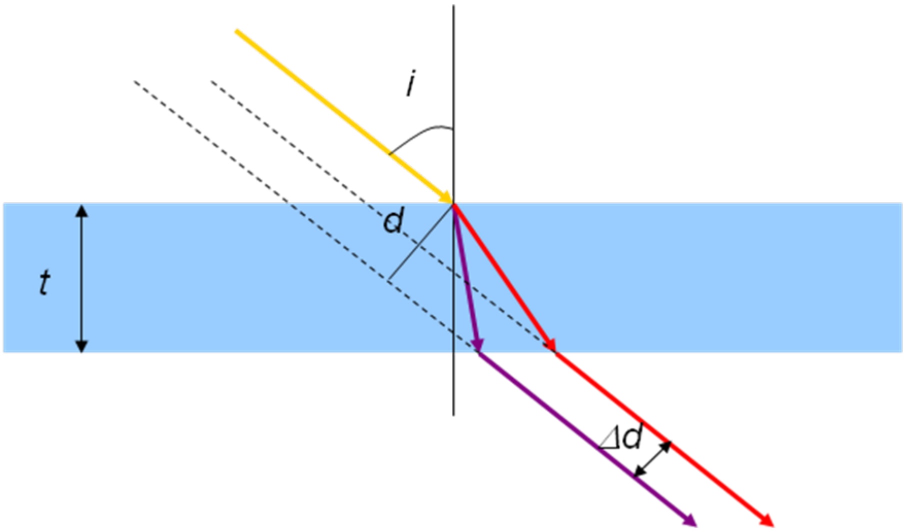
Soluzione del compito del 3 settembre 2012

Ottica geometrica

Un raggio di luce bianca incide su una lastra di vetro a facce parallele di spessore *t* con un angolo di incidenza *i*. A causa della dispersione della luce, il raggio si separa in un pennello di raggi associati ciascuno ad una frequenza luminosa diversa. Sia *d* lo spostamento trasversale del raggio generico.



Detti n_R e n_V gli indici di rifrazione delle frequenze visibili estreme (corrispondenti alla radiazione rossa e violetta, rispettivamente),

a) trovare lo spostamento laterale *d* per una frequenza generica. Esprimerla in funzione dell'angolo *i*.
b) Trovare la larghezza trasversale Δd del pennello di raggi rifratti.

Carlo e Francesca stanno studiando il fenomeno, quando Carlo si chiede se sia possibile riunire nuovamente in un unico raggio bianco i raggi colorati rifratti dalla lastra. Dopo averci pensato un po' Francesca esclama: "C'è un principio di ottica che permette di rispondere affermativamente e senza fare calcoli alla tua domanda, basta usare una seconda lastra uguale alla prima".

c) A quale principio si riferisce Francesca?
d) Come dev'essere posta la lastra per riottenere il raggio bianco?

Soluzione

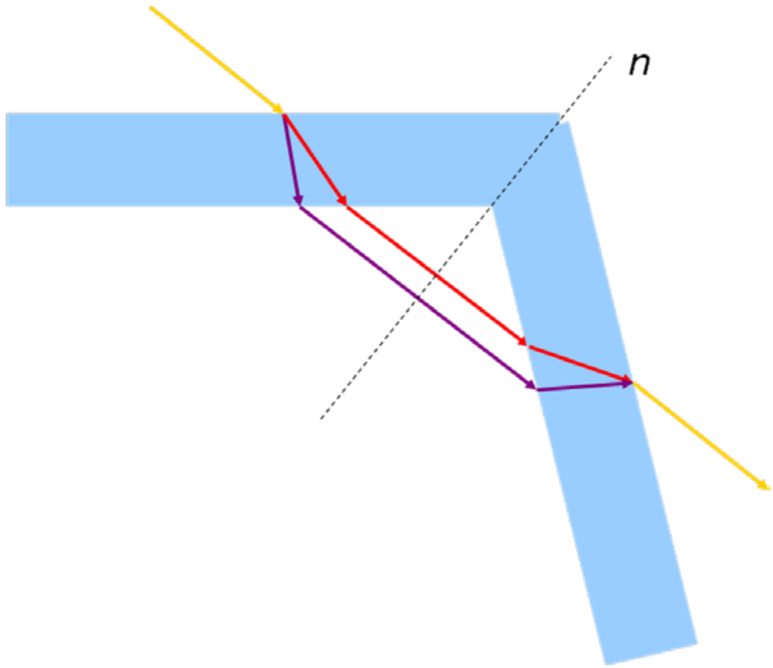
a) Detta *l* la lunghezza del cammino del raggio generico nel vetro, vale la relazione $l = \dfrac{t}{\cos r}$

e la relazione tra *l* e *d* è $d = l\sin(i-r)$, quindi

$$d = t\frac{\sin(i-r)}{\cos r} = t\left(\sin i - \cos i \frac{\sin r}{\cos r}\right) = t\sin i\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right)$$

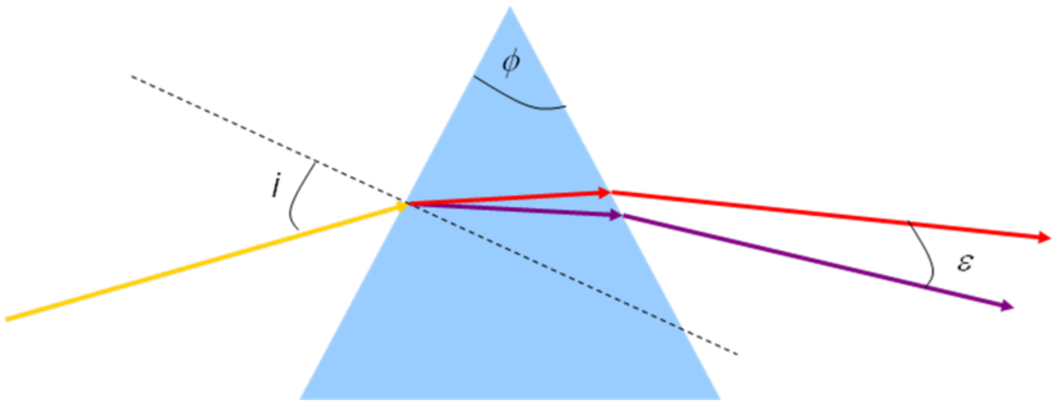
b) La larghezza del pennello di raggi è data dalla differenza tra i valori di *d* delle frequenze estreme: $\Delta d = t\sin i\cos i\left(\dfrac{1}{\sqrt{n_R{}^2 - \sin^2 i}} - \dfrac{1}{\sqrt{n_V{}^2 - \sin^2 i}}\right)$.

c) Al principio di reversibilità` del cammino ottico.
d) Detta *n* la direzione perpendicolare a quella dei raggi in aria, la seconda lastra dev'essere posta simmetricamente alla prima rispetto a *n* (vedi figura).


n

Ottica geometrica

Un raggio di luce bianca incide su un prisma di vetro di angolo di apertura ϕ =*60°* con un angolo di incidenza *i=45°*. A causa della dispersione della luce, il raggio si separa in un pennello di raggi associati ciascuno ad una frequenza luminosa diversa.



Detto n_R =1.51 l'indice di rifrazione della radiazione rossa e n_V =1.53 quello radiazione violetta (corrispondenti ai limiti delle frequenze visibili), determinare numericamente:

a) gli angoli di rifrazione r_R , r_V nel punto d'entrata per la radiazione rossa e violetta;
b) gli angoli di incidenza i'_R , i'_V nel punto d'uscita per la radiazione rossa e violetta;
c) gli angoli di rifrazione r'_R , r'_V nel punto d'uscita per la radiazione rossa e violetta;
d) l'ampiezza del pennello di raggi uscenti, ovvero dell'angolo ε individuato dai raggi rosso e violetto.

Suggerimento: trovare preliminarmente la relazione tra r, i' e ϕ.

Soluzione

a) Nel punto d'entrata applichiamo la legge di Snell:

$$r_R = \arcsin\left(\frac{1}{n_R}\sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.51}\sin 45°\right) = 27.92°$$

$$r_V = \arcsin\left(\frac{1}{n_V}\sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.53}\sin 45°\right) = 27.53°$$

b) Dalla relazione $i' = \phi - r$ otteniamo:

$$i'_R = 60° - 27.92° = 32.08°$$

$$i'_V = 60° - 27.53° = 32.47°$$

c) Nel punto d'uscita applichiamo di nuovo la legge di Snell:

$$r'_R = \arcsin(n_R \sin i'_R) = \arcsin(1.51 \sin 32.08°) = 53.31°$$

$$r'_V = \arcsin(n_V \sin i'_V) = \arcsin(1.53 \sin 32.47°) = 55.23°$$

d) Infine l'angolo ε è dato dall'espressione:

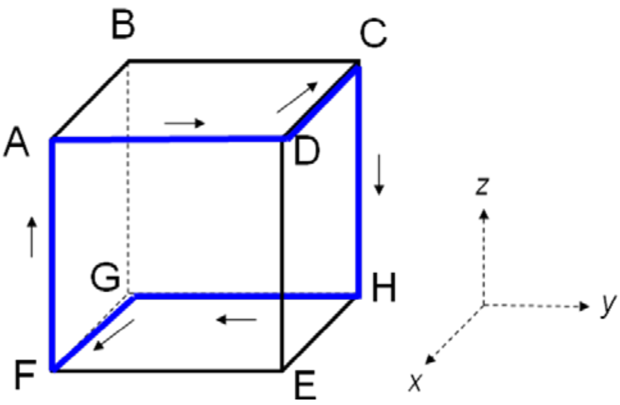
$$\varepsilon = r'_V - r'_R = 55.23° - 53.31° = 1.92°$$

Magnetismo

È data una spira non piana percorsa da corrente I (vedi curva blu in figura, la figura ABCDEFGH è un cubo di lato L) e immersa in un campo magnetico uniforme diretto lungo z: $\vec{B} = B_0\hat{k}$

Trovare:

a) la forza agente sui lati della spira;
b) il momento meccanico agente sulla spira;



Carlo e Francesca stanno considerando il problema e Carlo propone di complicarlo un po' assumendo che il campo dipenda da z secondo l'espressione

$$\vec{B} = (B_0 - \gamma z)\hat{k}$$

Francesca ci pensa un po' su ed esclama: "Non è possibile, questa espressione è in disaccordo con una delle leggi di Maxwell"

c) quale legge di Maxwell viola l'espressione del campo proposta da Carlo? Dimostrare tale violazione usando la formulazione integrale della legge.

Soluzione

a) La forza totale è uguale alla somma delle forze agenti sui singoli lati di filo:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{CH} + \vec{F}_{HG} + \vec{F}_{GF} + \vec{F}_{FA}$$

I contributi dei lati AF e CH sono nulli poiché la corrente scorre parallelamente al campo; i contributi dei lati AD e HG danno forze dirette lungo x; i contributi dei lati DC e GF danno forze dirette lungo y:

$$\vec{F}_{tot} = F_{AD}\hat{i} + F_{DC}\hat{j} - F_{HG}\hat{i}F_{GF}\hat{j}$$

Il modulo di tutte le forze è uguale: $F = ILB$, avremo quindi:

$$\vec{F}_{tot} = \left(\hat{i} + \hat{j} - \hat{i} - \hat{j}\right)ILB = 0$$

b) Il momento è uguale alla somma dei momenti agenti sui singoli lati di filo: i contributi dei lati AF e CH sono nulli poiché le forze corrispondenti sono nulle; scegliamo poi come polo il centro della base EFGH, di modo che il momento dei lati FG, GH risulti pure nullo; il contributo dei lati AD, DC è:

$$\vec{\tau}_{AD} = \vec{L} \times F_{AD}\hat{i} = IL^2B\hat{j}$$
$$\vec{\tau}_{DC} = \vec{L} \times F_{DC}\hat{j} = -IL^2B\hat{i}$$

il momento risultante è $\vec{\tau} = IL^2B\left(\hat{j} - \hat{i}\right)$

c) La legge violata è quella dell'assenza di cariche magnetiche. Se calcoliamo il flusso del campo attraverso la superficie del cubo otteniamo infatti (le facce laterali danno contributo nullo):

$$\Phi = \Phi_{ABCD} + \Phi_{EFGH} = L^2B(L) - L^2B(0) = -L^2\gamma L = -\gamma L^3 \neq 0$$

cioè un risultato non nullo, contrariamente al dettato della legge.