Ottica geometrica

Misura dell'indice di rifrazione con un prisma

La misura dell'indice di rifrazione di un mezzo trasparente si basa sulla legge di Snell. La difficoltà sperimentale consiste nella misura degli angoli *i* e *r*. Un metodo per superate tale difficoltà è quello di inviare un raggio di luce su una porzione di materiale tagliato a prisma triangolare e determinare due quantità facilmente misurabili: l'angolo di deviazione del raggio e l'angolo al vertice del prisma.

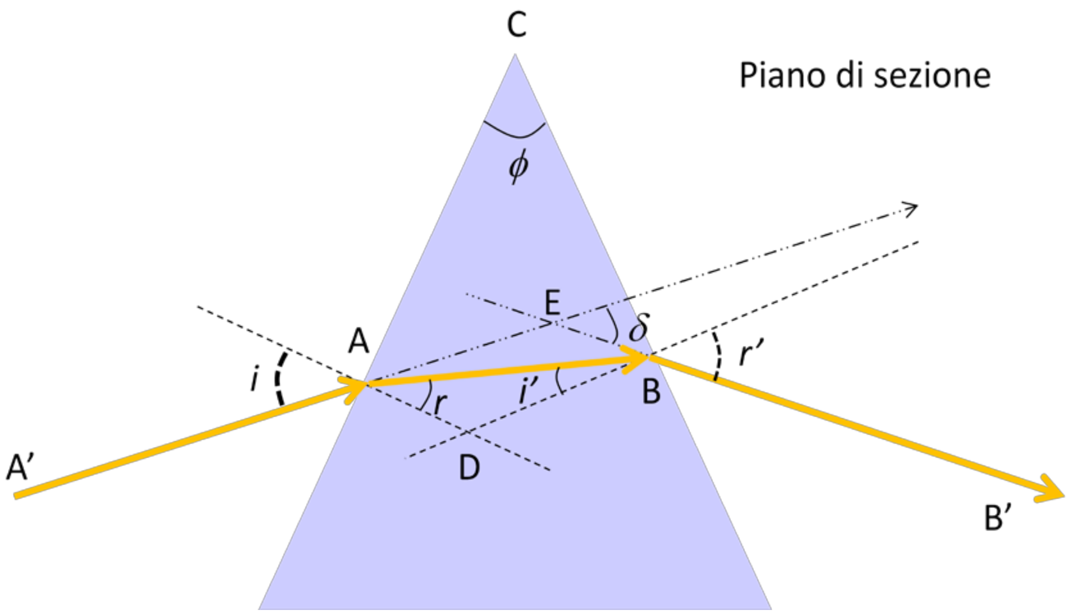
Sia dunque dato un prisma di vetro di indice di rifrazione *n,* a sezione triangolare e con angolo al vertice ϕ (vedi figura). Un raggio di luce A'A giacente sul piano di sezione incontra il prisma nel punto A dove subisce rifrazione. Il raggio prosegue lungo AB, subisce una seconda rifrazione in B e fuoriesce dal prisma, proseguendo lungo BB'. Diciamo rispettivamente *i, r* gli angoli di incidenza e rifrazione in A e *i', r'* gli angoli di incidenza e rifrazione in B. Le rette AD e BD sono perpendicolari rispettivamente in A e B ai due lati del prisma. L'angolo δ in E compreso tra le rette A'A e BB' è detto **angolo di deviazione** del raggio.

NOTA: trascurare i raggi riflessi.

a) Considerando il triangolo ABC, trovare la relazione tra l'angolo ϕ e gli angoli *r, i'*;
b) considerando il triangolo AEB trovare la relazione tra l'angolo δ e gli angoli *i, r, i', r'*.

E` sempre possibile porsi in una situazione simmetrica, in cui *r'=i , i'=r* .

c) Riscrivere in questo caso le due relazioni relative ai punti (a) e (b) e determinare l'indice di rifrazione mediante la legge di Snell in funzione delle quantità misurabili ϕ e δ.
Suggerimento: esprimere *r* in funzione di ϕ e *i* in funzione di ϕ e δ.



Soluzione

a) Notiamo che l'angolo CAB vale $\frac{\pi}{2} - r$ e l'angolo CBA $\frac{\pi}{2} - i'$. La somma degli angoli del triangolo ABC è dunque $\pi = \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i'\right) + \phi$, da cui segue $\phi = r + i'$.

b) L’ampiezza dell’angolo esterno in E al triangolo AEB è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti EAB e EBA. Il primo è uguale a $i-r$, il secondo a $r'-i'$, quindi

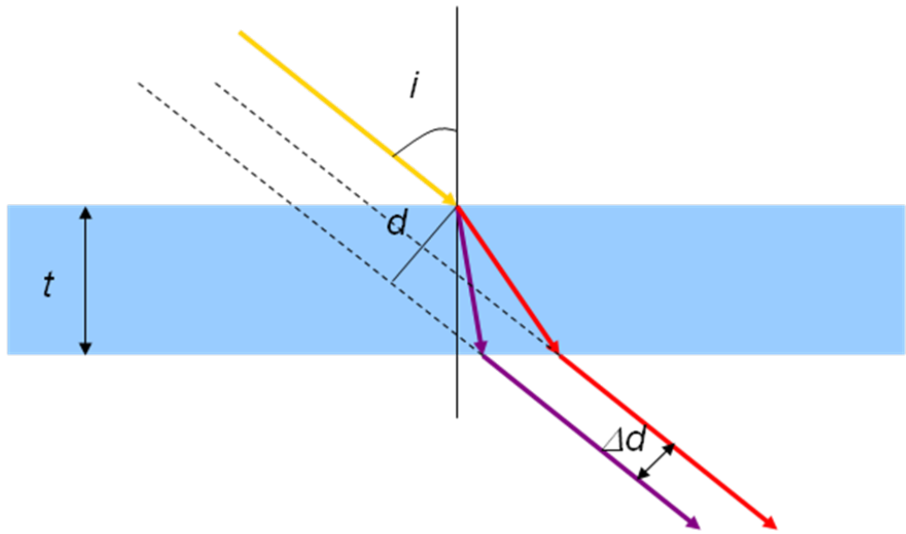
$$\delta = i - r + r' - i'$$

c) In tal caso $\phi = 2r$, $\delta = 2(i-r)$, da cui $r = \frac{\phi}{2}$, $i = \frac{\delta+\phi}{2}$ e applicando la legge di Snell:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\frac{\delta+\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}$$

Dispesione da lastra piana

Un raggio di luce bianca incide su una lastra di vetro a facce parallele di spessore *t* con un angolo di incidenza *i*. A causa della dispersione della luce, il raggio si separa in un pennello di raggi associati ciascuno ad una frequenza luminosa diversa. Sia *d* lo spostamento trasversale del raggio generico.



Detti n_R e n_V gli indici di rifrazione delle frequenze visibili estreme (corrispondenti alla radiazione rossa e violetta, rispettivamente),

a) trovare lo spostamento laterale *d* per una frequenza generica. Esprimerla in funzione dell'angolo *i*.
b) Trovare la larghezza trasversale *Δd* del pennello di raggi rifratti.

Carlo e Francesca stanno studiando il fenomeno, quando Carlo si chiede se sia possibile riunire nuovamente in un unico raggio bianco i raggi colorati rifratti dalla lastra. Dopo averci pensato un po' Francesca esclama: "C'è un principio di ottica che permette di rispondere affermativamente e senza fare calcoli alla tua domanda, basta usare una seconda lastra uguale alla prima".

c) A quale principio si riferisce Francesca?
d) Come dev'essere posta la lastra per riottenere il raggio bianco?

Soluzione

a) Detta *l* la lunghezza del cammino del raggio generico nel vetro, vale la relazione $l = \dfrac{t}{\cos r}$

e la relazione tra *l* e *d* è $d = l\sin(i - r)$, quindi

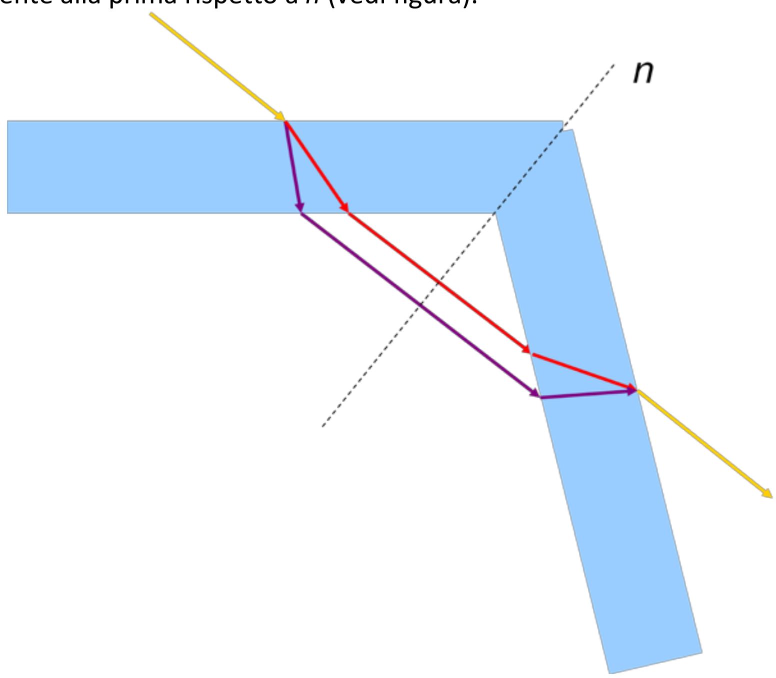
$$d = t\frac{\sin(i-r)}{\cos r} = t\left(\sin i - \cos i\frac{\sin r}{\cos r}\right) = t\sin i\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right)$$

b) La larghezza del pennello di raggi è data dalla differenza tra i valori di *d* delle frequenze estreme:

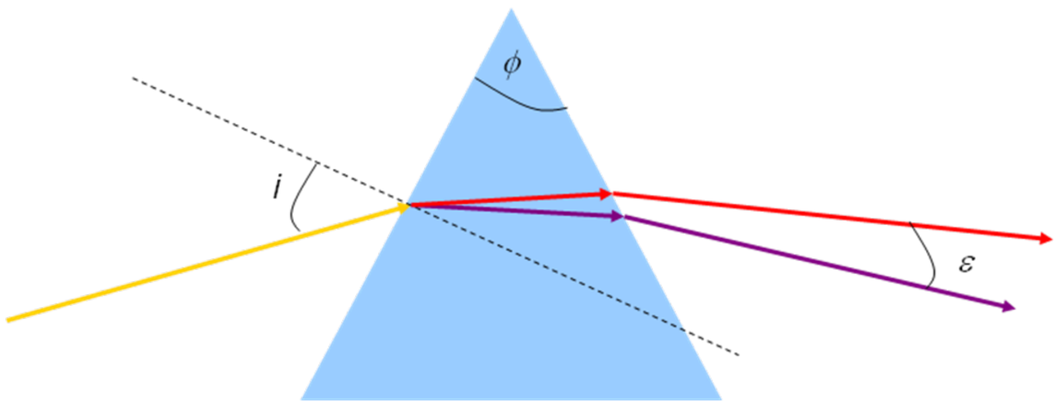
$$\Delta d = t\sin i\cos i\left(\frac{1}{\sqrt{n_R{}^2 - \sin^2 i}} - \frac{1}{\sqrt{n_V{}^2 - \sin^2 i}}\right).$$

c) Al principio di reversibilità` del cammino ottico.

d) Detta *n* la direzione perpendicolare a quella dei raggi in aria, la seconda lastra dev'essere posta simmetricamente alla prima rispetto a *n* (vedi figura).



Dispersione di un prisma
Un raggio di luce bianca incide su un prisma di vetro di angolo di apertura ϕ *=60°* con un angolo di incidenza *i=45°*. A causa della dispersione della luce, il raggio si separa in un pennello di raggi associati ciascuno ad una frequenza luminosa diversa.



Detto n_R =1.51 l'indice di rifrazione della radiazione rossa e n_V =1.53 quello radiazione violetta (corrispondenti ai limiti delle frequenze visibili), determinare numericamente:

a) gli angoli di rifrazione r_R , r_V nel punto d'entrata per la radiazione rossa e violetta;
b) gli angoli di incidenza i'_R , i'_V nel punto d'uscita per la radiazione rossa e violetta;
c) gli angoli di rifrazione r'_R , r'_V nel punto d'uscita per la radiazione rossa e violetta;
d) l'ampiezza del pennello di raggi uscenti, ovvero dell'angolo ε individuato dai raggi rosso e violetto.

Suggerimento: trovare preliminarmente la relazione tra *r, i'* e ϕ.

Soluzione

a) Nel punto d'entrata applichiamo la legge di Snell:

$$r_R = \arcsin\left(\frac{1}{n_R}\sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.51}\sin 45°\right) = 27.92°$$

$$r_V = \arcsin\left(\frac{1}{n_V}\sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.53}\sin 45°\right) = 27.53°$$

b) Dalla relazione $i' = \phi - r$ otteniamo:

$$i'_R = 60° - 27.92° = 32.08°$$

$$i'_V = 60° - 27.53° = 32.47°$$

c) Nel punto d'uscita applichiamo di nuovo la legge di Snell:

$$r'_R = \arcsin\left(n_R \sin i'_R\right) = \arcsin\left(1.51 \sin 32.08°\right) = 53.31°$$

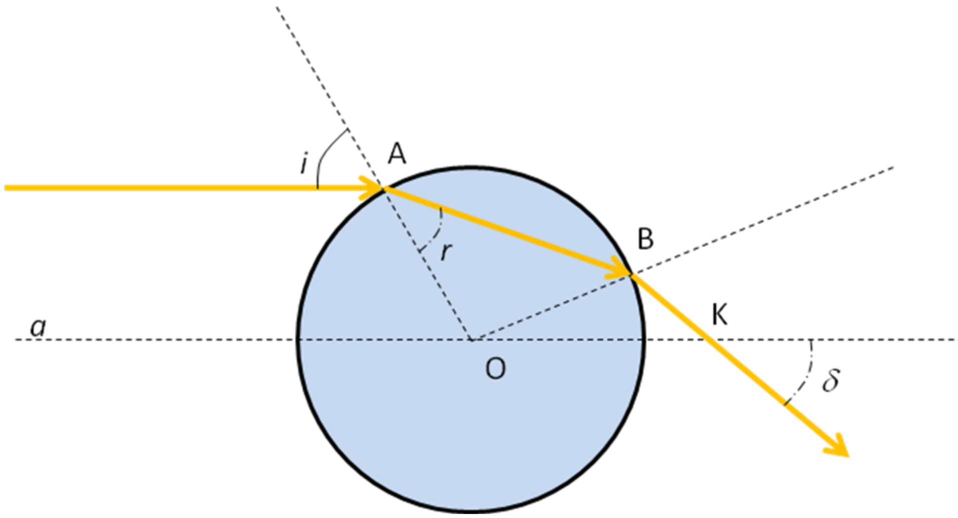
$$r'_V = \arcsin\left(n_V \sin i'_V\right) = \arcsin\left(1.53 \sin 32.47°\right) = 55.23°$$

d) Infine l'angolo ε è dato dall'espressione:

$$\varepsilon = r'_V - r'_R = 55.23° - 53.31° = 1.92°$$

Rifrazione da goccia d'acqua

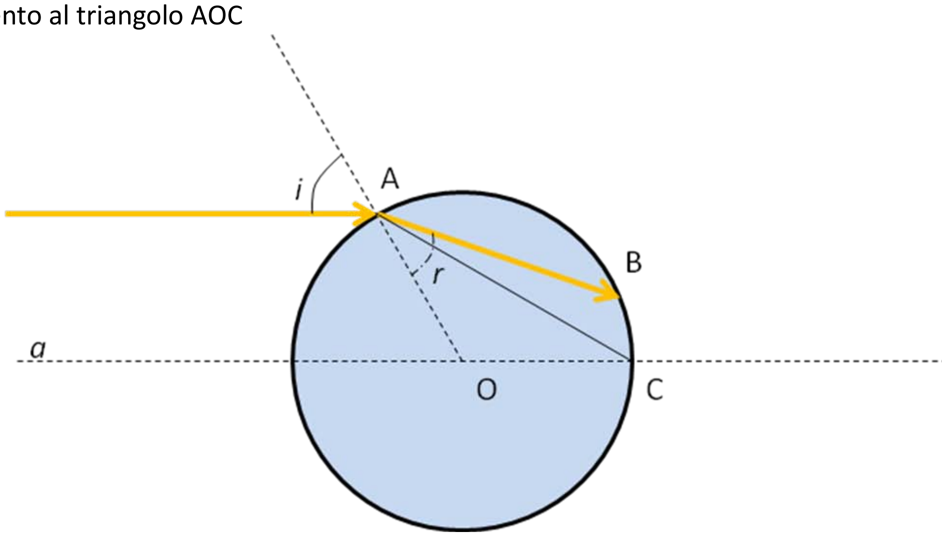
Sia data una goccia d'acqua sferica di indice di rifrazione n = 1.33 e AOB sia una sezione passante per il centro O della goccia. Sia a una retta passante per il centro O e un raggio di luce parallelo ad a incida sulla goccia nel punto A. Il raggio subisce rifrazione (trascurare il raggio riflesso) e si propaga nella goccia fino a B, ove subisce una seconda rifrazione e esce dalla goccia (trascurare anche qui il raggio riflesso).



Si può dimostrare che per l'acqua, il punto B sta dalla stessa parte di A rispetto alla retta a. Sia K l'intersezione tra il raggio uscente e la retta a. Trovare

a) l'espressione dell'angolo di deviazione δ del raggio luminoso in funzione dell'angolo di incidenza i.
b) trovare per quale valore di i l'angolo δ è massimo e determinare tale massimo.

Con riferimento al triangolo AOC



c) dimostrare quanto affermato, cioè che per l'acqua, B sta dalla stessa parte di A rispetto alla retta a. Suggerimento: dimostrare che l'angolo OAC è sempre minore di r.

Soluzione

a) Diciamo α l'angolo acuto compreso tra la retta a e la retta OB e notiamo che l'angolo compreso tra la retta a e la retta OA è uguale a i. Consideriamo il triangolo AOB: la somma dei suoi angoli è

$2r+(\pi-i-\alpha)=\pi$, da cui possiamo esprimere α in funzione di *i*: $\alpha=2r-i$. Considerando il triangolo OBX, vale la relazione $i=\alpha+\delta$. Da queste due eqq. possiamo esprimere δ in funzione degli angoli *i* e *r* : $\delta=2(i-r)$. Mediante la legge di Snell possiamo esprimere *r* in funzione di *i* e quindi δ in funzione di *i*: $r=\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right)$, $\delta=2\left[i-\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right)\right]$.

b) Per trovare il massimo studiamo il segno della derivata rispetto a *i*:

$$\frac{d\delta}{di}=2\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\sin i\right)^2}}\frac{1}{n}\cos i\right]=2\left[1-\sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}\right]\geq 0$$

La diseguaglianza forte è sempre soddisfatta, e quindi non c'è massimo relativo, inoltre la funzione è crescente. Il massimo assoluto si trova quindi all'estemità destra *i=π/2* dell'intervallo,ove δ vale

$$\delta=2\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right)=1.44\,rad\approx 82.49°$$

c) Detto γ l'angolo OAC, considerando il triangolo OAC, vale la seguente relazione: $i=2\gamma$. Dobbiamo dimostrare che *r>γ*, ovvero $\sin r>\sin\gamma$ o, usando la legge di Snell a primo membro e la relazione tra *i* e γ a secondo: $\frac{1}{n}\sin i>\sin\frac{i}{2}$. Esprimendo il primo membro in funzione di *i/2*: $\frac{1}{n}2\sin\frac{i}{2}\cos\frac{i}{2}>\sin\frac{i}{2}$ e semplificando, otteniamo $\cos\frac{i}{2}>\frac{n}{2}$. Questa disuguaglianza è sempre verificata in quanto il coseno è una funzione decrescente in (0, π/2) e quindi maggiore del valore che assume all'estremo destro: $\cos\frac{i}{2}>\cos\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ che è a sua volta maggiore di $\frac{n}{2}=\frac{1.33}{2}$.

Specchio convesso
E` dato uno specchio convesso di raggio *R*. Quali sono le posizioni per cui un oggetto virtuale avra` un'immagine reale?

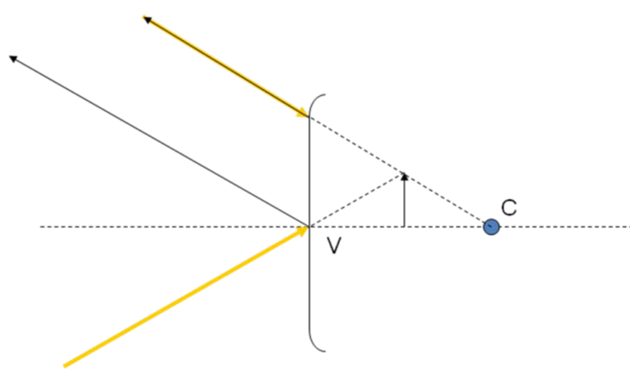
a) rispondere con un'analisi algebrica;

b) rispondere con un'analisi grafica.

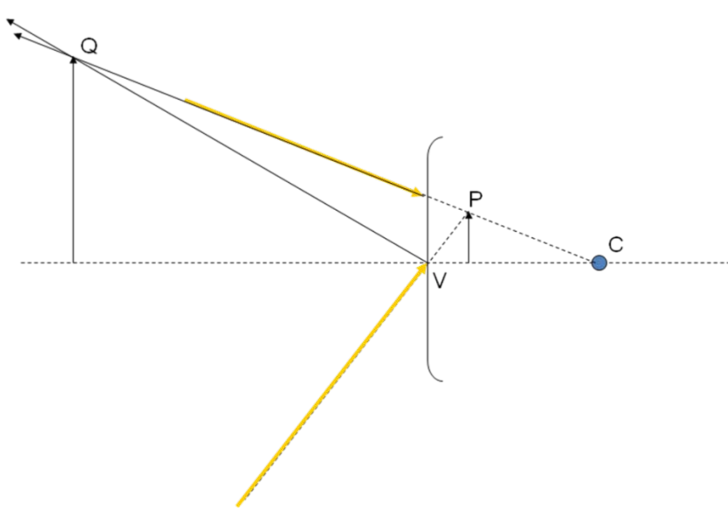
Soluzione

a) usando l'eq. degli specchi, ricaviamo la posizione dell'immagine: $\frac{1}{i}=\frac{2}{R}-\frac{1}{o}$. Per la convenzione dei segni, *o* e *R* sono negativi. Affinche' l'immagine sia reale occorre che *i* sia positivo, e ciò accade quando $\frac{2}{R}-\frac{1}{o}>0$, ovvero per $|o|<\frac{|R|}{2}$, cioè l'oggetto deve trovarsi tra il vertice e il fuoco.

b) Quando l'oggetto si trova sul fuoco, l'immagine è all'infinito.

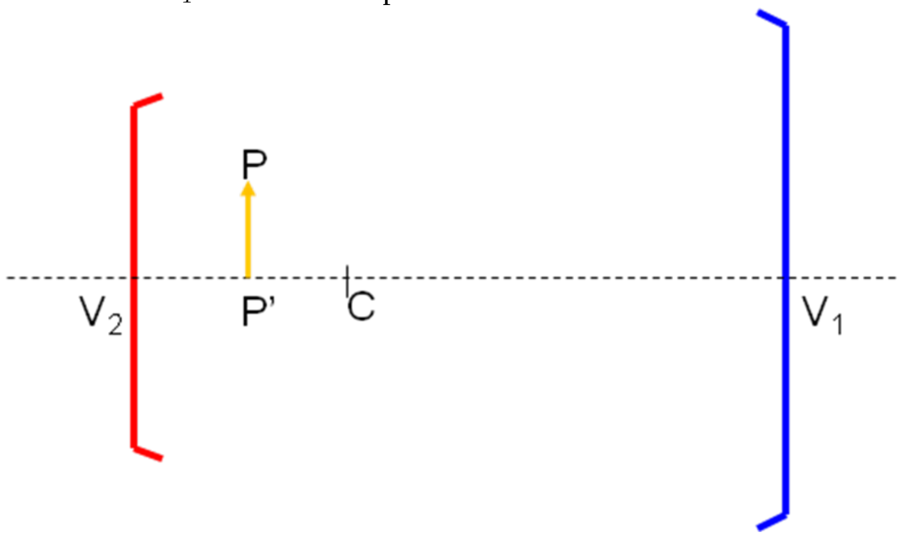


Se si trova a SX del fuoco i raggi riflessi convergono e si ha un'immagine reale. Viceversa se l'oggetto si trova a DX del fuoco i raggi divergono e si ha un'immagine virtuale.



Sistema di specchi

È dato uno strumento ottico formato da due specchi concavi, coassiali, di raggi rispettivi R_1=12 cm (specchio di destra) e R_2=6 cm (specchio di sinistra), posti a distanza $V_1 V_2 = d$=18 cm. Un oggetto è posto a distanza o_1=15 cm dallo specchio di destra.



Trovare col metodo algebrico:

a) la prima immagine formata dallo specchio di destra;

b) la seconda immagine, cioè l'immagine della prima immagine, formata dallo specchio di sinistra (attenzione che ora la luce proviene da destra);

c) la terza immagine, cioè l'immagine della seconda immagine, formata dallo specchio di destra;

d) gli ingrandimenti di ciascun passaggio e l'ingrandimento totale.

Soluzione

a) Applichiamo la legge degli specchi: $\frac{1}{o_1}+\frac{1}{i_1}=\frac{2}{R_1}$, da cui $\frac{1}{i_1}=\frac{2}{R_1}-\frac{1}{o_1}=\frac{2}{12}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$, quindi $i_1=10cm$.

b) Applichiamo di nuovo la legge degli specchi, determinando preliminarmente la distanza oggetto dallo specchio di sinistra: $o_2=d-i_1=18-10=8cm$;
$\frac{1}{o_2}+\frac{1}{i_2}=\frac{2}{R_2}$, da cui $\frac{1}{i_2}=\frac{2}{R_2}-\frac{1}{o_2}=\frac{2}{6}-\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$, e $i_2=\frac{24}{5}cm=4.8cm$.

c) Troviamo la distanza oggetto dallo specchio di destra:

$$o_3 = d - i_2 = 18 - \frac{24}{5} = \frac{66}{5} cm = 13.2 cm$$, e quindi applichiamo la legge degli specchi

$$\frac{1}{i_3} = \frac{2}{R_1} - \frac{1}{o_3} = \frac{2}{12} - \frac{5}{66} = \frac{1}{11}$$, quindi $i_3 = 11 cm$.

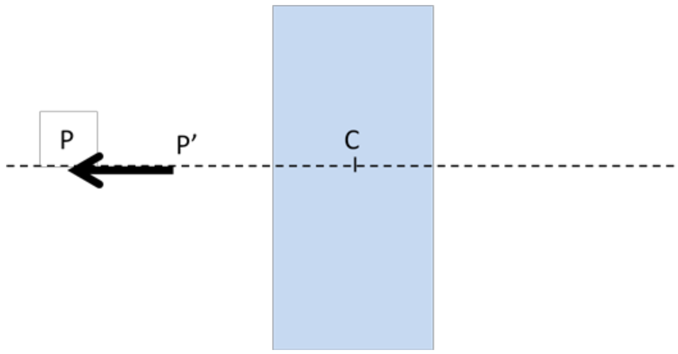
d) L'ingrandimento dei vari passaggi e`:

$$G_1 = -\frac{i_1}{o_1} = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3};\ G_2 = -\frac{i_2}{o_2} = -\frac{24/5}{8} = -\frac{3}{5};\ G_3 = -\frac{i_3}{o_3} = -\frac{11}{66/5} = -\frac{5}{6}$$

e quello totale:

$$G_{tot} = G_1 G_2 G_3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Lastra piana
E` data una lastra di vetro di indice di rifrazione *n* e spessore *s*. Un oggetto puntiforme P e` posto a distanza o_1 dalla faccia di sinistra. Considerare la lastra come una coppia di diottri piani e applicando l'equazione del diottro $\frac{n_1}{o}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{R}$



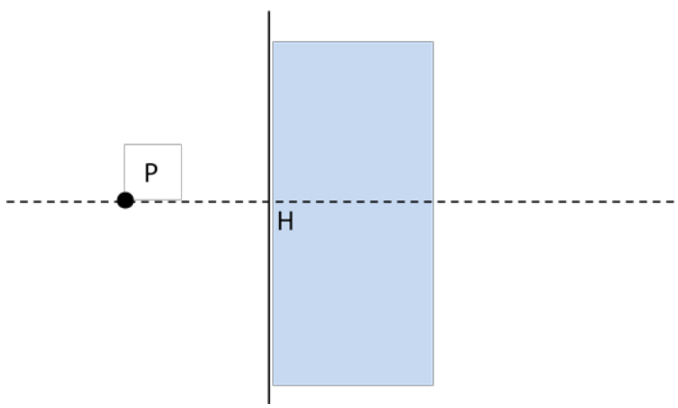
a) trovare la distanza dell'immagine Q di P, generata dalla lastra per rifrazione, dal centro C della lastra.

   Supponiamo ora che l'oggetto non sia puntiforme, ma sia PP' (con P' posto a destra di P) giacente lungo una perpendicolare alla lastra e di lunghezza *O*;

b) trovare la lunghezza *I* dell'immagine QQ' di PP'.

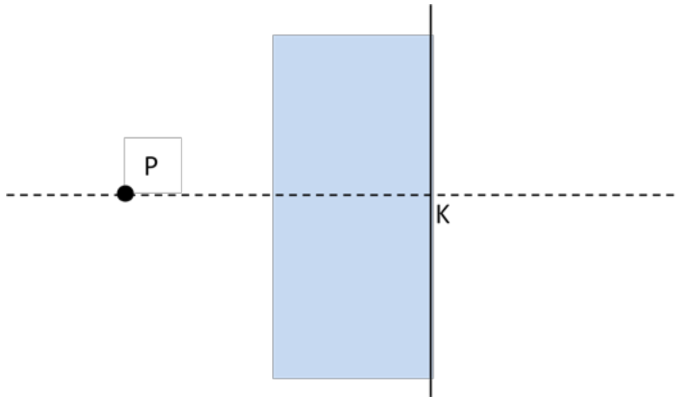
Soluzione

a) Applichiamo l'equazione del diottro alla superficie di sinistra, ponendo PH= o_1 : $\frac{1}{o_1}+\frac{n}{i_1}=0$



risolviamo per la distanza immagine i_1 del primo diottro, misurata a partire da H: $i_1=-no_1$

Applichiamo ora l'equazione del diottro alla seconda superficie, ponendo PK= o_2 : $\frac{n}{o_2}+\frac{1}{i_2}=0$



ove il valore di o_2 e\` dato da $o_2 = s - i_1$

Risolviamo per la distanza immagine i_2 del secondo diottro, misurata a partire da K:

$$i_2 = -\frac{o_2}{n} = -\frac{s - i_1}{n} = -\frac{s + no_1}{n} = -o_1 - \frac{s}{n}$$

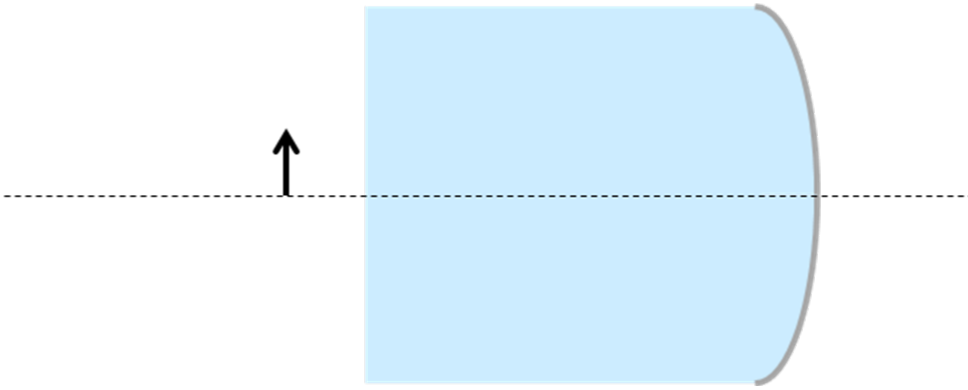
la distanza dell'immagine dal centro della lastra sara\` dunque $d = |i_2| - \frac{s}{2} = o_1 + \frac{s}{n} - \frac{s}{2}$

b) La lunghezza dell'immagine si ottiene per differenza tra le posizioni delle immagini dei punti estremi

$$I = i(P) - i(P') = \left(-o(P) - \frac{s}{n}\right) - \left(-o(P') - \frac{s}{n}\right) = -(o(P) - o(P')) = -O$$

Sistema diottro-specchio

È dato un diottro aria-vetro (indici di rifrazione pari a 1 e *n*). A distanza *R* a destra del diottro è situato uno specchio concavo di raggio *R*. Un oggetto è posto a distanza $o_1 > 0$ dal diottro,



Trovare:

a) la prima immagine dell'oggetto dovuta al diottro (quando i raggi provengono da sinistra) e l'ingrandimento trasversale;

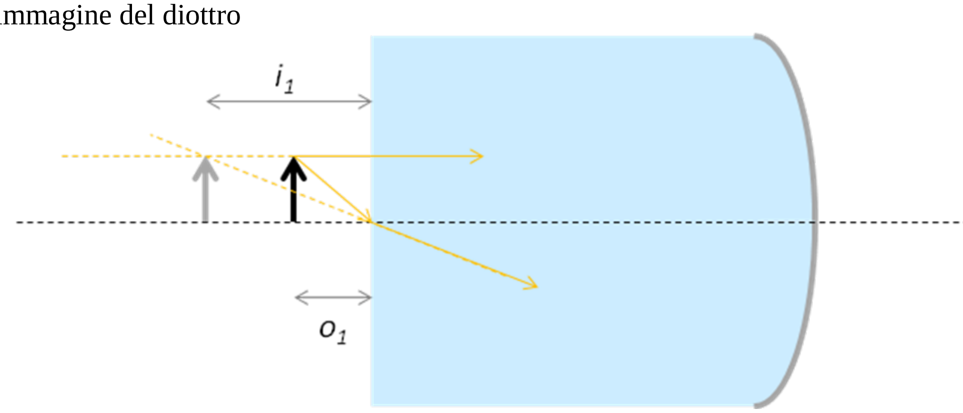
b) l'immagine formata dallo specchio e l'ingrandimento trasversale;

c) la seconda immagine formata dal diottro (quando i raggi provengono da destra) e l'ingrandimento trasversale;

d) specificare le caratteristiche dell'immagine finale.

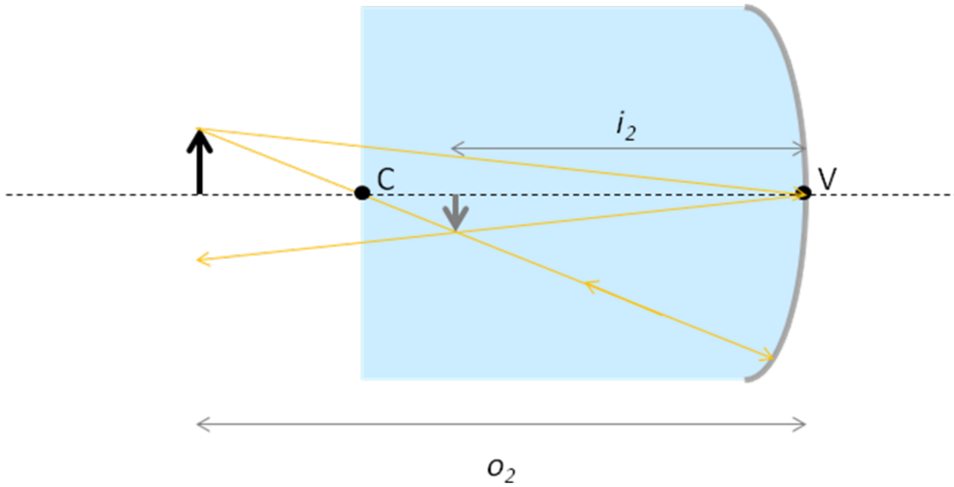
Soluzione

a) Prima immagine del diottro



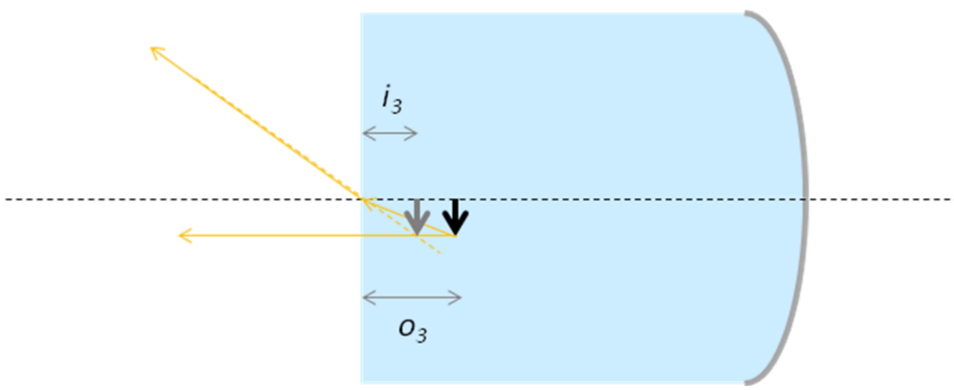
L'eq. del diottro piano e`: $\frac{1}{o_1} + \frac{n}{i_1} = 0$ da cui $i_1 = -no_1 < 0$ e l'ingrandimento e` $G_1 = -\frac{1}{n}\frac{i_1}{o_1} = 1$

b) Immagine dello specchio; ora $o_2 = R - i_1 > 0$



L'eq. dello specchio e`: $\frac{1}{o_2}+\frac{1}{i_2}=\frac{2}{R}$ da cui $i_2=\frac{Ro_2}{2o_2-R}>0$ e l'ingrandimento e` $G_2=-\frac{R}{2o_2-R}$

c) Seconda immagine del diottro; ora $o_3=2R-i_2>0$



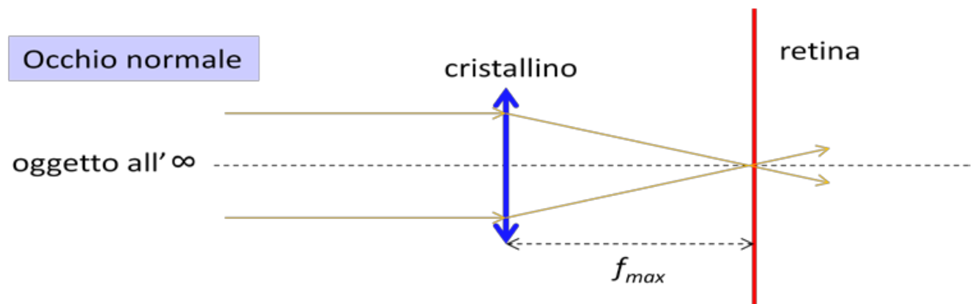
L'eq. del diottro piano e`: $\frac{n}{o_3}+\frac{1}{i_3}=0$ da cui $i_3=-\frac{o_3}{n}<0$ e l'ingrandimento e` $G_3=-\frac{i_3}{o_3}n=1$

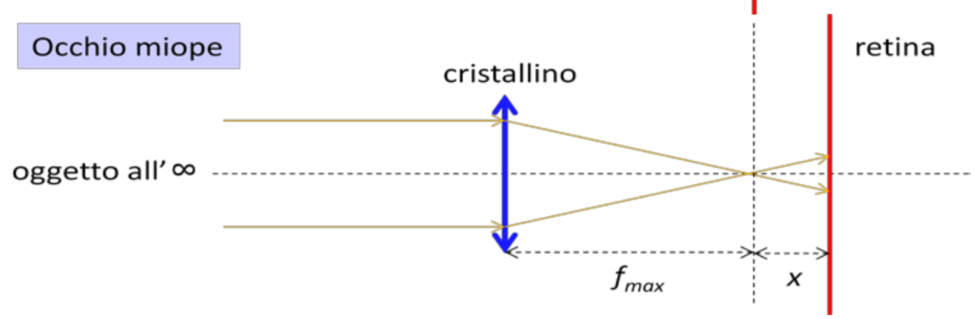
d) l'immagine finale e` **virtuale, capovolta e rimpicciolita** con ingrandimento

$$G=G_1G_2G_3=-\frac{R}{2o_2-R}=-\frac{R}{R+2no_1}$$

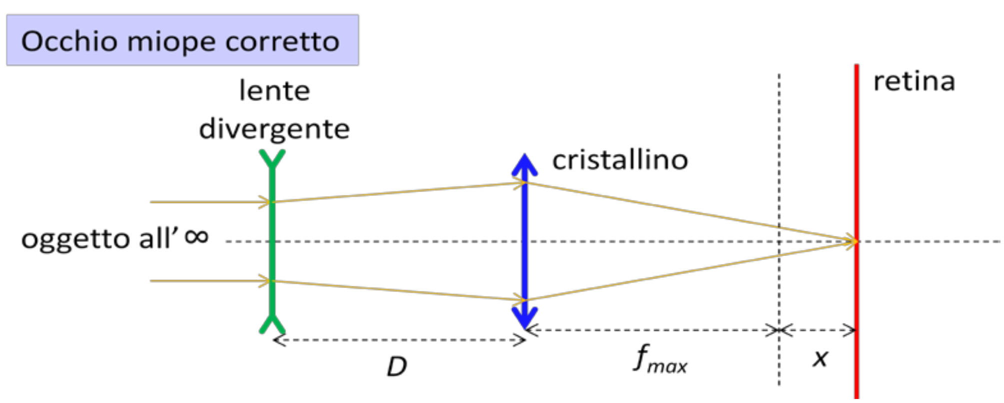
Miopia

La miopia è molto spesso dovuta ad un allungamento del bulbo oculare, di modo che il cristallino (che è una lente deformabile a focale regolabile) non riesce ad aumentare a sufficienza la propria lunghezza focale per formare l'immagine sulla retina di oggetti molto lontani. Consideriamo un modello semplificato dell'occhio, in cui trascuriamo il fatto che è riempito da sostanze diverse dall'aria. Nelle figure seguenti è riportata la situazione di un occhio normale e di uno miope. f_{max} è la massima lunghezza focale raggiungibile dal cristallino; per un occhio normale è uguale alla distanza L_{norm} tra retina e cristallino. Per un occhio miope f_{max} resta uguale, ma $L_{miope} = L_{norm} + x > L_{norm}$, di conseguenza l'immagine sulla retina non è più stigmatica.





Per correggere questa situazione si antepone all'occhio una lente divergente, di focale f', a distanza D dal cristallino, come raffigurato di seguito:



Tutto ciò premesso, determinare:

a) l'espressione della distanza focale f' della lente correttiva in funzione dell'allungamento x del bulbo oculare e dei parametri in gioco (D e $f_{max} = L_{norm}$);

b) calcolare la potenza P della lente correttiva, espressa in diottrie, per la seguente scelta di valori:
$L_{norm} = 23\ mm$ $\quad\quad x = 0.5\ mm$ $\quad\quad D = 25\ mm$.

NOTA BENE: ai fini della soluzione dell'esercizio il cristallino può essere considerato come una lente a focale fissa di valore f_{max}.

Soluzione

a) applichiamo la legge delle lenti sottili alla lente correttiva per trovare ove cade l'immagine che essa forma:

$$\frac{1}{o_1}+\frac{1}{i_1}=\frac{1}{f'}$$

poiché l'oggetto è all'infinito, ne segue che $i_1 = f' < 0$ quindi a sinistra della lente.

Questa immagine funge da oggetto per il cristallino, che dista da essa $o_2 = D - f' > 0$.

Riapplicando la legge delle lenti, otteniamo:

$$\frac{1}{o_2}+\frac{1}{i_2}=\frac{1}{f_{\max}}$$

ove il valore dell'immagine dev'essere uguale (per ipotesi) alla distanza della retina: $i_2 = f_{\max} + x$

Ne segue

$$\frac{1}{D-f'}+\frac{1}{f_{\max}+x}=\frac{1}{f_{\max}}$$

da cui, risolvendo per f' troviamo:

$$f' = D - \frac{f_{\max}\left(f_{\max}+x\right)}{x}$$

b) per i valori dati, otteniamo:

$$f' = 25 - \frac{23(23+0.5)}{0.5} = 25 - 1081 = -1056mm$$

Ovviamente negativa. La potenza è l'inverso della distanza focale espressa in metri, quindi

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-1.056} = -0.95D$$

Sistema di lenti

Un sistema di lenti e` formato da una lente convergente di lunghezza focale $f_1$ = 15 cm e da una seconda lente convergente di focale $f_2$ = 20 cm posta a 70 cm a destra della prima. Un oggetto e` posto a distanza o_1 = 20 cm a sinistra della prima lente. Disegnare il sistema.
Determinare

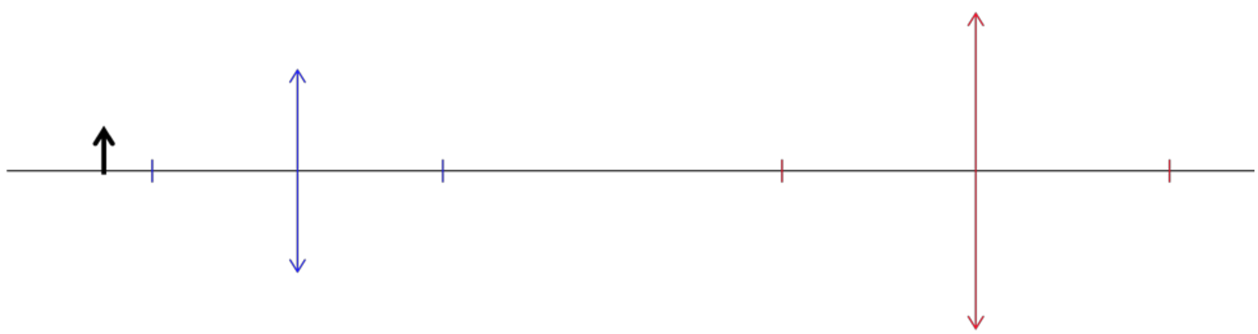
a) la distanza dell'immagine dovuta alla prima lente e le caratteristiche dell'immagine (R/V, D/C) e l'ingrandimento relativo;

b) la distanza dell'immagine dovuta alla seconda lente, le caratteristiche dell'immagine e l'ingrandimento relativo;

c) le caratteristiche dell'immagine dovuta alle due lenti e l'ingrandimento relativo;

Soluzione

Il sistema e` il seguente

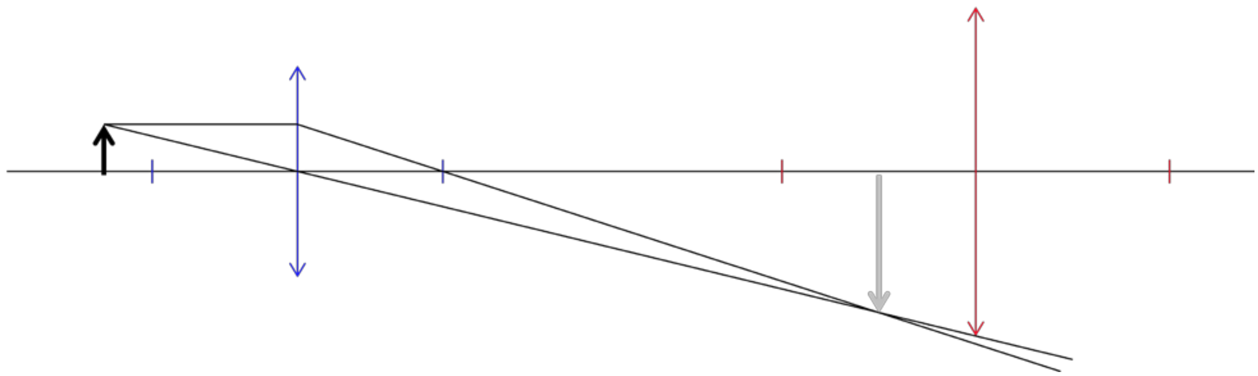


a) Applichiamo l'equazione delle lenti alla prima lente $\frac{1}{o_1}+\frac{1}{i_1}=\frac{1}{f_1}$ e

$$\frac{1}{i_1}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{o_1}=\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{4-3}{60}=\frac{1}{60}$$

da cui i_1 = 60 cm, l'immagine e` reale (R). L'ingrandimento e` dato da $G_1=-\frac{i_1}{o_1}=-\frac{60}{20}=-3$

quindi l'immagine e` capovolta (C) e ingrandita.



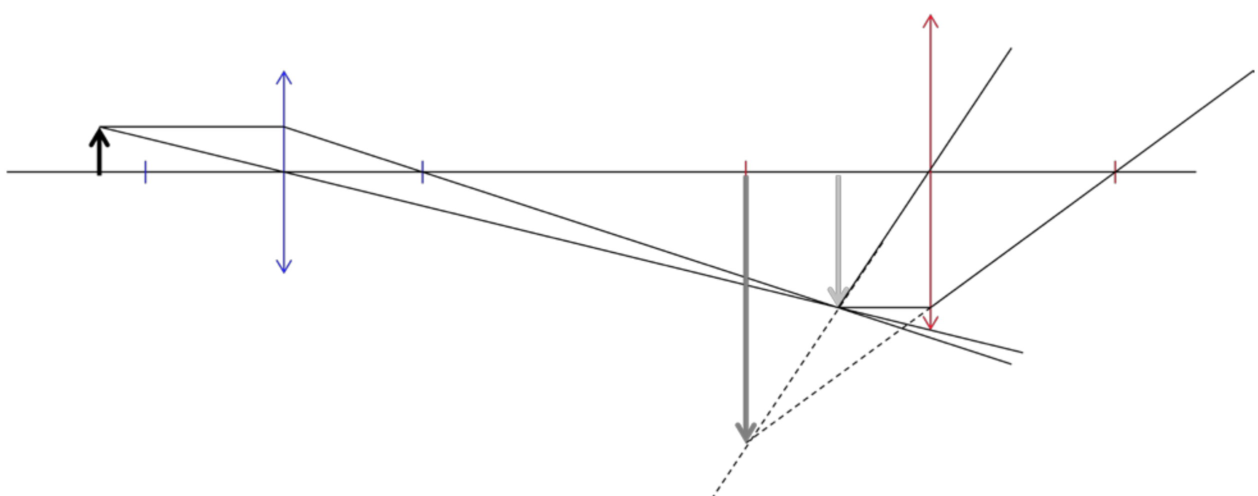
b) Applichiamo l'equazione delle lenti alla seconda lente $\frac{1}{o_2}+\frac{1}{i_2}=\frac{1}{f_2}$ e

$o_2 = d - i_1 = 70 - 60 = 10cm$ da cui

$$\frac{1}{i_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{o_2}=\frac{1}{20}-\frac{1}{10}=\frac{1-2}{20}=-\frac{1}{20}$$

e i_2 = -20 cm, l'immagine e` virtuale (V). L'ingrandimento e` dato da $G_2=-\frac{i_2}{o_2}=-\frac{-20}{10}=+2$

quindi l'immagine e` diritta (D) e ingrandita.



c) L'immagine di tutto il sistema e` virtuale, capovolta (VC) e ingrandita, l'ingrandimento vale

$$G = G_1 G_2 = (-3)\cdot(+2) = -6$$

Telescopi

Vogliamo costruire un telescopio (del tipo di Galileo o di Keplero) avendo a disposizione cinque lenti, le cui distanze focali sono: +200 cm, -10 cm, +10 cm, +180 cm, -20 cm.

a) quali sono le possibili coppie per cui l'ingrandimento visuale *V* è maggiore (in valore assoluto) di 15 e la lunghezza *l* del telescopio è minore o uguale a 200 cm?
b) Se volessimo avere esattamente |*V*|=17 e *l*=144, quali sarebbero i valori delle distanze focali di obiettivo e oculare?

Soluzione

a) per costruire un telescopio occorre un obiettivo a grande focale, quindi le scelte possibili per l'obiettivo sono la 1 e la 4. Abbiamo cosi' le seguenti combinazioni di lenti: 12, 13, 15, 42, 43, 45.
   Dalle definizioni

$$V = \frac{f_b}{f_c} \qquad\qquad l = f_b + f_c$$

otteniamo la seguente tabella:

coppia	12	13	15	42	43	45
V	-20	+20	-10	-18	+18	-9
l	190	210	180	170	190	160

le scelte possibili sono dunque la 12 e la 42 (telescopio kepleriano) e la 43 (telescopio galileiano).

b) Nel caso galileiano *V*=17, *l*=144, avremo il sistema

$$\frac{f_b}{f_c} = 17 \qquad\qquad f_b + f_c = 144$$

che risolto da`

$$f_b = 136cm \qquad\qquad f_c = 8cm$$

Nel caso kepleriano *V*=-17, *l*=144, avremo il sistema

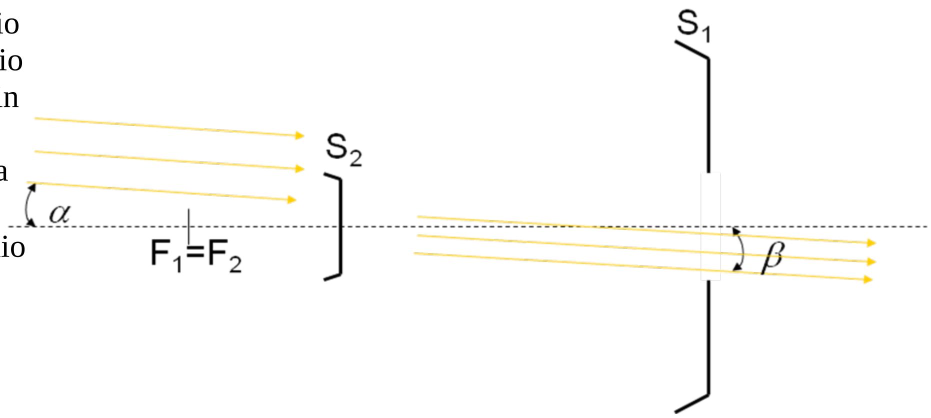
$$\frac{f_b}{f_c} = -17 \qquad\qquad f_b + f_c = 144$$

che risolto da`

$$f_b = 153cm \qquad\qquad f_c = -9cm$$

Telescopio riflettore

Un telescopio è formato da uno specchio concavo S_1 di focale f_1 e da uno specchio convesso S_2 di focale f_2, ed è costruito in modo che i loro fuochi coincidano. Raggi paralleli provenienti da una stella incidono sul telescopio inclinati di un angolo α, vengono riflessi dallo specchio S_1 e quindi dallo specchio S_2 e fuoriescono dal telescopio attraverso un'apertura praticata nello specchio S_1, inclinati di un angolo β.



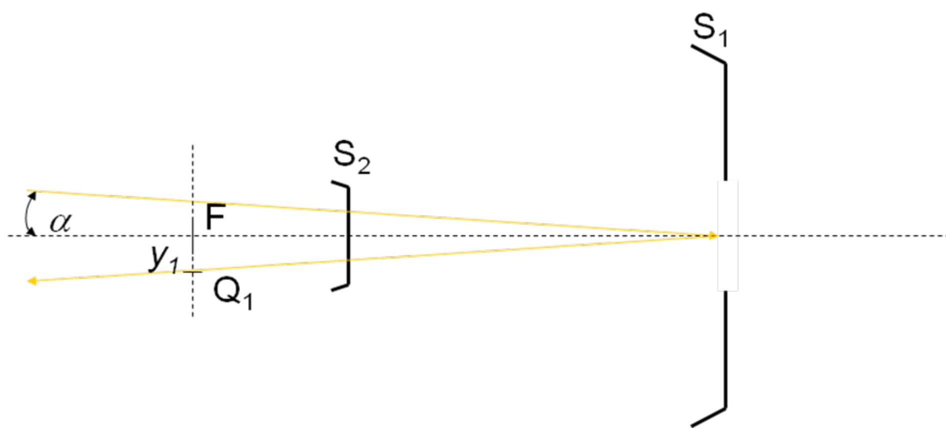
Determinare

a) l'angolo β in funzione dell'angolo α e delle distanze focali degli specchi;
b) qual è l'ingrandimento visuale V di questo telescopio?

Suggerimento: la determinazione dell'immagine di ciascuno specchio è indipendente dalla presenza dell'altro specchio, e quindi dal fatto che S_2 intercetta parte dei raggi. Altrettanto ininfluente per la formazione dell'immagine di S_1 è la presenza dell'apertura.

Soluzione

a) È noto che l'immagine di un punto all'infinito giace sul piano focale. Basterà quindi un raggio per trovare l'immagine Q_1 della stella. Prendiamo il raggio principale che passa per il vertice dello specchio S_1, esso è riflesso simmetricamente rispetto all'asse e interseca il piano focale a distanza y_1, dall'asse.

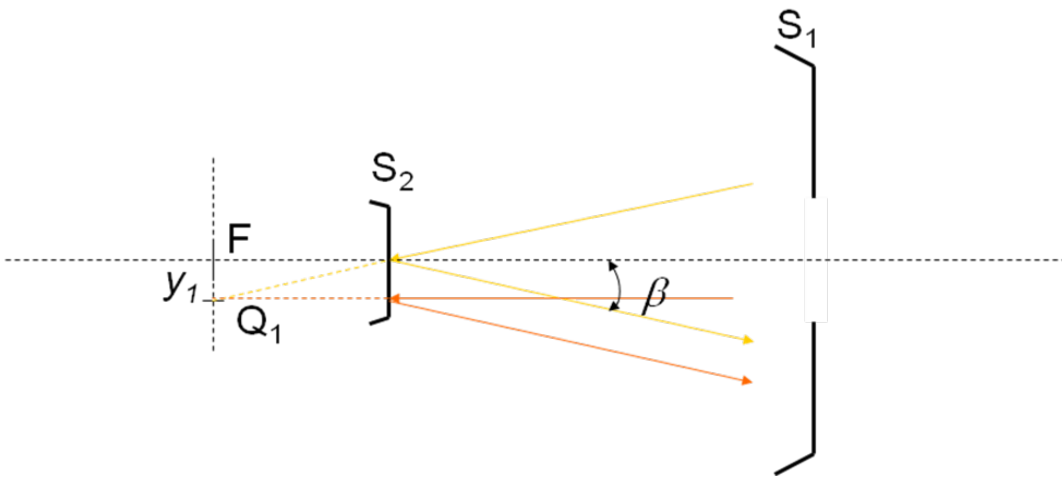


Questa distanza è data dalla relazione

$$y_1 = f_1 tg\alpha$$

Prendiamo Q_1 come oggetto <u>virtuale</u> dello specchio S_2, e usiamo come raggi principali quello che incide sul vertice di S_2 e quello parallelo all'asse. I raggi riflessi sono paralleli, e formano un'angolo β con l'asse. Il valore di quest'angolo è

$$tg\beta = \frac{y_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_2}\,tg\alpha$$



b) l'ingrandimento visuale è $V = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$ come per i telescopi di Galileo e Keplero.