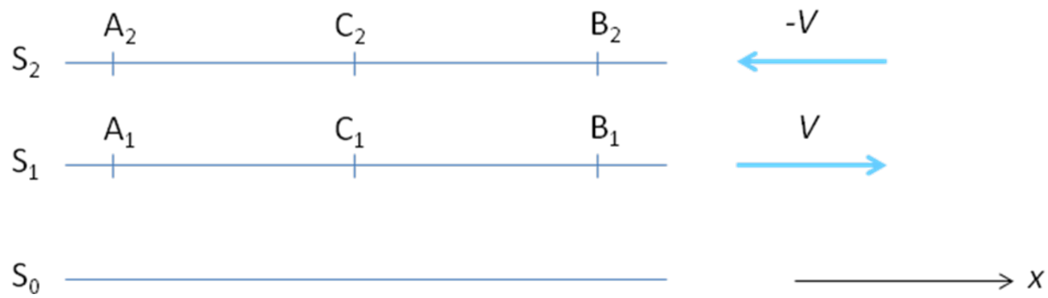
Esercizi di relativita`

Simultaneita`

Sono dati tre sistemi di riferimento S_0, S_1, S_2. S_1 si muova di moto rettilineo uniforme lungo x con velocita` $V$ rispetto a $S_0$ e $S_2$ con velocita` $-V$ rispetto a S_0 (vedi figura).



In S_1 e` presente, a riposo, un regolo A_1B_1 e in S_2, sempre a riposo, un regolo A_2B_2, entrambi di lunghezza propria L. C_1, C_2 siano i punti medi dei due regoli. Quando i punti C_1, C_2 coincidono (si supponga che i regoli A_1B_1 e A_2B_2 giacciano sulla stessa retta), parte un lampo di luce da C_1=C_2 che si propaga in tutte le direzioni.

Detto t(P) il tempo di arrivo del lampo nel generico punto P, si richiede di

a) ordinare cronologicamente nel sistema S_1 i tempi di arrivo del lampo nei punti A_1 , B_1, A_2, B_2. Giustificare l'ordinamento.

b) ordinare cronologicamente nel sistema S_0 i tempi di arrivo del lampo nei punti A_1 , B_1, A_2, B_2. Giustificare l'ordinamento.

Soluzione

a) Nel sistema S_1 i punti A_1, B_1 sono fermi ed equidistanti da C_1, quindi i tempi di arrivo sono uguali: $t(A_1)=t(B_1)$. Il segmento A_2 B_2 risulta contratto, per cui il punto B_2 si trova tra B_1 e C_1 e inoltre avvicina a C_1, quindi la luce impieghera` meno tempo a raggiungere tale punto, rispetto ai punti precedenti. Il punto $A_2$ si trova tra $A_1$ e $C_1$ e ma si allontana da $C_1$, per cui non e` immediato capire quanto tempo impiega la luce per raggiungerlo. Si dimostra che tale tempo e` maggiore rispetto ai punti $A_1$ e $B_1$ quindi l'ordinamento e`

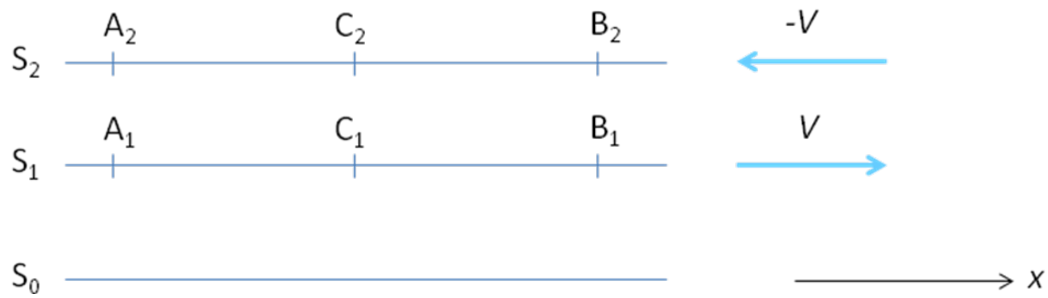
$$t(B_2)<t(A_1)=t(B_1)<t(A_2)$$

b) Nel sistema S_0 il punto A_2 si allontana da C_1=C_2, e il punto B_2 si avvicina a C_1=C_2, quindi la luce impieghera` piu` tempo a raggiungere A_2 che B_2: $t(A_2)>t(B_2)$. Lo stesso ragionamento si puo` applicare ai punti A_1 , B_1, ottenendo: $t(B_1)>t(A_1)$.

Inoltre, vista la simmetria dei sistemi S_1, S_2 rispetto a S_0, avremo

$$t(B_2)=t(A_1)<t(B_1)=t(A_2)$$

Contrazione delle lunghezze
Sono dati tre sistemi di riferimento S_0, S_1, S_2. S_1 si muova di moto rettilineo uniforme lungo *x* con velocità *V* rispetto a S_0 e S_2 con velocità -*V* rispetto a S_0 (vedi figura).



In S_1 è presente, a riposo, un regolo A_1B_1 e in S_2, sempre a riposo, un regolo A_2B_2, entrambi di lunghezza propria *L*.
Si richiede di:

c) trovare la lunghezza del segmento A_2B_2, misurata nel sistema $S_{0;}$

d) stabilire quale delle seguenti espressioni rappresenta la velocità relativa *u* dei sistemi S_1, S_2:

$$u = \frac{2V}{1-(V/c)^2}\ ,\ u = 2V\ ,\ u = \frac{2V}{1+(V/c)^2}\ ,\ u = 0\,.$$

Dare un motivo per cui le altre tre espressioni non sono corrette.

e) Trovare la lunghezza del segmento A_1B_1, misurata nel sistema S_2 , in funzione di *V*.

Soluzione

c) La lunghezza è data da $L' = \dfrac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-(V/c)^2}$

d) L'espressione corretta è la terza. Le prime due non possono essere giuste poiché per velocità *V* prossime a *c*, *u* risulterebbe maggiore di *c*. La quarta è scorretta poiché implicherebbe che rispetto a S_0 i sistemi S_1 e S_2 si muovano con la stessa velocità, non con velocità opposta.

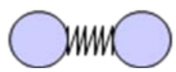
e) La lunghezza è data da $L'' = \dfrac{L}{\gamma'} = L\sqrt{1-(u/c)^2} = L\dfrac{1-(V/c)^2}{1+(V/c)^2}$

Energia relativistica

L'energia relativistica E di un sistema costituito da piu` particelle ($j=1,...n$) contiene, in generale, l'energia cinetica K_{CM} del centro di massa del sistema e l'energia interna (l'energia a riposo $m_j c^2$ e l'energia cinetica rispetto al centro di massa, K_j, dei costituenti e l'energia potenziale U dovuta alla loro interazione)

$$E = K_{CM} + \left(\sum_j m_j c^2 + \sum_j K_j + U \right)$$

Sia dato un sistema costituito da due corpi uguali di massa m, collegati da una molla di massa trascurabile. Inizialmente i corpi siano fermi e la molla sia carica. E` dunque presente un'energia potenziale U, che supporremo nota.



a) Determinare il valore di E nello stato iniziale, in funzione **delle masse dei corpi costituenti** e **dell'energia interna del sistema**.

   Successivamente la molla scatta e i due corpi vengono lanciati in versi opposti con uguale velocita`.

b) Determinare E nello stato finale, di nuovo in funzione delle masse dei corpi costituenti e dell'energia interna del sistema.

c) Trovare la velocita` finale v dei due corpi in funzione di m e U (suggerimento: imporre la conservazione di E e usare l'espressione dell'energia cinetica relativistica).

Soluzione

a) l'energia relativistica nello stato iniziale e` $E_i = mc^2 + mc^2 + U = 2mc^2 + U$

b) e nello stato finale $E_f = mc^2 + mc^2 + K = 2mc^2 + K$

c) Imponiamo la conservazione dell'energia relativistica $E_i = E_f$ ne segue

$$2mc^2 + U = 2mc^2 + K \qquad \text{ovvero} \qquad K = U$$

Esprimendo l'energia cinetica in forma relativistica

$$K = mc^2(\gamma - 1) + mc^2(\gamma - 1) = 2mc^2(\gamma - 1)$$

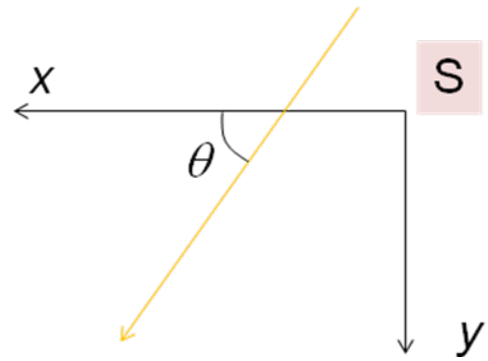
otteniamo l'espressione di □ in funzione di U

$$\gamma = 1 + \frac{U}{2mc^2}$$

e infine, risolvendo per la velocita` $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{U}{2mc^2}\right)^2}}$

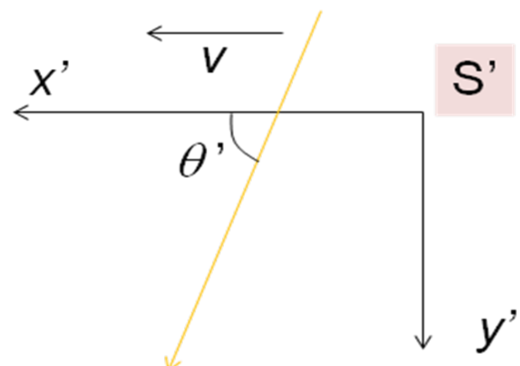
Trasformazione della velocita`

Nel sistema inerziale S un raggio di luce proveniente da una stella forma un'angolo θ con l'asse *x*.



a) Trovare l'espressione della tangente dell'angolo θ in funzione delle componenti c_x e c_y della velocità. E viceversa, trovare le espressioni di c_x e c_y in funzione dell'angolo θ.

Il sistema inerziale S' si muove con velocità v rispetto a S lungo la direzione *x*.



b) Usando le equazioni di trasformazione relativistica della velocità, trovare le componenti della velocità c'_x e c'_y nel sistema S' in funzione di c_x e c_y .

c) Trovare l'espressione della tangente dell'angolo θ' in funzione di c'_x e c'_y e quindi di c_x e c_y e infine dell'angolo θ.

d) Quale sarebbe l'espressione di tgθ' se aveste usato le trasformazioni classiche della velocita`?

Soluzione

a) la tangente e` data da $tg\theta = \dfrac{c_y}{c_x}$ e le componenti della velocita` da

$$c_x = c\cos\theta \qquad c_y = c\sin\theta$$

b) le componenti della velocita` in S' sono

$$c'_x = \frac{c_x - v}{1 - \frac{c_x v}{c^2}} \qquad c'_y = \frac{c_y}{\gamma\left(1 - \frac{c_x v}{c^2}\right)}$$

c) la tangente dell’angolo in S’ e`

$$tg\theta' = \frac{c'_y}{c'_x} = \frac{c_y}{\gamma(c_x - v)} = \frac{c\sin\theta}{\gamma(c\cos\theta - v)} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - v/c)}$$

d) se avessimo usato le trasformazioni di Galileo, avremmo ottenuto

$$tg\theta' = \frac{c'_y}{c'_x} = \frac{c_y}{c_x - v} = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta - v} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - v/c}$$

Interazione fotone-elettrone

Un'onda luminosa puo` essere considerata come un insieme di fotoni, particelle di massa a riposo nulla. Consideriamo un urto centrale tra un fotone (di energia ε, qdm p) ed un elettrone nel sistema S del laboratorio. L'elettrone (di energia E, qdm P, massa *m*) sia inizialmente fermo, il fotone abbia energia iniziale nota ε_i , e dopo l'urto rimbalzi *all'indietro* con qdm p_f (vedi figura).

a) scrivere la relazione tra quantita` di moto p ed energia ε del fotone;

b) scrivere la conservazione dell'energia e la conservazione della quantita` di moto del sistema (fotone + elettrone) tra stati iniziale e finale;

c) determinare la qdm finale P_{ef} dell'elettrone;

d) determinare l'energia finale ε_f del fotone;

Suggerimento: usare p_f , P=P_{ef} come incognite.

Soluzione

a) Per una particella di massa nulla la relazione e` $\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = pc$

b) l'energia iniziale del sistema: $E_i = \varepsilon_i + E_{ei} = p_i c + mc^2$

l'energia finale $E_f = \varepsilon_f + E_{ef} = p_f c + \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4}$

<u>la conservazione dell'energia</u>: $p_i c + mc^2 = p_f c + \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4}$

La quantita` di moto iniziale del sistema: $\vec{P}_i = \vec{p}_i + \vec{P}_{ei} = \vec{p}_i$

la qdm finale $\vec{P}_f = \vec{p}_f + \vec{P}_{ef}$

<u>la conservazione della qdm</u>: $\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{P}_{ef}$ e in termini scalari: $p_i = -p_f + P_{ef}$

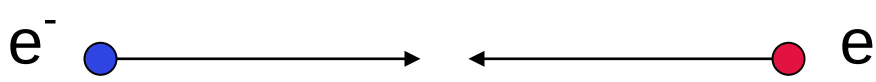
abbiamo cosi' due eqq. in due incognite: p_f , P_{ef} =P. Risolvendo il sistema otteniamo

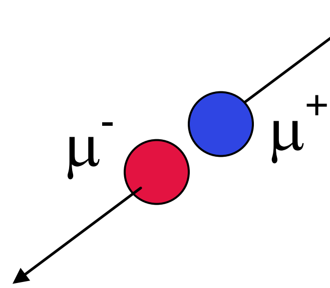
c) $P = p_i \dfrac{2p_i + 2mc}{2p_i + mc}$ $\qquad p_f = p_i \dfrac{mc}{2p_i + mc}$

d) $\varepsilon_f = \varepsilon_i \dfrac{mc^2}{2\varepsilon_i + mc^2}$

Annichilazione elettrone-positrone

Un elettrone di quantità di moto nota $\boldsymbol{p}_e$ urta un positrone che si muove con quantità di moto uguale ed opposta $\boldsymbol{p}_p = -\boldsymbol{p}_e$. Nell'urto le due particelle annichilano generando una coppia di muoni di segno opposto.





L'elettrone e il positrone hanno massa fra loro uguale $m=0{,}511\ MeV/c^2$, i due muoni hanno pure massa fra loro uguale $M=106\ MeV/c^2$. Le quantità di moto dei muoni siano $\boldsymbol{p}_{\mu 1}$, $\boldsymbol{p}_{\mu 2}$.
Imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia tra stato iniziale e finale,

a) determinare la quantità di moto dei due muoni;
b) calcolare il valore numerico minimo della quantità di moto dell'elettrone (e del positrone), affinché questa reazione possa avvenire.

Soluzione

a) Le quantità di moto iniziale sono, rispettivamente,

$$\vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_p = 0 \qquad\qquad \vec{p}_f = \vec{p}_{\mu 1} + \vec{p}_{\mu 2}.$$

Dal principio di conservazione otteniamo $\vec{p}_{\mu 1} + \vec{p}_{\mu 2} = 0$. Passando alle proiezioni

$$p_p = p_e = p \qquad\qquad p_{\mu 1} = p_{\mu 2} = P.$$

L'energia negli stati iniziale e finale è, rispettivamente,

$$E_i = E_e + E_p = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{p_p^2 c^2 + m^2 c^4} = 2\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$E_f = E_{\mu 1} + E_{\mu 2} = \sqrt{p_{\mu 1}^2 c^2 + M^2 c^4} + \sqrt{p_{\mu 2}^2 c^2 + M^2 c^4} = 2\sqrt{P^2 c^2 + M^2 c^4}.$$

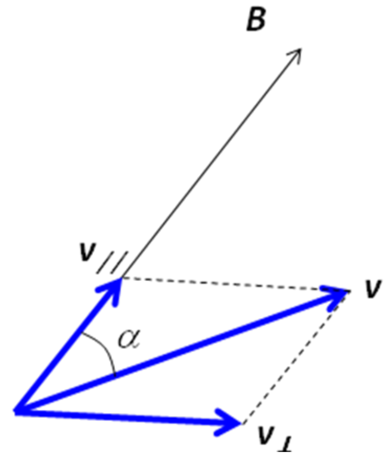
Imponendo il principio di conservazione otteniamo $2\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = 2\sqrt{P^2 c^2 + M^2 c^4}$, da cui si determina il valore della QdM dei muoni: $P = \sqrt{p^2 - (M^2 - m^2)c^2}$

b) Occorre che l'espressione sotto radice sia non negativa, da cui segue

$$p \ge \sqrt{(M^2 - m^2)c^2} = \sqrt{106^2 - 0.511^2}\,MeV \approx 106\,MeV$$

Moto in un campo magnetico

Un elettrone (*m= 9.11x10⁻³¹ kg*, *|q|=1.6x10⁻¹⁹ C*), immerso in un campo magnetico *B = 1 T* , abbia **energia cinetica** *K* pari all'energia a riposo.



a) Supponendo che l'elettrone si comporti in modo classico, e quindi, usando le equazioni classiche, determinarne la velocità *v*, il raggio *R* e il passo *p* della traiettoria elicoidale seguita dall'elettrone, supposto che l'angolo formato dalla velocità e dal campo sia α.
b) Ripetere il calcolo di *v*, *R*, *p* applicando le equazioni relativistiche. Suggerimento: l'unica differenza nell'equazione del moto è che bisogna usare $m\gamma$ al posto di *m*.

Soluzione

a) La relazione classica tra energia cinetica e velocità è $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, da cui, sostituendo il valore di *K*: $v = \sqrt{\frac{2mc^2}{m}} = \sqrt{2}c = 4.24 \cdot 10^8 m/s$, che risulta maggiore di *c*.

Il raggio si trova imponendo che la forza centripeta sia la forza di Lorentz: $m\frac{v_\perp^2}{R} = |q|v_\perp B$, ove si è considerata la sola componente della velocità perpendicolare al campo *B*. Da qui segue:

$$R = \frac{mv_\perp}{|q|B} = \frac{mv}{|q|B}\sin\alpha = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 4.24 \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1}\sin\alpha = 2.41 \cdot 10^{-3}\sin\alpha.m$$

Il periodo di rivoluzione dell'elettrone è

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 3.58 \cdot 10^{-11}.s\,.$$

Il passo, infine, è dato da

$$p = v_\parallel T = v\cos\alpha T = 4.24 \cdot 10^8 \cdot 3.58 \cdot 10^{-11}\cos\alpha = 1.52 \cdot 10^{-2}\cos\alpha.m$$

b) Usando le eqq. relativistiche, troviamo dapprima il valore di γ: $K = mc^2(\gamma - 1)$,da cui $\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = \frac{mc^2}{mc^2} + 1 = 2$, e quindi quello della velocità: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2.60 \cdot 10^8 \, m/s$.

Ora il raggio vale

$$R = \frac{m\gamma v_\perp}{|q|B} = \frac{m\gamma v}{|q|B} \sin\alpha = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 2.60 \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \sin\alpha = 2.96 \cdot 10^{-3} \sin\alpha . m .$$

Il periodo diviene

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m\gamma}{|q|B} = \frac{2\pi \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 2}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 7.16 \cdot 10^{-11} . s ,$$

e il passo

$$p = v_\parallel T = v \cos\alpha T = 2.60 \cdot 10^8 \cdot 7.16 \cdot 10^{-11} \cos\alpha = 1.86 \cdot 10^{-2} \cos\alpha . m$$

Decadimento del pione (1)

Sia dato un pione (massa M) inizialmente fermo nel sistema di riferimento S. Esso poi decada (stato finale) in un muone (massa m e quantità di moto p_μ) e un neutrino (massa nulla e quantità di moto p_ν). Ricordando la relazione relativistica tra energia, E, quantità di moto, p, e massa, m,

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

a) scrivere la conservazione dell'energia negli stati iniziale e finale;
b) scrivere la conservazione della quantità di moto negli stati iniziale e finale.

Si ottengono cosí due equazioni nelle due incognite p_μ , p_ν .

c) Risolvere il sistema, determinando le espressioni di p_μ , p_ν .

Soluzione

a) l'energia delle tre particelle è

$$E_\pi = Mc^2 , \quad E_\mu = \sqrt{{p_\mu}^2c^2 + m^2c^4} , \qquad E_\nu = p_\nu c$$

la conservazione dell'energia si scrive

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu \quad \text{ovvero} \quad Mc^2 = \sqrt{{p_\mu}^2c^2 + m^2c^4} + p_\nu c$$

b) la quantità di moto è

$$\vec{p}_\pi = 0, \qquad \vec{p}_\mu , \quad \vec{p}_\nu$$

la conservazione della qdm si scrive $0 = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$

ovvero, passando alle proiezioni lungo la direzione del muone $p_\mu = p_\nu$

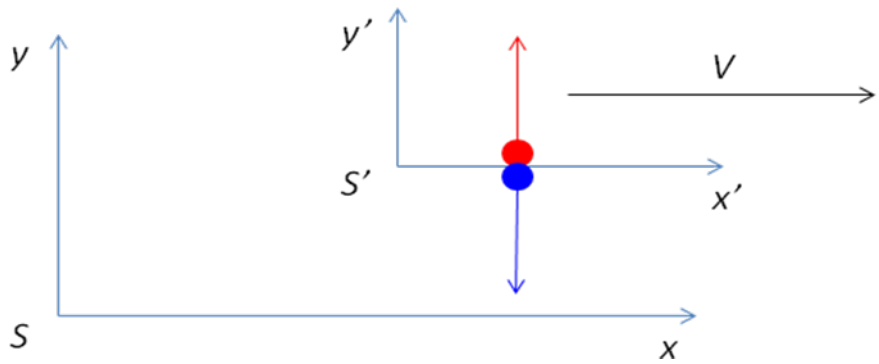
c) sostituendo (b) in (a): $\left(Mc^2 - p_\mu c\right)^2 = {p_\mu}^2c^2 + m^2c^4$ da cui, semplificando,

$$p_\mu = p_\nu = \frac{M^2 - m^2}{2M}c$$

Decadimento del pione (2)
Un pione (massa $M=140\ MeV/c^2$) è in moto con velocità $V=0.5c$ diretta lungo l'asse x del sistema di riferimento del laboratorio S. Nel sistema S' solidale con il pione, esso decade in un muone (massa $m=106\ MeV/c^2$) e un neutrino (massa nulla e quindi velocità pari a c). Si può dimostrare che nel sistema S' la quantità di moto del muone è data dall'espressione

$$p'_\mu = \frac{M^2 - m^2}{2M} c \,.$$

Supposto che il decadimento in S' avvenga lungo l'asse y' (vedi figura per la definizione degli assi in S e S')



a) trovare l'espressione della velocità del muone nel sistema S' ed il suo valore numerico;
b) trovare le componenti della velocità del muone $\mathbf{v}_\mu$ nel sistema S (in funzione di quelle in S') e il valore numerico del suo modulo;
c) trovare le componenti della velocità del neutrino nel sistema S (in funzione di quelle in S') e il valore numerico del suo modulo.

Soluzione

a) Ricordiamo l'espressione della qdm in funzione della velocità:
$p'_\mu = m\gamma'_\mu v'_\mu = m\gamma'_\mu \beta'_\mu c$, ove si è introdotto $\beta'_\mu = v'_\mu / c$ e ricordando la relazione tra β e γ,
sostituiamo nella formula data: $\dfrac{M^2 - m^2}{2Mm} = \dfrac{p'_\mu}{mc} = \gamma'_\mu \beta'_\mu = \dfrac{\beta'_\mu}{\sqrt{1-\beta'^2_\mu}}$. Risolvendo per β'_μ
troviamo:

$$\beta'_\mu = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}$$

e quindi $v'_\mu = \dfrac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} c = \dfrac{140^2 - 106^2}{140^2 + 106^2} c = 0.271c$

b) Le componenti della velocità del muone in S' sono $\vec{v}'_\mu = (0, v'_\mu, 0)$. Dalle eqq. di trasformazione otteniamo le componenti in S:

$$\left(v_\mu\right)_x = \frac{\left(v'_\mu\right)_x + V}{1+\left(v'_\mu\right)_x V/c^2} = \frac{0+V}{1+0} = V$$

$$\left(v_\mu\right)_y = \frac{\left(v'_\mu\right)_y}{\gamma\left(1+\left(v'_\mu\right)_x V/c^2\right)} = \frac{v'_\mu}{\gamma(1+0)} = \frac{v'_\mu}{\gamma}$$

ove γ è dato da

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = 1.155$$

il modulo della velocità del muone è dunque:

$$v_\mu = \sqrt{V^2 + \left(\frac{v'_\mu}{\gamma}\right)^2} = c\sqrt{0.5^2 + \left(\frac{0.271}{1.155}\right)^2} = 0.552c$$

c) Le componenti della velocità del neutrino in S' sono $\vec{v}'_\nu = (0, v'_\nu, 0) = (0, -c, 0)$, l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che il neutrino ha massa praticamente nulla e quindi velocità con buona approssimazione pari a *c*. Dalle eqq. di trasformazione otteniamo le componenti in S:

$$\left(v_\nu\right)_x = \frac{\left(v'_\nu\right)_x + V}{1+\left(v'_\nu\right)_x V/c^2} = \frac{0+V}{1+0} = V$$

$$\left(v_\nu\right)_y = \frac{\left(v'_\nu\right)_y}{\gamma\left(1+\left(v'_\nu\right)_x V/c^2\right)} = \frac{-c}{\gamma(1+0)} = -\frac{c}{\gamma}$$

Nell'approssimazione fatta, il modulo della velocità del neutrino vale *c* in S' e quindi ha lo stesso valore anche in S: $v_\nu = c$.

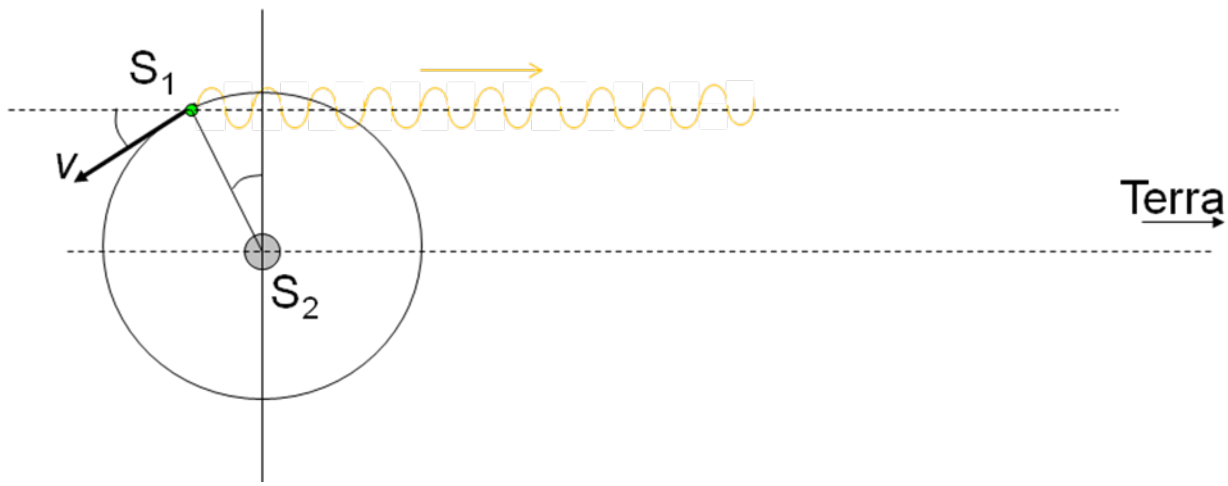
Effetto Doppler

Un sistema binario è composto da due stelle S_1 S_2 orbitanti una attorno all'altra. Consideriamo la luce emessa dalla stella S_1 e osservata sulla Terra a grande distanza *d* dal sistema. Una qualunque riga spettrale di frequenza *f* sarà spostata per effetto Doppler dovuto al moto di rivoluzione della stella. Tale effetto dipende dal tempo, poiché la velocità relativa della stella rispetto alla Terra varia continuamente nel tempo. Supposto per semplicità che l'osservatore terrestre giaccia nel piano dell'orbita stellare, che questa sia circolare con velocità *v* uniforme e la velocita` della Terra non cambi, determinare

a) l'espressione della frequenza *f'* misurata sulla Terra, in funzione del tempo;
b) il valore medio, massimo e minimo della frequenza *f'*;

Supposto di aver misurato le frequenze al punto (b), determinare

c) la velocità di rivoluzione della stella;
d) il valore della frequenza *f* nel sistema di riferimento solidale con S_1.



Soluzione

a) Per come sono stati scelti in figura, gli angoli Doppler θ e orbitale ωt sono uguali. La frequenza rilevata sulla Terra è data da $f' = f\gamma(1-\beta\cos\theta) = f\gamma(1-\beta\cos\omega t)$.

b) Il valor medio è $\langle f' \rangle = \langle f\gamma(1-\beta\cos\omega t)\rangle = f\gamma$, mentre il massimo e il minimo si ottengono, rispettivamente, per $\theta = \pi$ e $\theta = 0$:

$$f'_{\max} = f\gamma(1+\beta),\ f'_{\min} = f\gamma(1-\beta).$$

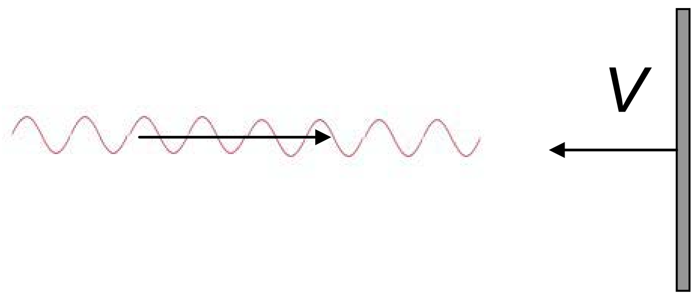
c) Dal rapporto *R* tra la frequenza massima e minima, abbiamo $R = \dfrac{f'_{\max}}{f'_{\min}} = \dfrac{1+\beta}{1-\beta}$, da cui

$$v = \beta c = \frac{R-1}{R+1}c.$$

d) Si risale alla frequenza di emissione della luce, dal suo valor medio (rispetto all'osservatore terrestre) e dalla velocità: $f = \dfrac{\langle f' \rangle}{\gamma} = \langle f' \rangle \sqrt{1-\beta^2} = \langle f' \rangle 2 \dfrac{\sqrt{R}}{R+1}$.

Effetto Doppler

Nel sistema S del laboratorio, un fascio di luce di frequenza f_1 è inviato perpendicolarmente contro uno specchio in moto in verso opposto con velocità V.



Ricordando la legge dell'effetto Doppler relativistico $f' = f\gamma(1-\beta\cos\theta)$, determinare

a) la frequenza f_1' della luce nel sistema S' solidale con lo specchio.

Lo specchio riflette la luce incidente in verso opposto. Determinare

b) la frequenza f_2 della luce riflessa, nel sistema del laboratorio, in funzione di f_1 e di V.

Soluzione

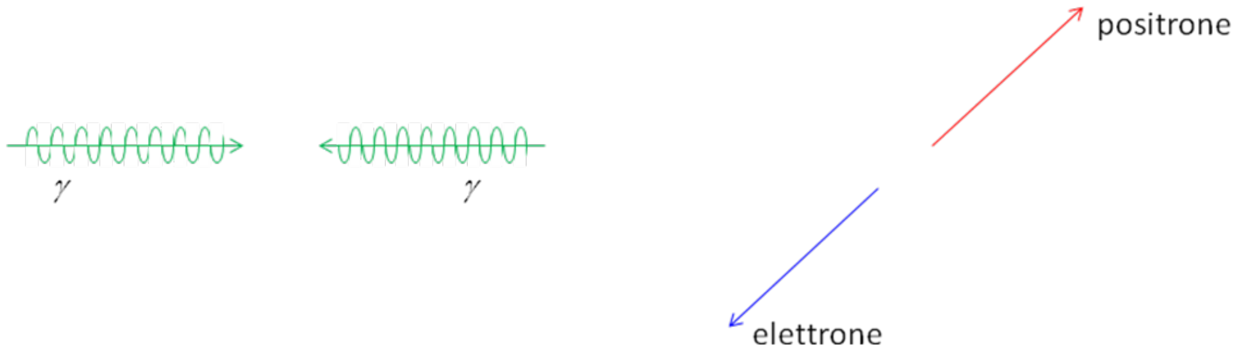
a) In S l'angolo θ tra la velocità dell'onda e la velocità di S' è π, ne segue
$$f'_1 = f_1\gamma(1+\beta)$$

b) In S' la luce riflessa ha la stessa frequenza f_1' e l'angolo θ' tra la velocità dell'onda riflessa e la velocità del sistema del laboratorio è, di nuovo, π. In S la luce riflessa avrà una frequenza
$$f_2 = f'_1\gamma(1+\beta)$$

e quindi $f_2 = f_1\gamma^2(1+\beta)^2 = f_1\dfrac{1+\beta}{1-\beta}$

Reazione fotone+fotone->elettrone+positrone

Due fotoni (raggi gamma) di ugual energia ε e quantità di moto *p* si urtano frontalmente, annichilano e producono una coppia elettrone-positrone.



a) Scrivere la quantità di moto e l'energia dello stato iniziale;
b) Scrivere la quantità di moto e l'energia dello stato finale;
c) Imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia, determinare la quantità di moto *P* e l'energia *E* sia dell'elettrone che del positrone.
d) Qual è la minima energia dei fotoni, affinché la reazione possa avvenire?

NOTA 1: la massa dell'elettrone è uguale a quella del positrone.

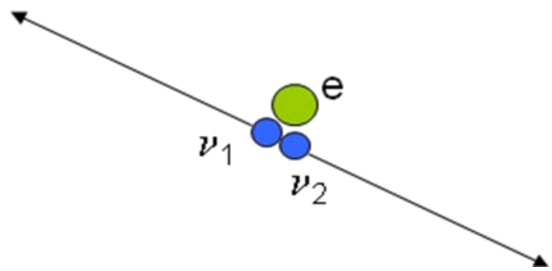
NOTA 2: si trascuri l'energia potenziale dovuta all'attrazione elettrostatica tra elettrone e positrone.

Soluzione

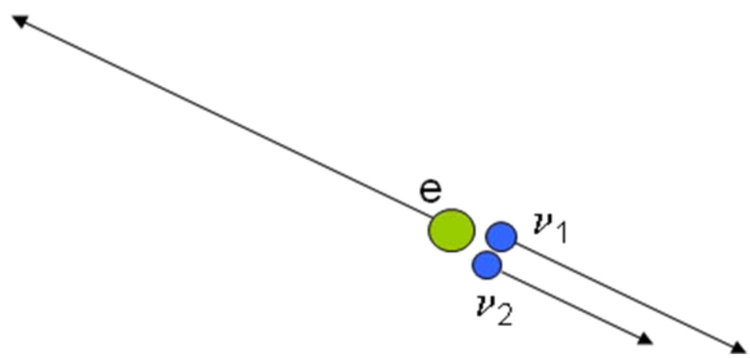
a) Quantità di moto iniziale: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, energia iniziale: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$. Poiché per un fotone $\varepsilon = pc$, dall'uguaglianza delle energie segue che le quantità di moto delle due particelle sono uguali: $p_1 = p_2 = p$. Inoltre il fatto che l'urto sia frontale implica che la quantità di moto iniziale sia nulla: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.
b) Quantità di moto finale: $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$, energia finale: $E_1 + E_2 = \sqrt{P_1^2c^2 + m^2c^4} + \sqrt{P_2^2c^2 + m^2c^4}$.
c) Imponendo la conservazione della qdm otteniamo $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$, da cui segue che la qdm dell'elettrone e del positrone sono uguali in modulo: $P_1 = P_2 = P$, da cui segue che anche le energie delle due particelle sono uguali $E_1 = E_2 = E$. Immettendo questi risultati nell'equazione dell'energia troviamo $E = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4}$. Imponendo la conservazione dell'energia troviamo $\sqrt{P^2c^2 + m^2c^4} = \varepsilon$ e risolvendo per *P*: $P = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2c^2}$.
d) L'energia dev'essere tale che il radicando sia positivo, quindi $\varepsilon \geq mc^2$. Fisicamente questo significa che l'energia dei fotoni dev'essere almeno sufficiente per produrre le particelle a riposo; tutta l'energia in più si ritrova come energia cinetica delle particelle.

Decadimento del muone

I muoni decadono in un elettrone e due neutrini. L'energia che l'elettrone assume è in generale diversa da decadimento a decadimento. Essa varia da un minimo E_{min}, quando esso è fermo e i due neutrini sono emessi in direzioni opposte:



a un massimo E_{max} quando è emesso in direzione opposta a quella comune dei due neutrini:



In questo secondo caso, detta M la massa del muone e m quella dell'elettrone, supponendo nulla la massa dei neutrini, e il muone inizialmente fermo, si scriva

a) la conservazione dell'energia;
b) la conservazione della quantità di moto;
c) si trovi l'espressione del valore massimo dell'energia dell'elettrone in funzione delle masse M, m;
d) si trovi l'espressione del valore massimo dell'energia **cinetica** K dell'elettrone in funzione delle masse M, m.

Suggerimento: considerare i due neutrini come un'unica particella.

Soluzione

a) Conservazione dell'energia: $E_i = E_f$ ovvero $E_\mu = E_e + E_{\nu 1} + E_{\nu 2}$ e sostituendo:
$Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_e^2c^2} + p_{\nu 1}c + p_{\nu 2}c$.

b) Conservazione della quantità di moto: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ ovvero $\vec{p}_\mu = \vec{p}_e + \vec{p}_{\nu 1} + \vec{p}_{\nu 2}$ e sostituendo: $0 = p_e - p_{\nu 1} - p_{\nu 2}$.

c) Posto $P = p_{\nu 1} + p_{\nu 2}$ (consideriamo i due neutrini come un unico sistema) abbiamo le due equazioni

$$\begin{cases} Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_e^2c^2} + Pc \\ p_e = P \end{cases}.$$

Risolvendo otteniamo la quantità di moto massima dell'elettrone:

$$Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_e^2c^2} + p_e c$$

$$\left(Mc^2 - p_e c\right)^2 = m^2c^4 + p_e^2c^2$$

$$p_e = \frac{\left(M^2 - m^2\right)c}{2M}$$

e l'energia massima dell'elettrone:

$$E_e = \sqrt{m^2c^4 + p_e^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + \left(\frac{\left(M^2 - m^2\right)c}{2M}\right)^2 c^2} =$$

$$= \sqrt{m^2c^4 + \frac{\left(M^2 - m^2\right)^2}{4M^2}c^4} = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2$$

d) L'energia cinetica massima e` data da

$$K = E_e - mc^2 = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2 - mc^2 = \frac{\left(M - m\right)^2}{2M}c^2.$$