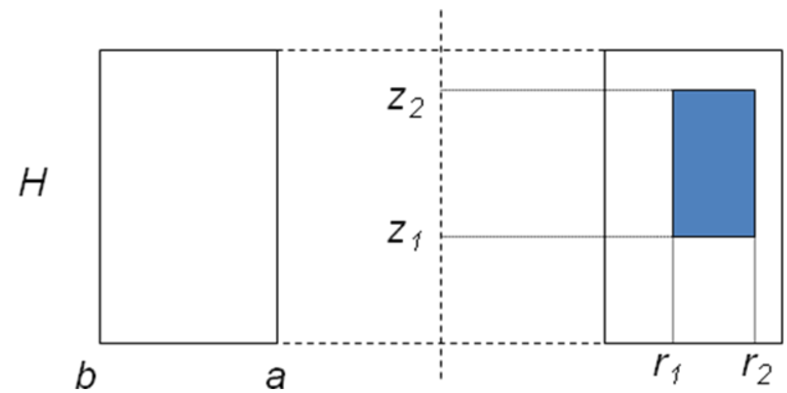
Esercizi di elettrodinamica

Esercizio 1

È dato un toroide a sezione rettangolare di dimensioni *H* e *b-a* (vedi figura) composto di *N* spire. All'interno del toroide, su una sezione azimutale, è posta una spira rettangolare di dimensioni l_z e l_r.



Trovare

a) l'induttanza mutua tra il toroide e la spira.

La spira sia percorsa da corrente constante;

b) supposto che essa si muova di moto oscillatorio sul piano di sezione (senza uscire dal toroide) in direzione *z* con velocità istantanea *v(t),* determinare la fem indotta nella bobina del toroide.

c) Supposto che la spira si muova di moto oscillatorio sul piano di sezione (senza uscire dal toroide) in direzione *r* con velocità istantanea *v(t),* determinare la fem indotta nella bobina del toroide.

Soluzione

a) La mutua induttanza *M* si trova calcolando il flusso del campo generato dal toroide attraverso la spira:

$$M = \frac{\Phi(B_{tor} \mid S_{spira})}{i_{tor}} = \frac{1}{i_{tor}} \iint_{S_{spira}} \vec{B}_{tor} \cdot d\vec{A} = \int_{z_1}^{z_2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N}{r}\, dr dz = \frac{\mu_0}{2\pi} N(z_2 - z_1)\log\frac{r_2}{r_1}$$

b) la fem è nulla in quanto il flusso non cambia quando la spira si muove lungo *z*.

c) la fem si calcola come

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Mi_{spira})}{dt} = -\frac{dM}{dt} i_{spira} = -i_{spira}\frac{\mu_0}{2\pi} Nl_z \frac{d}{dt}\left(\log\frac{r_2}{r_1}\right) =$$

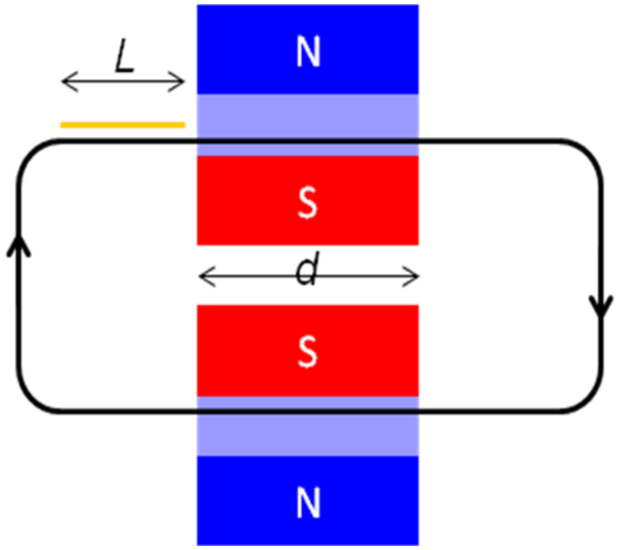
$$= -i_{spira}\frac{\mu_0}{2\pi} Nl_z \frac{1}{r_1 r_2}(v_2 r_1 - r_2 v_1) = i_{spira}\frac{\mu_0}{2\pi} Nl_z \frac{v}{r_1 r_2}(r_2 - r_1)$$

l'ultimo passaggio vale poiché le velocità dei due estremi sono uguali. Infine:

$$fem = i_{spira}\frac{\mu_0}{2\pi} Nl_z l_r \frac{v(t)}{r_1(t)(r_1(t) + l_r)}$$

Esercizio 2

Una spira quadrata di lato *L* e` montata su un nastro chiuso che scorre con velocita` *v* tra le espansioni polari di due magneti (vedi figura). Sia *l* la lunghezza del nastro e *d(>L)* la larghezza delle espansioni polari.



Per semplicita` di calcolo si supponga che il campo magnetico *B* sia uniforme tra le espansioni polari e nullo al di fuori di esse. Trovare

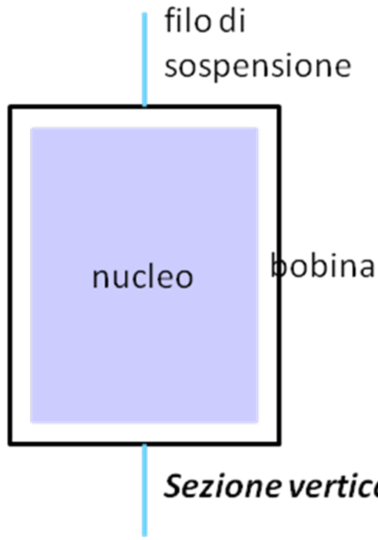
a) il valore della fem indotta nella spira, in funzione del tempo, in un intervallo di tempo pari ad un periodo di moto *T* del nastro.
b) Si determini quanto a lungo, all'interno del ciclo, la fem e` diversa da zero.
c) Rispondere alla domanda (a) nel caso in cui la polarita` del magnete inferiore venga invertita.

Soluzione

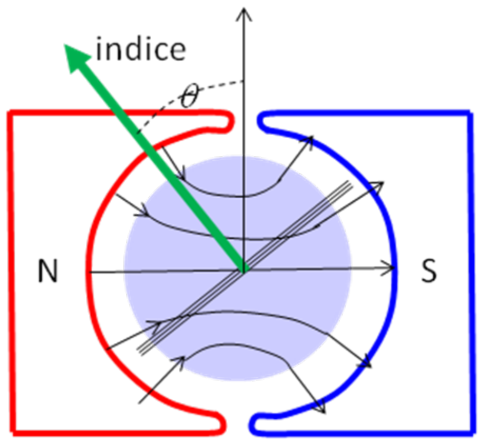
a) Prima che la spira entri tra le espansioni polari del primo magnete la fem e` nulla. Quando la spira e` in parte entrata tra le espansioni e in parte e` ancora fuori, la fem e`:
$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{-BdA}{dt} = \frac{BLvdt}{dt} = BLv$$
Quando la spira e` tutta contenuta tra le espansione polari la fem e` di nuovo nulla. Quando la spira e` in parte uscita dalle espansioni e in parte e` ancora dentro, la fem assume lo stesso valore che all'entrata, ma con segno opposto: $-BLv$. Quando la spira e` uscita la fem e` nulla. La successione si ripete uguale per il secondo magnete.
b) La fem e` diversa da zero mentre la spira entra ed esce dalle espansioni, quindi per un tempo di quattro volte il tempo di transito: $\tau = 4\frac{L}{v}$
c) La fem relativa al primo magnete non cambia; il segno della fem relativa al secondo magnete e` opposto rispetto al punto (a).

Esercizio 3

Un amperometro a bobina mobile e` costituito da un sottile pacchetto di $N$ spire rettangolari. La bobina (di base $2a$ e altezza $h$) e` posta attorno ad un nucleo di ferro di forma cilindrica ed e` libera di ruotare attorno a un filo di sospensione verticale, coincidente con l'asse del cilindro.



Sezione verticale



Sezione orizzontale

Attorno al nucleo vi sono due espansioni polari opportunamente sagomate, in modo che il campo magnetico nel traferro (cioe` tra le espansioni ed il nucleo) sia il piu` radiale e uniforme possibile. L'indice dello strumento, solidale con la bobina, in assenza di corrente circolante nella bobina, assumerebbe (vedi sezione orizzontale) la direzione verso l'alto. Quando la bobina e` percorsa da corrente la forza di Lorentz fa ruotare la bobina (e l'indice) di un angolo θ. A questo movimento si oppone il momento meccanico di torsione elastica del filo di sospensione.
Determinare:

a) il momento dovuto alla forza di Lorentz, supposta nota la corrente i circolante nella bobina e il campo magnetico B nel traferro (supporre che il campo sia uniforme su tutta l'altezza della bobina);
b) il momento dovuto all'elasticita` del filo;
c) l'equazione del moto della bobina (trascurando il momento frenante dovuto alla variazione di flusso magnetico nella bobina causato dalla rotazione). Si indichi con I il momento d'inerzia della bobina rispetto all'asse di rotazione.

Soluzione

a) Il momento e` la somma dei momenti dovuti ai due lati verticali della spira, e ciascuno di questi e` dato dal prodotto tra il braccio $\vec{a}$ e la forza di Lorentz $\vec{F}_L = ihBN\hat{\theta}$. Il momento e` inoltre diretto lungo l'asse verticale:

   $$\vec{\tau}_L = 2aF_L\hat{k} = 2aihBN\hat{k}$$

b) Il momento elastico e` diretto lungo l'asse verticale, ma con verso opposto al momento elettrodinamico, e` inoltre proporzionale, secondo una costante α, all'angolo di torsione θ:

   $$\vec{\tau}_{el} = -\alpha\theta\hat{k}\,.$$

c) L’equazione del moto e` infine: $I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_L + \vec{\tau}_{el}$, ovvero, in termini scalari:

$$I\frac{d\omega}{dt} = 2aihBN - \alpha\theta \; .$$

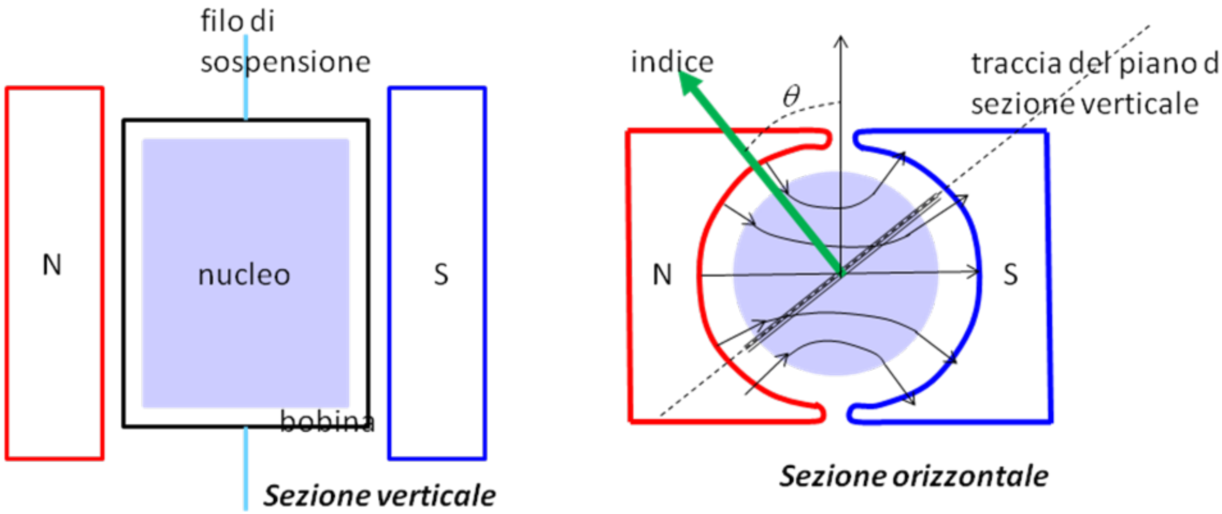
Riordinando ed esprimendo in termini delle derivate di θ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{I}\theta = \frac{2aihBN}{I}$$

che e` l’equazione del moto armonico, con posizione di equilibrio $\theta_{eq} = \dfrac{2aihBN}{\alpha}$.

Esercizio 4

Un amperometro a bobina mobile è costituito da un sottile pacchetto di N spire rettangolari. La bobina (di base $2a$, altezza h e resistenza R_b) è posta attorno ad un nucleo di ferro di forma cilindrica ed è libera di ruotare attorno a un filo di sospensione verticale, coincidente con l'asse del cilindro.



Attorno al nucleo vi sono due espansioni polari opportunamente sagomate, in modo che il campo magnetico nel traferro (cioè tra le espansioni ed il nucleo) sia il più radiale e uniforme possibile. L'indice dello strumento, solidale e perpendicolare alla bobina, in assenza di corrente circolante nella bobina, assumerebbe (vedi sezione orizzontale) la direzione verso l'alto. Quando la bobina è percorsa da corrente, la forza di Lorentz fa ruotare la bobina (e l'indice) di un angolo θ. A questo movimento si oppone il momento meccanico di torsione elastica del filo di sospensione.

d) Con riferimento alle linee di campo tracciate in figura, determinare il flusso del campo B attraverso la bobina (suggerimento: come superficie di flusso usare S che ha come bordo la bobina ed è la metà della superficie cilindrica che 'aderisce' al nucleo; sfruttare la simmetria del sistema e fare attenzione alle linee di campo entranti e uscenti; trascurare il flusso attraverso le basi);

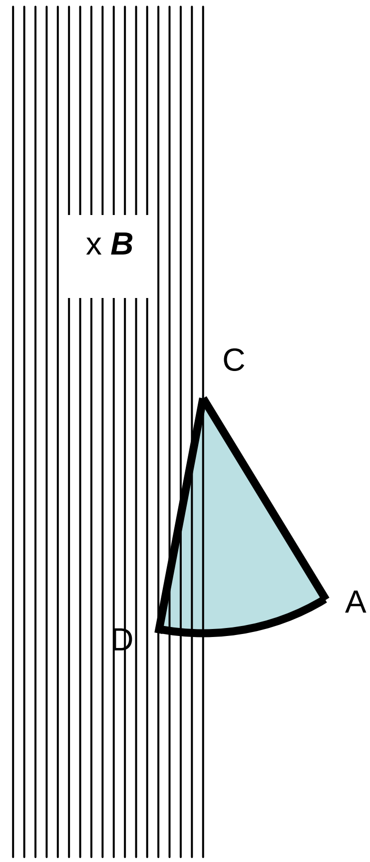
e) supposto che l'amperometro sia in serie ad un carico di resistenza R, determinare la corrente indotta dal moto della bobina.

Soluzione

d) Il flusso è definito come $\Phi(B) = N\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$ e poiché il campo è con buona approssimazione radiale e uniforme, il prodotto scalare nell'integrale sarà negativo e pari a $-Bda$ o positivo e uguale a Bda. Per tale motivo, i contributi relativi agli intervalli angolari $\left[-\pi+\theta, -\frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, -\theta\right]$ si compenseranno. Rimangono solo i contributi relativi all'intervallo $[-\theta, \theta]$ che in totale danno un flusso di $\Phi(B) = NBA(2\theta) = NB2a\theta h$ ove A è l'area della porzione di superficie laterale di ampiezza 2θ.

e) La corrente autoindotta è data da $i=\frac{fem}{R_b+R}=\frac{1}{R_b+R}\left(-\frac{d\Phi}{dt}\right)$. Inserendo l'espressione trovata per il flusso otteniamo $i=-\frac{2ahBN}{R_b+R}\frac{d\theta}{dt}$.

Esercizio 5



Una spira ACD, di resistenza R, ha la forma di un settore circolare, con angolo al centro C di ampiezza Θ e raggio a. La spira giace su un piano orizzontale e può ruotare attorno all'asse verticale fisso passante per C e perpendicolare al piano. Nella parte sinistra della figura (tratteggiata) è presente un campo magnetico uniforme B, perpendicolare al piano della spira, mentre nella parte destra il campo è nullo (per semplicità si suppone che il campo cambi valore bruscamente tre le due parti). La spira ruoti con velocità angolare istantanea ω. Diciamo θ la porzione dell'angolo Θ immersa nel campo $\boldsymbol{B}$. Si vuole determinare:

a) la corrente indotta nella spira nei tre casi possibili: (i) quando è tutta fuori dal campo $\boldsymbol{B}$, (ii) quando è in parte nel campo e in parte fuori, e (iii) quando è tutta nel campo;
b) la forza elettrodinamica totale agente sulla spira nei tre casi.

Soluzione

a) La corrente indotta è proporzionale alla *fem*, dovremo pertanto determinare quest'ultima. Nei casi (i) e (iii) la *fem* (e quindi la corrente) è nulla, in quanto il flusso del campo non varia. Nel caso (ii), detta θ la porzione dell'angolo Θ immersa nel campo $\boldsymbol{B}$, la *fem* è data da

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdA}{dt} = -\frac{Ba^2 d\theta}{2dt} = -\frac{1}{2}Ba^2\omega,$$

e la corrente da $$i = \frac{fem}{R} = -\frac{Ba^2}{2R}\omega.$$

b) Nei casi (i) e (iii) la forza è nulla. Nel caso (ii) la forza è data da due contributi. Il primo e\` la forza agente sul lato DC immerso nel campo: essa ha direzione azimutale e sia che la spira entri o esca dal campo, si oppone al moto di rotazione della spira e vale

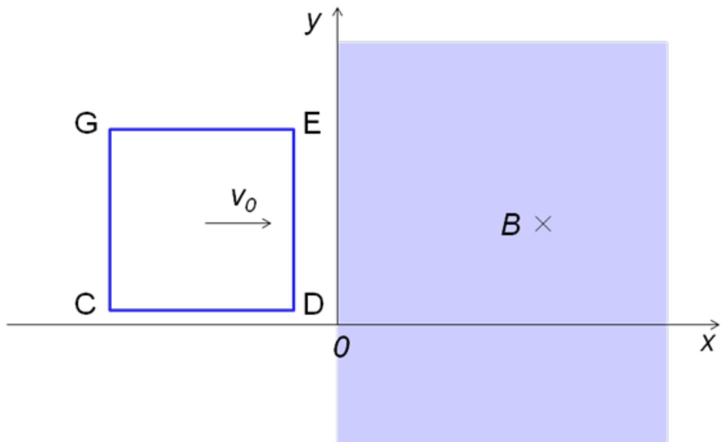
$$\vec{F}_\theta = i\vec{a}\times\vec{B} = iaB\hat{\theta} = -\frac{B^2a^3}{2R}\omega\hat{\theta}$$

Il secondo contributo e\` dato dalla porzione DK immersa nel campo dell'arco DA, ha direzione radiale ed è compensata dalla reazione V del vincolo in C. Essa vale

$$\vec{F}_r = i\int_{AK} d\vec{l}\times\vec{B} = i\left(D\vec{K}\right)\times\vec{B} = i2a\sin\frac{\theta}{2}B\hat{r} = -\frac{B^2a^3}{R}\omega\sin\frac{\theta}{2}\hat{r}$$

Esercizio 6

E` data una spira conduttrice quadrata di lato *L* e resistenza *R*, vincolata sul piano *xy*, in moto lungo *x* con velocita` iniziale v_0. Nel punto *x=0* la spira entra in un campo magnetico *B* uniforme, di verso entrante nel foglio (il campo per *x<0* venga supposto nullo per semplicita`).



Trovare

a) la fem indotta nella spira nei tre casi seguenti: la spira non ha ancora raggiunto l'asse *y*, la spira e` a cavallo dell'asse *y* (cioe` per $x_D > 0$ e $x_C < 0$) e la spira ha sorpassato l'asse *y*; esplicitare il verso della fem;

b) trovare la forza (modulo, direzione e verso) agente sulla spira dovuta all'interazione tra la corrente indotta e il campo magnetico nei tre casi citati al punto (a);

c) dire se la forza varia nell'intervallo di tempo occorrente alla spira per attraversare l'asse *y*. Giustificare la risposta.

Soluzione

a) La fem indotta e` diversa da zero solo quando la spira e` a cavallo dell'asse *y*. Prima e dopo infatti il flusso del campo non varia (prima perche' *B* e` nullo, dopo perche' *B* e` uniforme). Quando la spira e` a cavallo abbiamo $\Phi = -BLx$ ove con *x* indichiamo la parte del lato CD che ha oltrepassato l'asse *y*. La *fem* e` dunque

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLv$$

Il verso della *fem* e` tale da far circolare corrente in verso antiorario.

b) la corrente indotta nella spira e` $i = fem / R$ e la forza e` dovuta al solo lato DE. Infatti le porzioni dei lati CD e GE immerse nel campo magnetico danno forze uguali e contrarie e il lato CG non e` soggetto a forza, in quanto esterno al campo. La forza totale e` dunque diversa da zero solo quando la spira e` a cavallo dell'asse *y* e vale, in modulo

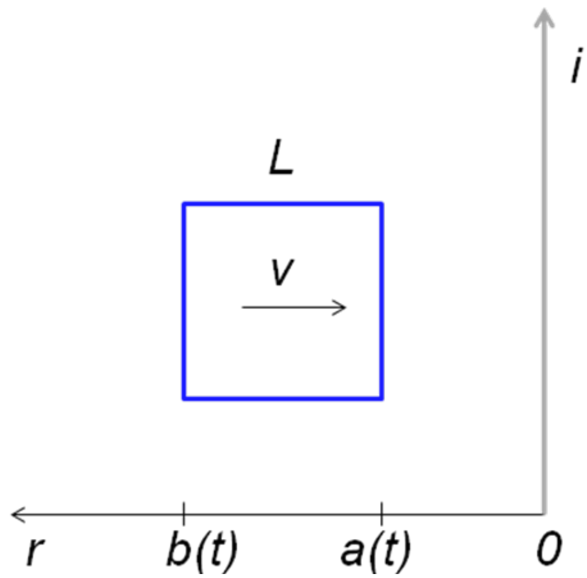
$$F = iLB = \frac{fem}{R} LB = \frac{(LB)^2}{R} v$$

con la regola della mano destra si trova poi che essa e` diretta in verso *x* negativo.

c) La forza varia perche’ essendo una forza deceleratrice, essa fa diminuire la velocita` della spira e questo, a sua volta, porta ad una diminuzione della forza.

Esercizio 7

È data una spira quadrata di lato *L* e resistenza *R*, ed un filo percorso da corrente *i* lungo *z* (vedi figura). Diciamo *a* e *b* le distanze del lato parallelo più vicino e più lontano dal filo. La spira si muova con velocità *v* nel piano *rz* verso il filo.



Trovare:

a) il flusso del campo *B* attraverso la spira;

b) la *fem* e la corrente *I* indotte nella spira, specificandone il verso;

c) la forza totale agente sulla spira.

Soluzione

a) Il campo magnetico è del tipo Biot-Savart, il flusso è quindi

$$\Phi(B) = \int_{spira} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} L dr = \frac{\mu_0}{2\pi} iL \log\frac{b(t)}{a(t)}$$

ove si è scelto di orientare la superficie della spira parallelamente al campo, cioè in verso antiorario.

b) la *fem* si trova derivando rispetto al tempo

$$fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} iL \frac{a(t)}{b(t)} \frac{b'(t)a(t) - b(t)a'(t)}{a^2(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi} iLv \frac{b(t) - a(t)}{a(t)b(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{iL^2 v}{a(t)b(t)}$$

ove si è posto $a'(t) = b'(t) = v$ e $b(t) - a(t) = L$

la corrente è data da $I = \frac{fem}{R}$, il verso di entrambe è orario.

c) Siccome le forze agenti sui lati paralleli all'asse *r* sono uguali e contrarie, basta considerare le forze agenti sui lati paralleli all'asse *z*. Queste sono

$$F_b = ILB\big(b(t)\big) \qquad\qquad F_a = ILB\big(a(t)\big)$$

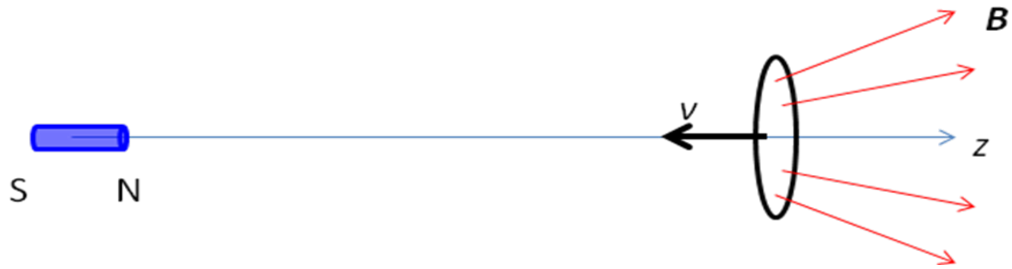
la forza totale agente sulla spira dovuta al campo magnetico è dunque

$$F_{tot} = F_a - F_b = IL\Big[B\big(a(t)\big) - B\big(b(t)\big)\Big] = IL\frac{\mu_0}{2\pi}i\left[\frac{1}{a(t)} - \frac{1}{b(t)}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iIL^2}{a(t)\big[a(t)+L\big]}$$

Siccome F_a è maggiore di F_b la forza risultante è diretta nel verso *r* positivo.

Esercizio 8

Una spira circolare di raggio *a* e resistenza *R* viene lanciata verso un dipolo magnetico di valore *m* con velocità iniziale v_0 (l'asse del dipolo e della spira coincidano, vedi figura).



Ricordando l'espressione del campo di dipolo in coordinate cilindriche

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\varphi \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{K}{(z^2+r^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \dfrac{3rz}{z^2+r^2} \\ 0 \\ \dfrac{3z^2}{z^2+r^2} - 1 \end{pmatrix}$$

ove si è posto $K = \dfrac{\mu_0}{4\pi} m$ per semplicità, *z* è la distanza tra il centro della spira e del dipolo e *r* è la distanza dall'asse *z*. Si supponga $a \ll z$ di modo che, vicino alla spira, si possa trascurare r^2 nel denominatore di *B*.

a) Calcolare il flusso del campo ***B*** attraverso la spira (preliminarmente si determini quale componente del campo entra nel calcolo);
b) calcolare la corrente indotta nella spira;
c) calcolare la forza agente sulla spira (preliminarmente si determini quale componente del campo entra nel calcolo).

Soluzione

Innanzitutto scriviamo l'espressione del campo trascurando i termini in *r* di ordine maggiore di uno:

$$\vec{B} \approx \frac{K}{z^3} \begin{pmatrix} \dfrac{3r}{z} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Come superficie su cui effettuare il flusso conviene scegliere il cerchio che poggia sulla spira, in tal caso la sola componente di ***B*** che entra nel calcolo è quella *z*:

$$\Phi(B) = \iint_{C(spira)} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \iint_{C(spira)} B_z da = 2\frac{K}{z^3} \iint_{C(spira)} da = 2\frac{K}{z^3}\pi a^2$$

b) la corrente indotta è data da

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(2\frac{K}{z^3}\pi a^2\right) = -\frac{1}{R}2K\pi a^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z^3}\right) =$$

$$= \frac{6K\pi a^2}{R}\frac{1}{z^4}\frac{d}{dt}(z) = \frac{6K\pi a^2}{Rz^4}v$$

ove $v = \frac{dz}{dt} < 0$ è la velocità istantanea della spira.

c) La forza agente sulla spira è

$$\vec{F} = \oint_{spira} id\vec{l} \times \vec{B}$$

scomponendo il campo e la forza lungo gli assi, otteniamo

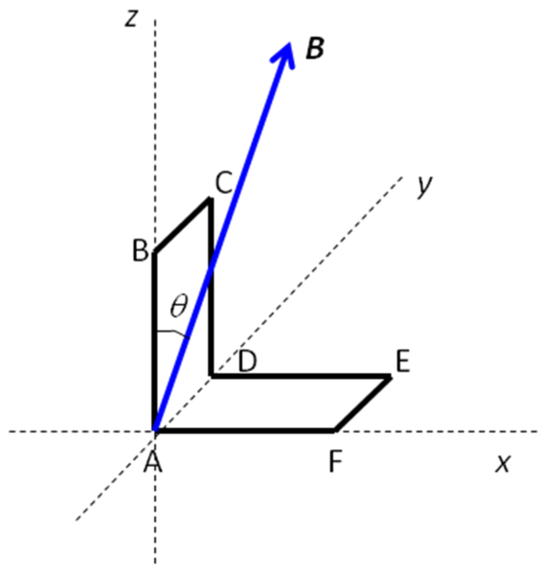
$$\hat{r}F_r + \hat{k}F_z = \oint_{spira} id\vec{l} \times \vec{B}_z + \oint_{spira} id\vec{l} \times \vec{B}_r$$

per simmetria il primo integrale si annulla e rimane

$$F = F_z = -\oint_{spira} idlB_r = -i\frac{3Ka}{z^4}\oint_{spira} dl = -\frac{3Ka}{z^4}i2\pi a = -\frac{6K\pi a^2}{z^4}i = -\left(\frac{6K\pi a^2}{z^4}\right)^2\frac{v}{R} > 0$$

Esercizio 9

Due studenti vogliono calcolare il flusso di un campo magnetico uniforme ***B*** concatenato con una spira non piana (vedi figura)



in cui i vertici A, B, C, D, E, F coincidono con sei degli otto vertici di un cubo da lato *L*. La spira può ruotare attorno all'asse *y*, cosicché sia il lato AB che AF giacciono sempre nel piano *xz*. Nel sistema di riferimento scelto, il campo *B* non ha componenti lungo *y*. Il primo studente sceglie come superficie di integrazione l'unione dei due quadrati ABCD e DEFA. Il secondo studente sceglie invece l'unione del rettangolo BCEF e dei due triangoli ABF e DCE. Sia θ l'angolo tra la direzione AB e il campo magnetico in un istante arbitrario di tempo.

a) Calcolare il flusso sulla superficie scelta dal primo studente.
b) Calcolare il flusso sulla superficie scelta dal secondo studente.
c) trovare la *fem* indotta nella spira se essa ruota di moto circolare uniforme con velocità angolare di rotazione ω.

Soluzione

a) La prima scelta dà:

$$\Phi(B) = \Phi_{ABCD}(B) + \Phi_{DEFA}(B) = BA_{ABCD}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + BA_{DEFA}\cos\theta = BA(\sin\theta + \cos\theta)$$

Ove si è indicata con *A* l'area comune delle due superfici.

b) La seconda scelta dà:

$$\Phi'(B) = \Phi_{BCEF}(B) + \Phi_{ABF}(B) + \Phi_{DCE}(B) = BA_{BCEF}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + 0 + 0 =$$

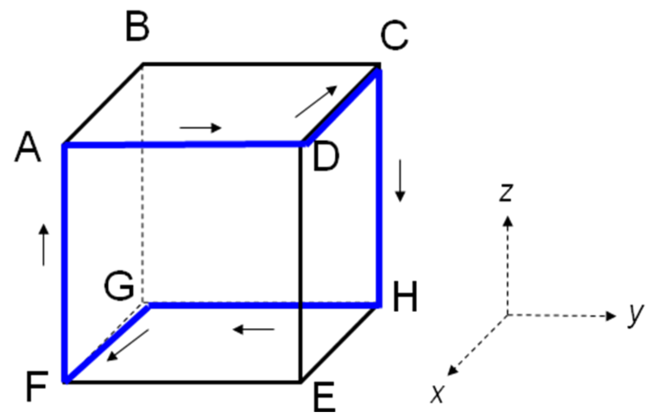
$$= BA'\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta + \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\right) = BA'\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$$

ove con *A'* si è indicata l'area del rettangolo BCEF e si è tenuto conto che il flusso sui due triangoli è nullo. La relazione tra le aree *A* e *A'* è $A' = \sqrt{2}A$, ne segue, come dev'essere, che i due calcoli danno lo stesso risultato.

c) La *fem* si trova derivando il flusso rispetto al tempo:

$$fem = -\frac{d}{dt}\left[BA\left(\sin\omega t + \cos\omega t\right)\right] = BA\omega\left(-\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

Esercizio 10



È data una spira non piana percorsa da corrente *I* (vedi curva blu in figura, la figura ABCDEFGH è un cubo di lato *L*) e immersa in un campo magnetico uniforme diretto lungo *z* e dipendente da *t* secondo l'espressione

$$\vec{B} = B_0 f(t)\hat{k}$$

Trovare:

a) il flusso del campo concatenato con la spira;
b) la *fem* indotta nella spira.

Carlo e Francesca stanno considerando il problema e Carlo propone di complicarlo un po' assumendo che il campo dipenda da *z* secondo l'espressione

$$\vec{B} = B(z) f(t)\hat{k} = (B_0 - \gamma z) f(t)\hat{k}$$

Francesca ci pensa un po' su ed esclama: "Non è possibile, questa espressione è in disaccordo con una delle leggi di Maxwell"

c) quale legge di Maxwell viola l'espressione del campo proposta da Carlo? Dimostrare tale violazione usando la formulazione integrale della legge.

Soluzione

a) Per calcolare il flusso scegliamo come superficie che poggia sul circuito la superficie unione delle facce ABCD, BCHG, GFAB:

$$\Phi = \Phi_{ABCD} + \Phi_{BCHG} + \Phi_{GFAB}$$

Gli ultimi due termini sono nulli poiché su queste facce il campo è parallelo alla superficie, il flusso vale quindi $\Phi = \Phi_{ABCD} = L^2 B_0 f(t)$.

b) La *fem* vale $$fem = -\frac{d}{dt}\Phi = -L^2 B_0 \frac{d}{dt} f(t).$$

c) La legge violata è quella dell'assenza di cariche magnetiche. Se calcoliamo il flusso del campo attraverso la superficie del cubo otteniamo infatti (le facce laterali danno contributo nullo):

$$\Phi = \Phi_{ABCD} + \Phi_{EFGH} = L^2 B(L) f(t) - L^2 B(0) f(t) = -\gamma L^3 f(t) \neq 0$$

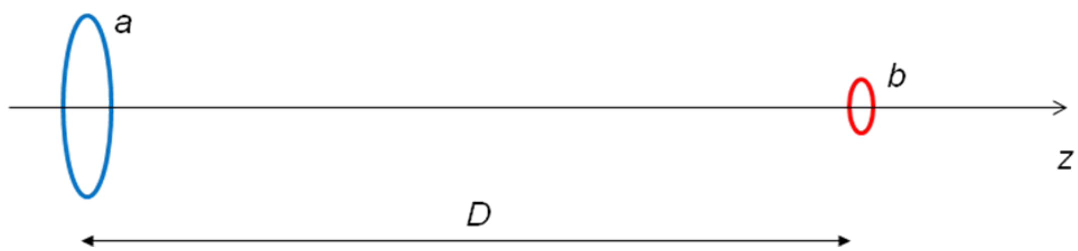
cioè un risultato non nullo, contrariamente al dettato della legge.

Esercizio 11

È data una spira circolare di raggio *a*, corrente I_1 e momento magnetico *m*. A distanza sufficientemente grande il campo magnetico generato dalla spira è dato da

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\varphi \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \begin{pmatrix} \frac{3r}{z} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{z^3}$$

A grande distanza *D* dalla spira è posta una seconda spira circolare, che funge da rivelatore della prima, di resistenza R_2, raggio *b*, e asse coincidente con la prima (vedi figura).



Se $I_2(t) = I_{2,0} \sin \omega t$ è la corrente indotta nella seconda spira dalla prima, trovare

a) l'espressione della corrente nella prima spira.

Carlo e Francesca stanno contemplando la soluzione del problema, quando Carlo dice: "Conosciamo *b* e R_2, supponiamo anche di conoscere *a* e *D*, tuttavia, per conoscere *completamente* la corrente nella prima spira, non basta misurare la corrente nella seconda."

b) A cosa si riferisce Carlo e perché il rivelatore non permette di determinare completamente la corrente I_1?

Soluzione

a) La relazione tra le correnti delle due spire si trova mediante la legge di Faraday:

$$I_2 = \frac{fem_2}{R_2} = -\frac{1}{R_2}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}\iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 =$$

$$= -\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}\iint_{S_1} B_z r dr d\varphi = -\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt} 2\pi \int_0^b \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{2}{D^3} r dr =$$

$$= -\frac{1}{R_2}\frac{\mu_0}{2\pi D^3}\frac{d}{dt}\left(\pi a^2 I_1 \pi b^2\right) = -\frac{1}{R_2}\frac{\mu_0}{2D^3}\pi a^2 b^2 \frac{dI_1}{dt} = -K\frac{dI_1}{dt}$$

Nota I_2, I_1si trova per integrazione:

$$I_1(t) = -\frac{1}{K}\int I_2(t)dt + const. = -\frac{1}{K}\int I_{2,0}\sin \omega t dt + const. =$$

$$= \frac{\omega}{K} I_{2,0}\cos \omega t + const.$$

b) Carlo si riferisce al fatto che I_1 si determina mediante un processo di integrazione e quindi a meno di una costante arbitraria, che nel nostro caso è la eventuale componente continua della corrente I_1, che non contribuisce alla *fem* della seconda spira e quindi a I_2.