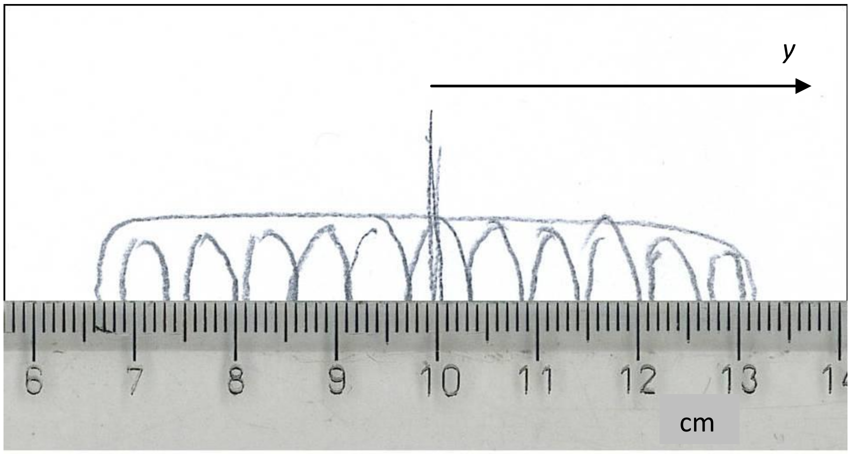
**Interferenza**

Due fenditure distanti *D*=0.6 mm, illuminate da un fascio di luce coerente, producono l'interferenza disegnata in figura su uno schermo distante *d*=534 cm da esse.




Ricordando l'espressione dell'intensita` della figura di Interferenza

$$I = I_0 \cos^2\left(\pi \frac{D}{\lambda} \sin\alpha\right)$$

a) misurare sulla figura la distanza *y* del quarto massimo laterale dal massimo centrale;
b) esprimere $\alpha$ in funzione di *y*;
c) determinare la lunghezza d'onda $\lambda$ della luce usata.

**Soluzione**

L'intensita` ha un massimo quando la fase e` un multiplo intero di $\pi$.

$$\pi \frac{D}{\lambda} \sin\alpha = m\pi .............m \in Z$$

Gli angoli corrispondenti ai massimi sono $\sin\alpha_m = m\frac{\lambda}{D}$ ; noi vogliamo il quarto massimo, quindi

$$\sin\alpha_4 = 4\frac{\lambda}{D}$$

a) per trovare la distanza del quarto massimo possiamo dividere a meta` la distanza tra il quarto massimo a sinistra e quello a destra del massimo centrale. Dalla figura risulta

$$y_4 = \frac{4.6cm}{2} = 2.3cm$$

b) vista la grande distanza tra le fenditure e lo schermo, possiamo approssimare il seno con la tangente o con l’arco

$$tg\alpha_4 = \frac{y_4}{d} \approx \alpha_4 \approx \sin\alpha_4 = 4\frac{\lambda}{D}$$

c) e ricavare infine la lunghezza d’onda

$$\lambda = \frac{y_4 D}{4d} = \frac{2.3 \cdot 0.6}{4 \cdot 534} = 646nm$$

**Polarizzazione**

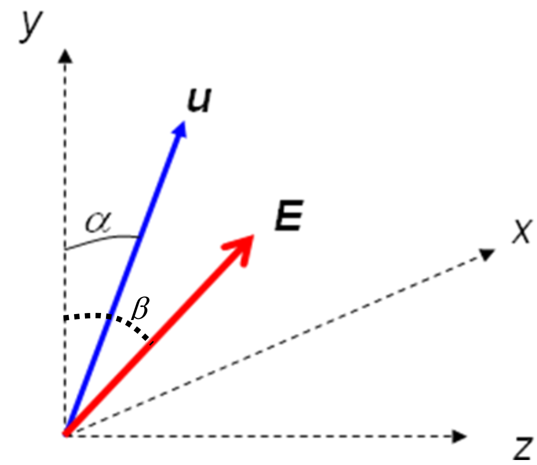
Carlo e Francesca vogliono studiare la luce emessa in direzione $x$ da un laser di cui non sanno se la polarizzazione è lineare

$$\vec{E}_{i,L} = E_y \sin(kx - \omega t)\hat{j} + E_z \sin(kx - \omega t)\hat{k}$$

o circolare

$$\vec{E}_{i,C} = E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$$

Hanno a disposizione un polarizzatore ad assorbimento e uno schermo su cui rilevare l'intensità della luce. Supposto di porre il polarizzatore con l'asse (nel piano $yz$) inclinato di un angolo generico $\alpha$ rispetto all'asse $y$,




a) determinare il campo elettrico $\boldsymbol{E}_{f,L}$ dell'onda al di là del polarizzatore nel primo caso;
b) determinare il campo elettrico $\boldsymbol{E}_{f,C}$ dell'onda al di là del polarizzatore nel secondo caso.

Carlo e Francesca studiano le due formule cercando di capire cosa fare per scoprire qual è la polarizzazione della luce emessa dal laser. Ad un tratto Francesca dice: "Bisogna agire sul polarizzatore."

c) Qual è l'azione da fare sul polarizzatore per poter scegliere tra i due casi? Spiegare il motivo per cui l'idea funziona.

**Soluzione**

Al di là del polarizzatore sopravvive solo la componente parallela a $\boldsymbol{u}$:

a) Nel caso lineare il campo si può esprimere rispetto all'angolo $\beta$ formato con l'asse $y$:

$$E_y = E_0 \cos\beta$$

$$E_z = E_0 \sin\beta$$

$$\vec{E}_{i,L} = \left(E_0 \cos\beta\hat{j} + E_0 \sin\beta\hat{k}\right)\sin(kx - \omega t)$$

Al di là del polarizzatore avremo:

$$\vec{E}_{f,L} = \left(\vec{E}_{i,L} \cdot \hat{u}\right)\hat{u} = \left\{\left(E_y \hat{j} + E_z \hat{k}\right)\sin(kx - \omega t) \cdot \hat{u}\right\}\hat{u} =$$
$$= \left\{E_y \hat{j} \cdot \hat{u} + E_z \hat{k} \cdot \hat{u}\right\}\sin(kx - \omega t)\hat{u}$$

Esprimendo $\boldsymbol{u}$ in termini dei versori $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$: $\hat{u} = \cos\alpha\hat{j} + \sin\alpha\hat{k}$ , otteniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{f,L} &= \left\{E_y \cos\alpha + E_z \sin\alpha\right\}\sin(kx-\omega t)\hat{u} = \\
&= \left\{E_0 \cos\beta\cos\alpha + E_0 \sin\beta\sin\alpha\right\}\sin(kx-\omega t)\hat{u} = \\
&= E_0 \cos(\beta-\alpha)\sin(kx-\omega t)\hat{u} = \\
&= E_u \sin(kx-\omega t)\hat{u}
\end{aligned}
$$

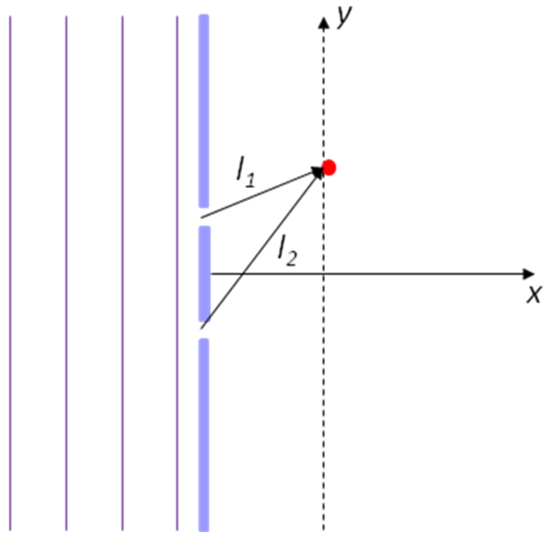
b) Nel caso circolare

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{f,C} &= \left(\vec{E}_{i,C}\cdot\hat{u}\right)\hat{u} = \left\{\left[E_0 \sin(kx-\omega t)\hat{j} + E_0 \cos(kx-\omega t)\hat{k}\right]\cdot\hat{u}\right\}\hat{u} = \\
&= \left\{E_0 \sin(kx-\omega t)\hat{j}\cdot\hat{u} + E_0 \cos(kx-\omega t)\hat{k}\cdot\hat{u}\right\}\hat{u} = \\
&= \left\{E_0 \sin(kx-\omega t)\cos\alpha + E_0 \cos(kx-\omega t)\sin\alpha\right\}\hat{u} = \\
&= E_0 \sin(kx-\omega t+\alpha)\hat{u}
\end{aligned}
$$

c) Bisogna ruotare il polarizzatore e osservare come cambia l'intensità della luce. Nel primo caso $E_u$ varia dal valore massimo quando ***u*** è parallelo a ***E***, a zero, quando i due vettori sono perpendicolari. L'intensità presenterà quindi un massimo e un minimo in corrispondenza di tali posizioni. Nel secondo caso l'ampiezza del campo rimane sempre uguale a $E_0$, e quindi l'intensità non dipende dall'orientamento del polarizzatore.

**Interferenza**

Un'onda piana sulla superficie di un liquido, di frequenza $f$ = 2 Hz e velocita` $v$ = 2 m/s, incide perpendicolarmente su uno schermo che porta due fenditure distanti $d$ = 2 m. Si vuole misurare la posizione del primo massimo di interferenza con un rivelatore posto in un punto a distanza $D$ = 2 m dallo schermo.




Determinare :

a) il cammino 'ottico' $l$ dalla fenditura alla posizione del rivelatore, per ciascuna fenditura, in funzione della posizione $y$ del rivelatore;

b) la posizione $y_1$ del massimo laterale del primo ordine.

**Soluzione**

La lunghezza d'onda e` $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{2}{2} = 1m$.

a) Il cammino ottico relativo alla fenditura alta e`

$$l_1 = \sqrt{D^2 + (y - d/2)^2} = \sqrt{5 - 2y + y^2}$$

e quello relativo alla fenditura bassa e`

$$l_2 = \sqrt{D^2 + (y + d/2)^2} = \sqrt{5 + 2y + y^2}$$

b) Per ottenere un massimo d'interferenza, la differenza di cammino dev'essere uguale a un multiplo di lunghezza d'onda:

$$l_2 - l_1 = \sqrt{5 + 2y + y^2} - \sqrt{5 - 2y + y^2} = n\lambda$$

semplificando si ottiene $4y^2\left(4 - n^2\lambda^2\right) = n^2\lambda^2\left(20 - n^2\lambda^2\right)$ da cui

$$y = \frac{n\lambda}{2}\sqrt{\frac{20 - n^2\lambda^2}{4 - n^2\lambda^2}}$$ e il primo massimo si trova in

$$y_1 = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{20 - \lambda^2}{4 - \lambda^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{20 - 1}{4 - 1}} = 1.26m$$

**Interferenza**

Uno schermo, illuminato con la sovrapposizione di due onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda $\lambda_1$=700 nm e $\lambda_2$=420 nm, porta due fenditure parallele distanti $d$=0.5 mm. Avremo contemporaneamente interferenza per ciascuna onda. Ricordando l'espressione dell'intensita` per l'interferenza ($\alpha$ e` la direzione dei raggi uscenti dalla fenditura, rispetto alla direzione di incidenza)

$$I_{interf} = I_0 \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha\right)$$

a) trovare la condizione per cui un massimo d'interferenza della prima onda coincide con un massimo della seconda.
b) Trovare la coppia di valori più piccoli per cui tale condizione è soddisfatta.
c) Potrebbe accadere che per due lunghezze d'onda arbitrarie tale condizione non possa mai essere soddisfatta? Giustificare la risposta.

**Soluzione**

a) I massimi d'interferenza si hanno quando la fase e` un multiplo di $\pi$. Per le due onde avremo

$$\pi \frac{d}{\lambda_1} \sin\alpha_1 = n_1 \pi \qquad\qquad \pi \frac{d}{\lambda_2} \sin\alpha_2 = n_2 \pi$$

affinche' i massimi coincidano occorre che gli angoli (e quindi i loro seni)

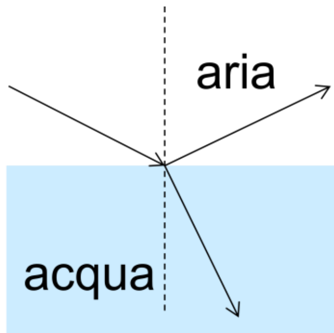
$$\sin\alpha_1 = n_1 \frac{\lambda_1}{d} \qquad\qquad \sin\alpha_2 = n_2 \frac{\lambda_2}{d}$$

siano uguali. Da qui segue $n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2$ ovvero $n_1 700 = n_2 420$

b) La coppia di valori minimi che verifica la condizione e` $n_1$ = 3, $n_2$ = 5.
c) Accade quando le due lunghezze d'onda non sono commensurabili.

**Polarizzazione**

Un'onda non polarizzata incide con angolo *i* uguale all'angolo di Brewster sulla superficie di separazione aria-acqua (l'indice di rifrazione dell'acqua e` 1.33), vedi figura.




Ricordando la relazione tra angolo di Brewster e indice di rifrazione

$$tg\theta_B = n$$

e le formule dei coefficienti di riflessione per la componente parallela al piano di incidenza e per quella perpendicolare

$$R_{||} = \left( \frac{tg(i-t)}{tg(i+t)} \right)^2 \qquad\qquad R_{\perp} = \left( \frac{\sin(i-t)}{\sin(i+t)} \right)^2$$

a) calcolare entrambi i coefficienti; calcolare anche i coefficienti di trasmissione;
b) calcolare il coefficiente di riflessione globale e quello di trasmissione globale dell'onda.

**Soluzione**

Troviamo l'angolo di Brewster $\theta_B = arctg(n) = arctg(1.33) = 53.05^\circ$ e l'angolo di trasmissione $t = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_B}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0.7993}{1.33}\right) = \arcsin(0.6010) = 36.94^\circ$

a) i coefficienti di riflessione sono

$$R_{||} = 0 \qquad\qquad R_{\perp} = \left( \frac{\sin(53.05 - 36.94)}{\sin 90} \right)^2 = (\sin 16.11)^2 = 0.0770$$

e quelli di trasmissione

$$T_{||} = 1 - R_{||} = 1 \qquad T_{\perp} = 1 - R_{\perp} = 1 - 0.0770 = 0.9230$$

b) il coefficiente di riflessione globale si trova considerando meta` della luce nello stato di polarizzazione parallelo al piano di incidenza e l'altra meta` nello stato perpendicolare, quindi l'intensita` riflessa globalmente e`

$$I_{rif} = \frac{I}{2} R_{||} + \frac{I}{2} R_{\perp} = I \frac{R_{||} + R_{\perp}}{2}$$

e il coefficiente di riflessione globale e`

$$R = \frac{I_{rif}}{I} = \frac{R_{||} + R_{\perp}}{2} = \frac{0 + 0.0770}{2} = 0.0385$$

e quello di trasmissione globale e`

$$T = 1 - R = 1 - 0.0385 = 0.9615$$

**Diffrazione, interferenza**

Uno schermo, illuminato con un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda$=500 nm, porta due fenditure parallele di ampiezza $a$=0.04 mm, distanti $d$=0.5 mm. Avremo contemporaneamente diffrazione da ciascuna fenditura e interferenza tra le due. Ricordando l'espressione dell'intensita` per la diffrazione e l'interferenza ($\alpha$ e` la direzione dei raggi uscenti dalla fenditura, rispetto alla direzione di incidenza)

$$I_{diff} = I_0 \left( \frac{\sin(\pi(a/\lambda)\sin\alpha)}{\pi(a/\lambda)\sin\alpha} \right)^2 \qquad I_{interf} = I_0 \cos^2\left( \pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha \right)$$

a) calcolare il numero di massimi di interferenza compresi nel massimo centrale di diffrazione.
b) Su uno schermo posto a distanza $D$=2 m dalle fenditure, calcolare la larghezza del primo massimo di diffrazione;
c) calcolare la distanza tra i massimi di interferenza compresi nel massimo centrale di diffrazione.

**Soluzione**

a) il massimo centrale di diffrazione è delimitato dai minimi di primo ordine:

$$\pi \frac{a}{\lambda} \sin\alpha_{dif} = \pm\pi \qquad \sin\alpha_{dif} = \pm\frac{\lambda}{a}$$

all'interno di questo intervallo sono presenti massimi di interferenza:

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha_{\text{int}} = \pm k\pi \qquad \sin\alpha_{\text{int}} = \pm k\frac{\lambda}{d}$$

occorre quindi che

$$k\frac{\lambda}{d} \le \frac{\lambda}{a} \qquad k \le \frac{d}{a}$$

il numero cercato sarà

$$N = 2\left[\frac{d}{a}\right] + 1 = 2\left[\frac{0.5}{0.04}\right] + 1 = 2[12.5] + 1 = 25$$

dove con la parentesi quadra si è indicata la parte intera di $d/a$, il fattore 2 tien conto della simmetria tra valori positivi e negativi e l'1 sommato, del massimo di interferenza centrale.

b) La larghezza e` pari differenza tra le posizioni del secondo e del primo minimo di diffrazione:

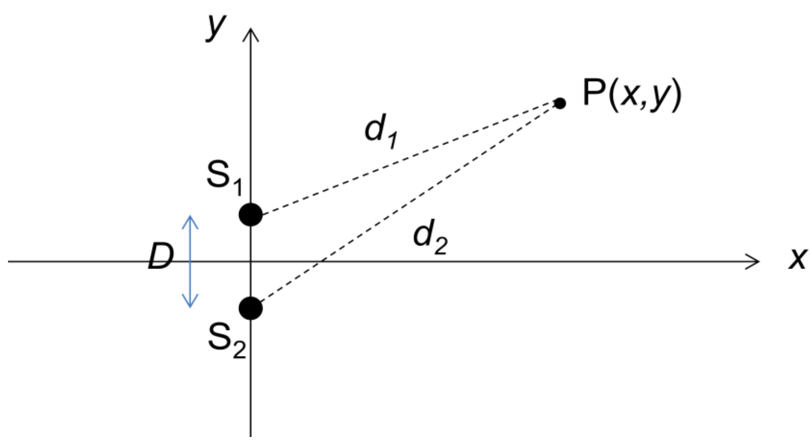
$$\Delta y_{dif} = Dtg\alpha_2 - Dtg\alpha_1 \approx D(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = D\left(2\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a}\right) = D\frac{\lambda}{a} = 2\frac{500nm}{0.04mm} = 2.5cm$$

c) La distanza tra i massimi di interferenza e`:

$$\Delta y_{\text{int}} = Dtg\left[(k+1)\frac{\lambda}{d}\right] - Dtg\left[k\frac{\lambda}{d}\right] \approx D\left[(k+1)\frac{\lambda}{d} - k\frac{\lambda}{d}\right] = D\frac{\lambda}{d} = 2\cdot\frac{500nm}{0.5mm} = 2mm$$

**Interferenza**

Due sorgenti di vibrazione meccanica in fase fra loro $S_1$, $S_2$, poste simmetricamente rispetto all'origine, distanti *D*, generano onde circolari sinusoidali trasversali di lunghezza d'onda $\lambda$ sulla superficie di un bacino d'acqua.




Detto P(*x*,*y*) un generico punto della superficie, trovare

a) le distanze $d_1$, $d_2$ del punto dalle sorgenti;

b) qual e` la condizione che il punto deve soddisfare per avere interferenza costruttiva delle due sorgenti?

c) determinare il luogo geometrico dei punti del piano *xy* che soddisfano (b).

**Soluzione**

a) Le distanze sono: $d_1 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} \qquad d_2 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{D}{2}\right)^2}$

b) La differenza di cammino ottico dev'essere uguale ad un multiplo di lunghezza d'onda: $d_2 - d_1 = n\lambda$

c)

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{D}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} = n\lambda$$

Portando a secondo membro la seconda radice ed elevando al quadrato, otteniamo

$$x^2 + \left(y + \frac{D}{2}\right)^2 = n^2\lambda^2 - 2n\lambda\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} + x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2$$

Portando la radice a primo membro,tutto il resto a secondo e semplificando:

$$2n\lambda\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} = n^2\lambda^2 - 2yD$$

elevando a quadrato e semplificando:

$$4n^2\lambda^2x^2 - 4\left(D^2 - n^2\lambda^2\right)y^2 + n^2\lambda^2\left(D^2 - n^2\lambda^2\right) = 0$$

otteniamo così un'equazione che rappresenta un'iperbole.

**Diffrazione**

Uno schermo, illuminato con la sovrapposizione di due onde piane monocromatiche di lunghezza d'onda $\lambda_1$=600 nm e $\lambda_2$=450 nm, porta una fenditura di ampiezza $a$=0.04 mm. Avremo contemporaneamente diffrazione da ciascuna onda. Ricordando l'espressione dell'intensita` per la diffrazione ($\alpha$ e` la direzione dei raggi uscenti dalla fenditura, rispetto alla direzione di incidenza)

$$I_{diff} = I_0 \left( \frac{\sin(\pi(a/\lambda)\sin\alpha)}{\pi(a/\lambda)\sin\alpha} \right)^2$$

d) trovare la condizione per cui un minimo di diffrazione della prima onda coincide con un minimo della seconda.
e) Trovare la coppia di valori più piccoli per cui tale condizione è soddisfatta.
f) Potrebbe accadere che per due lunghezze d'onda arbitrarie tale condizione non possa mai essere soddisfatta? Giustificare la risposta.

**Soluzione**

a) I minimi di diffrazione si hanno quando la fase e` un multiplo di $\pi$ (zero escluso). Per le due onde avremo

$$\pi \frac{a}{\lambda_1} \sin\alpha_1 = n_1 \pi \qquad\qquad \pi \frac{a}{\lambda_2} \sin\alpha_2 = n_2 \pi$$

affinche' i minimi coincidano occorre che gli angoli (e quindi i loro seni)

$$\sin\alpha_1 = n_1 \frac{\lambda_1}{a} \qquad\qquad \sin\alpha_2 = n_2 \frac{\lambda_2}{a}$$

siano uguali. Da qui segue $n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$ ovvero $n_1 600 = n_2 450$

b) La coppia di valori minimi che verifica la condizione e` $n_1$ = 3, $n_2$ = 4.
c) Accade quando le due lunghezze d'onda non sono commensurabili.