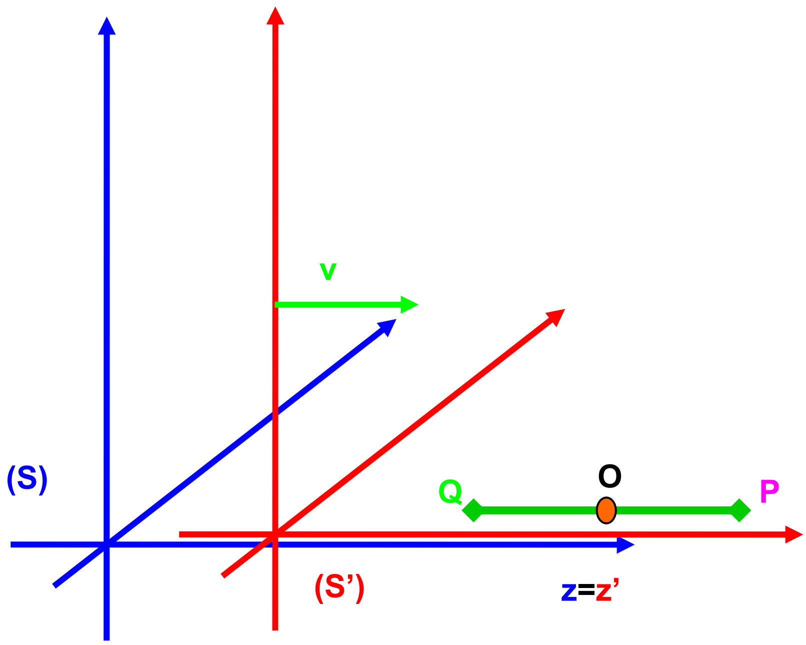
II. che gli assi coordinati dei due sistemi rimangano sempre paralleli (quindi che i sistemi *non* ruotino l'uno rispetto all'altro);

III. che il moto di un sistema rispetto all'altro avvenga lungo l'asse delle z ;

IV. di essere (**noi**) in quiete rispetto al sistema $(\mathbf{S})$;

V. che il sistema $(\mathbf{S}')$ (**lui**) si muova con velocità v rispetto al sistema $(\mathbf{S})$ (cioè a **noi**).

La situazione è schematizzata qui di seguito:



Supponiamo ora che un osservatore in $(\mathbf{S}')$ (**lui**) veda partire, all'istante $t = 0$, due raggi di luce da O, diretti in direzioni opposte, per raggiungere i punti P e Q posti ad uguale distanza d da O, e solidali al suo sistema di riferimento. Evidentemente **lui** vedrà arrivare i due raggi di luce in P e Q *allo stesso istante*, e quindi giudicherà *contemporanei* gli eventi E_Q = *arrivo del raggio luminoso in Q* e E_P = *arrivo del raggio luminoso in P*.

Per l'osservatore (S) (**noi**) le cose andranno diversamente: anche **noi** vedremo partire i due raggi di luce in direzioni opposte, **ma sempre con velocità** c. Però mentre vedremo il punto *P* "fuggire dal raggio di luce", vedremo. *Q* "*correre incontro*" al raggio di luce medesimo. Il risultato sarà che vedremo punto *Q* essere raggiunto *prima* di *P* da uno dei raggi di luce partiti contemporaneamente da *O*. Per **noi** gli eventi E_Q ed E_P *non saranno più contemporanei*.

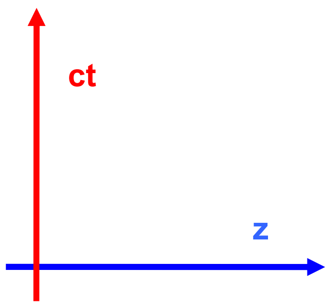
Questo fatto può tutta prima lascia sconcertati, dato che potrebbe venire il sospetto che, in opportuni sistemi di riferimento, gli effetti possano *precedere temporalmente* le cause che li producono (e molti mass media fanno a gara per creare confusione al riguardo), violando il *principio di causalità* ("ogni effetto segue temporalmente la sua causa"). Vedremo più avanti che – fortunatamente per tutti noi- non è così.

Per ora ci basti rilevare che gli eventi E_Q ed E_P ***non possono essere legati da alcun nesso causale***: nel sistema $(\mathsf{S'})$ essi, infatti, sono *contemporanei*, e pertanto potrebbero essere legati da un rapporto causa-effetto solo se esistessero dei segnali *che si potessero propagare a velocità infinita*. Cosa impossibile nel nostro Universo.

1.4 Definizione dello spazio tempo

Come già detto, nello spazio-tempo è conveniente usare delle coordinate geometrizzate, esprimendo in m anche la coordinata temporale. Un **evento** sarà quindi descritto da una quaterna di numeri reali, esprimenti tutti delle lunghezze, e sarà chiamato anche ***punto d'Universo*** (*world point*). Una **serie continua di punti d'Universo** sarà chiamata ***linea d'Universo*** (*world line*).

Per rappresentare graficamente lo spazio tempo, non essendo possibile rappresentare uno spazio a quattro dimensioni, è consuetudine usare una rappresentazione grafica, nella quale sia rappresentata una sola coordinata spaziale oltre alla coordinata temporale. Nella letteratura questa rappresentazione grafica è sempre orientata come in figura



La rappresentazione grafica è diversa da quella cui si è di solito abituati, nella quale la coordinata temporale è posta *orizzontalmente*, e detta *variabile indipendente*. La differenza deriva in parte da ragioni storiche, in parte vuol porre l'accento sul fatto che spazio e tempo in relatività *non* sono indipendenti.

Consideriamo ora due eventi nello spazio-tempo. In forma matriciale essi saranno rappresentati come segue:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

Definiremo come *intervallo fra i due eventi* la quantità

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= \left(x'^0 - x^0\right)^2 - \left(x'^1 - x^1\right)^2 - \left(x'^2 - x^2\right)^2 - \left(x'^3 - x^3\right)^2 \\ &= c^2\left(t'-t\right)^2 - \left(x'-x\right)^2 - \left(y'-y\right)^2 - \left(z'-z\right)^2 \\ &= c^2\left(t'-t\right)^2 - \left[\left(x'-x\right)^2 + \left(y'-y\right)^2 + \left(z'-z\right)^2\right] \\ &= c^2\Delta t^2 - \left[\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right] \\ &= c^2\Delta t^2 - \Delta l^2\end{aligned}$$

relazione che, nel caso di due eventi infinitamente vicini, diviene

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \\ &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2dt^2 - \left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \\ &= c^2dt^2 - dl^2\end{aligned}$$

Se definiamo una matrice $\mathbf{G}$ con la relazione

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

l'intervallo si potrà scrivere così

$$\Delta s^2 = \begin{pmatrix} x'^0 - x^0 & x'^1 - x^1 & x'^2 - x^2 & x'^3 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x'^0 - x^0 \\ x'^1 - x^1 \\ x'^2 - x^2 \\ x'^3 - x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\mathbf{E}' - \mathbf{E}\right)^{\mathbf{T}} \bullet \mathbf{G} \bullet \left(\mathbf{E}' - \mathbf{E}\right)$$

Come si vede, l'intervallo nello spazio-tempo è l'analogo del quadrato della distanza fra due punti nello spazio euclideo, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale (in questo caso la matrice $\mathbf{G}$ coincide con la matrice unità). Però c'è una differenza importante: la forma quadratica che definisce l'intervallo nello spazio di Minkowsky ***non è definita positiva***, e di questo fatto vedremo ora le conseguenze.

Qui basti notare che anche nella relatività la coordinata temporale ha un ruolo speciale, e diverso dalle coordinate spaziali, e notiamo -di passaggio- come in questa teoria non sia previsto

- che le variazioni della coordinata temporale *non* possano essere alterate in alcun modo in un singolo sistema di riferimento
- che non possano esistere variazioni temporali *negative*.

Insomma: ***non*** è previsto che il tempo scorra sempre in avanti e "passi" indipendentemente da ciò che magari desidereremmo... Questa è indubbiamente una limitazione seria, e comune a tutte le teorie attualmente in circolazione. Il ruolo speciale del tempo (connesso al principio di causalità, ma non limitato ad esso) è oggi soggetto di indagine nello studio di decadimenti di particelle elementari (i K^0), ma non si prevede una sua soluzione a breve termine.

Riassumendo:

- Nello **spazio euclideo** la ***distanza*** fra due **punti** è definita da

$$d = \int_{P_1}^{P_2} dl = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dl^2} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

- Nello **spazio di Minkowsky** la "*distanza*" fra due eventi (l'analogo della ***distanza*** fra due punti nello spazio euclideo) è definita da

$$\delta = \int_{E_1}^{E_2} ds = \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{ds^2} = \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{c^2dt^2 - dl^2} = \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)}$$

D'ora in avanti il termine *distanza* avrà sempre due significati, che saranno precisati di volta in volta:

- **Distanza temporale**: intervallo di tempo fra due eventi, misurato in un sistema di riferimento, nel quale ovviamente gli orologi siano sincronizzati. La coordinata temporale sarà misurata sempre in unità di misura spaziali ($x^0 = c\,t$)
- **Distanza spaziale**: distanza (nell'usuale senso geometrico) fra i punti dove accadono due eventi in un sistema di riferimento.
-

Per il valore dell'intervallo fra due eventi infinitamente vicini esistono tre possibilità:

I. $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 < 0$, cioè $c^2dt^2 < dl^2$. In questo caso la distanza spaziale fra i punti nei quali accadono gli eventi è *maggiore* di quella che la luce potrebbe percorrere nell'intervallo di tempo che separa gli eventi medesimi. Ne concludiamo che questi eventi *non possono essere correlati causalmente*, dal momento che nessun segnale fisico generato nel primo evento può causare il secondo evento in tempo utile. L'intervallo in questo caso si dice *di tipo **spaziale*** (***spacelike***). Gli eventi sono *più distanti* nello spazio di quanto non lo siano nel tempo. Essi si dicono anche *assolutamente separati* (*absolutely remote*): sono cioè separati spazialmente in modo *assoluto* (ricordiamo: indipendentemente dal sistema di riferimento scelto). Un esempio provocatorio: se io starnutisco ed un decimo di secondo dopo un meteorite si schianta sulla Luna e distrugge un'importante Base Spaziale, i due eventi *non* possono essere correlati causalmente in alcun modo. Insomma: ***non può essere** colpa mia*. Notiamo che, per questo tipo di intervalli, nello spazio-tempo la quantità ds è un immaginario puro: per una linea d'Universo i cui punti siano separati da questo tipo di intervalli l'analogo della lunghezza nello spazio euclideo è un immaginario puro;

II. $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 > 0$, cioè $c^2dt^2 > dl^2$. In questo caso la distanza tra i punti nei quali accadono gli eventi è *minore* di quella che le luce potrebbe percorrere nell'intervallo di tempo che separa gli eventi medesimi. Ne concludiamo che questi eventi *possono* essere correlati causalmente, dal momento che un segnale fisico generato dal primo evento *può* causare il secondo evento in tempo utile (**attenzione**: *non è detto* che lo faccia effettivamente!). L'intervallo si dice *di tipo **temporale*** (***timelike***). Gli eventi sono *meno* *distanti* nello spazio di quanto non lo siano nel tempo. Se io starnutisco e **mezz'ora dopo** un gigantesco meteorite si schianta sulla Luna e distrugge un'importante Base Spaziale, i due eventi *potrebbero* essere correlati causalmente. Insomma: ***potrebbe essere** colpa mia*. L'evento che ha la coordinata temporale *minore* si dice appartenere al *passato assoluto* dall'altro e viceversa quest'ultimo si dice appartenere al *futuro assoluto* del primo. Ancora una volta il termine *assoluto* vuol dire *indipendente dal sistema di riferimento*: così se un evento appartiene al futuro assoluto di un altro, questa sequenza temporale sarà *assoluta*, cioè *valida in ogni sistema di riferimento*;

III. $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = 0$, e cioè $c^2dt^2 = dl^2$. La separazione temporale degli eventi è proprio quella richiesta da segnali che si propaghino alla velocità della luce. Gli eventi *possono* quindi essere correlati causalmente, ma *solo* da segnali che si propaghino a velocità c. L'intervallo si dice in questo caso *di tipo **luce*** (***lightlike***) e gli eventi si dicono *giacere sul **cono di luce*** (***light cone***). Notiamo che, per questo tipo di intervalli, nello spazio-tempo la quantità ds è nulla: una linea d'Universo i cui punti siano separati da questo tipo di intervalli è di "lunghezza" nulla.

Osserviamo che lo spazio-tempo ha davvero proprietà non ovvie intuitivamente: due suoi punti **distinti** (due **eventi** distinti) possono avere una "distanza" nello spazio-tempo (la radice quadrata dell'intervallo, l'analogo della distanza fra due punti geometrici nello spazio che ci circonda) che può essere *positiva* (cosa cui siamo abituati nel nostro spazio), ma anche *nulla* o *immaginaria*.

Il concetto di intervallo permette di formalizzare in modo semplice la costanza della velocità della luce in ogni sistema di riferimento, dato che, se per due eventi risulta $ds = 0$, ciò dev'essere vero *in ogni sistema di riferimento*. Pertanto se in un sistema di riferimento $(\mathbf{S})$ fra due eventi c'è l'intervallo ds, e fra gli stessi eventi nel sistema di riferimento $(\mathbf{S}')$ c'è l'intervallo ds', dovrà valere la relazione $ds = k\,ds'$. La costante k *potrebbe* dipendere linea di principio dalla velocità relativa dei sistemi di riferimento, ma basta osservare che se dal sistema $(\mathbf{S})$ si passa al sistema $(\mathbf{S}')$ attraverso una serie arbitraria di trasformazioni intermedie ad altri sistemi di riferimento, deve risultare $k = k_1k_2\ldots k_n$, e k deve risultare *lo stesso* qualunque sia la sequenza dei k_j: ciò è possibile solo se è $k_j = 1\,(\forall j)$. Ne concludiamo quindi che dev'essere $ds = ds'$.

L'osservazione sperimentale che la velocità della luce è uguale in ogni sistema di riferimento è formalizzata dunque nel

Principio dell'invarianza degli intervalli:

L'intervallo fra due eventi è indipendente dal sistema di riferimento nel quale gli eventi sono osservati

oppure

Il valore dell'intervallo ti è assoluto

oppure

Nello spazio tempo l'intervallo fra due eventi è invariante rispetto le trasformazioni che cambiano un sistema di riferimento in un altro (trasformazioni di Lorentz).

Alla luce di quanto detto un intervallo è anche detto un *invariante relativistico*, e poiché le trasformazioni di Lorentz (che vedremo più avanti) costituiscono un **gruppo** (cosa che non dimostreremo), un intervallo si dice anche un *invariante rispetto al gruppo di Lorentz*.

Supponiamo ora di considerare due eventi, infinitamente vicini, che in un sistema siano separati da un intervallo di tipo ***spaziale***. Per essi sarà $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 < 0$, cioè $c^2dt^2 < dl^2$. Possiamo vedere immediatamente che è sempre possibile trovare un sistema nel quale i due eventi siano *contemporanei*: infatti, data l'invarianza degli intervalli, in tale sistema dovrà risultare $dt = 0$, cioè $0 = c^2dt^2 < dl^2$, cosa questa sempre possibile.

Pertanto

*Se l'intervallo è di tipo **spaziale** è sempre possibile trovare un sistema di riferimento nel quale i due eventi appaiano avvenire **nello stesso istante**, e non è **mai** possibile trovare un sistema di riferimento nel quale due eventi appaiano avvenire **nello stesso punto**.*

In modo analogo si dimostra che

*Se l'intervallo è di tipo **temporale** è sempre possibile trovare un sistema di riferimento nel quale i due eventi appaiano avvenire **nello stesso punto**, e non è **mai** possibile trovare un sistema di riferimento nel quale i due eventi appaiano avvenire **nello stesso istante**.*

Ne consegue che in sistemi di riferimento diversi due eventi separati da un intervallo di tipo *spaziale* possono apparire con sequenze temporali *diverse*, in particolare possono apparire *separati spazialmente e contemporanei*, e quindi *non possono* mai essere legati da un rapporto causa effetto.

Due eventi separati da un intervallo di tipo *temporale* non possono invece apparire *con sequenze temporali diverse*, e in particolare possono apparire *nello stesso punto*, ma *separati temporalmente*: pertanto essi *possono* essere legati da rapporto causa effetto.

Un paradosso notevole della relatività è che se due eventi sono separati da un intervallo *di tipo luce*, cioè se giacciono sul cono di luce, è sempre possibile trovare un sistema di riferimento nel quale essi appaiano avvenire ***nello stesso punto e nello stesso istante***: cioè un sistema di riferimento nel quale sia $dl = dt = 0$. Vedremo che ciò può accadere ***solo*** in un sistema che si muova con velocità c. Da cui l'affermazione (al solito provocatoria) che *un fotone vede l'Universo puntiforme e contemporaneo*.

Come si vede lo spazio di Minkowsky non è semplicemente "a quattro dimensioni", ma ha proprietà molto strane, dato che la metrica *non è definita positiva*.

Uno spazio nel quale la metrica dipenda solo dai quadrati degli incrementi delle coordinate, ma *non* sia definita positiva, prende il nome di *spazio pseudo euclideo*

.