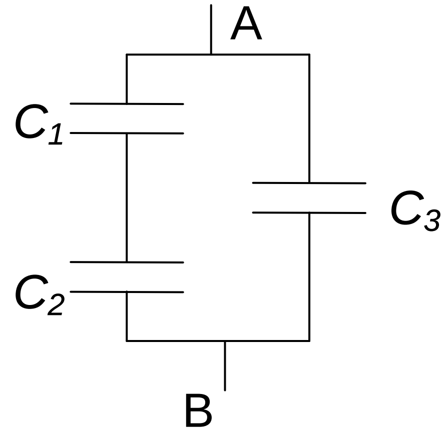
Elettrostatica



Tre condensatori C_1 = 2 μF, C_2 = 6 μF, C_3 = 3.5 μF, sono disposti come in figura.

a) Trovare la capacità equivalente del sistema;
b) se le ddp di scarica dei condensatori sono V_1 = 100 V, V_2 = 50 V, V_3 = 400 V, qual è la massima ddp che si può applicare tra A e B?

Soluzione

a) troviamo dapprima la capacità equivalente C_{12} del ramo di sinistra:

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{6\mu}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3\mu}\right)^{-1} = 1.5\mu F$$

quindi la capacità equivalente totale:

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = 1.5\mu F + 3.5\mu F = 5\mu F$$

b) detta V_{AB} la ddp applicata ai punti A, B, determiniamo la ddp ai capi di ciascun condensatore. Per C_3, V_3=V_{AB}. Per i condensatori del ramo sinistro, notiamo che la carica sui due è la stessa, quindi

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

e poiché V_1+ V_2=V_{AB} otteniamo

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}V_{AB} = \frac{6}{2+6}V_{AB} = \frac{3}{4}V_{AB}$$
$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V_{AB} = \frac{2}{2+6}V_{AB} = \frac{1}{4}V_{AB}$$

Imponiamo ora le condizioni di assenza di scarica:

$$\frac{3}{4}V_{AB} = V_1 < 100V$$
$$\frac{1}{4}V_{AB} = V_2 < 50V$$
$$V_{AB} = V_3 < 400V$$

da cui

$$V_{AB} < \frac{4}{3}100V = 133V$$
$$V_{AB} < 4 \cdot 50V = 200V$$
$$V_{AB} < 400V$$

La condizione più restrittiva è la prima, che quindi stabilisce la massima ddp applicabile.

Magnetismo

Si costruisce una bobina di *N* spire circolari uguali partendo da un filo di lunghezza fissata *l*. Se la corrente che circola nella bobina vale *I*,

a) trovare il valore del momento magnetico μ della spira;
b) trovare il valore di *N* che massimizza il momento magnetico;
c) perché nella ricerca del massimo valore del momento magnetico si possono considerare solo spire circolari?

Soluzione

a) se abbiamo *N* spire, ognuna ha una lunghezza $2\pi r = l / N$ ovvero un raggio $r = l / 2\pi N$ e un'area $a = \pi r^2 = \dfrac{l^2}{4\pi N^2}$. Il momento magnetico della bobina è $\mu = IaN = \dfrac{l^2 I}{4\pi N}$

b) il momento è massimo quando si ha una sola spira: $\mu_{\max} = \dfrac{l^2 I}{4\pi}$

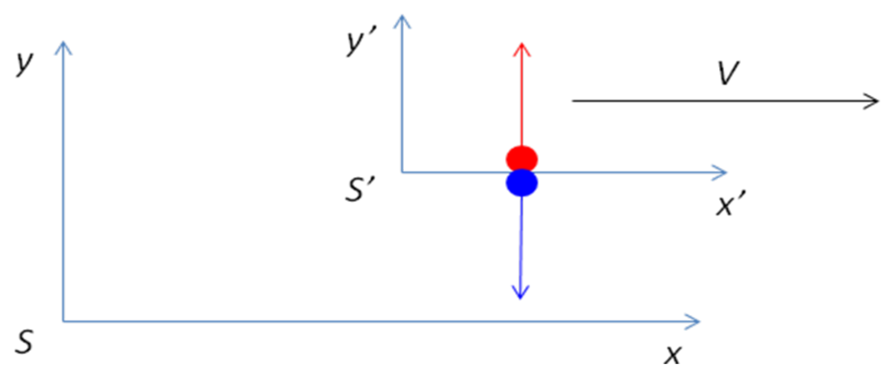
c) perché il cerchio è la figura geometrica che massimizza l'area a parità di lunghezza della spira.

Relatività

Un pione (massa *M=140 MeV/c²*) è in moto con velocità *V=0.5c* diretta lungo l'asse *x* del sistema di riferimento del laboratorio S. Nel sistema S' solidale con il pione, esso decade in un muone (massa *m=106 MeV/c²*) e un neutrino (massa nulla e quindi velocità pari a *c*). Si può dimostrare che nel sistema S' la quantità di moto del muone è data dall'espressione

$$p'_\mu = \frac{M^2 - m^2}{2M} c\,.$$

Supposto che il decadimento in S' avvenga lungo l'asse *y'* (vedi figura per la definizione degli assi in S e S')



a) trovare l'espressione della velocità del muone nel sistema S' ed il suo valore numerico;
b) trovare le componenti della velocità del muone $\mathbf{v}_\mu$ nel sistema S (in funzione di quelle in S') e il valore numerico del suo modulo;
c) trovare le componenti della velocità del neutrino nel sistema S (in funzione di quelle in S') e il valore numerico del suo modulo.

Soluzione

a) Ricordiamo l'espressione della qdm in funzione della velocità:
$p'_\mu = m\gamma'_\mu v'_\mu = m\gamma'_\mu \beta'_\mu c$, ove si è introdotto $\beta'_\mu = v'_\mu / c$ e ricordando la relazione tra β e γ, sostituiamo nella formula data: $\dfrac{M^2 - m^2}{2Mm} = \dfrac{p'_\mu}{mc} = \gamma'_\mu \beta'_\mu = \dfrac{\beta'_\mu}{\sqrt{1-\beta'^2_\mu}}$. Risolvendo per β'_μ

troviamo:

$$\beta'_\mu = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}$$

e quindi $v'_\mu = \dfrac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} c = \dfrac{140^2 - 106^2}{140^2 + 106^2} c = 0.271c$

b) Le componenti della velocità del muone in S' sono $\vec{v}'_\mu = (0, v'_\mu, 0)$. Dalle eqq. di trasformazione otteniamo le componenti in S:

$$\left(v_\mu\right)_x = \frac{\left(v'_\mu\right)_x + V}{1 + \left(v'_\mu\right)_x V/c^2} = \frac{0+V}{1+0} = V$$

$$\left(v_\mu\right)_y = \frac{\left(v'_\mu\right)_y}{\gamma\left(1 + \left(v'_\mu\right)_x V/c^2\right)} = \frac{v'_\mu}{\gamma(1+0)} = \frac{v'_\mu}{\gamma}$$

ove γ è dato da

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = 1.155$$

il modulo della velocità del muone è dunque:

$$v_\mu = \sqrt{V^2 + \left(\frac{v'_\mu}{\gamma}\right)^2} = c\sqrt{0.5^2 + \left(\frac{0.271}{1.155}\right)^2} = 0.552c$$

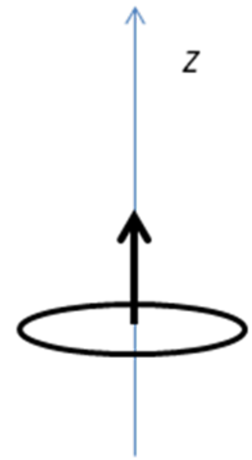
c) Le componenti della velocità del neutrino in S' sono $\vec{v}'_\nu = (0, v'_\nu, 0) = (0, -c, 0)$, l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che il neutrino ha massa praticamente nulla e quindi velocità con buona approssimazione pari a *c*. Dalle eqq. di trasformazione otteniamo le componenti in S:

$$\left(v_\nu\right)_x = \frac{\left(v'_\nu\right)_x + V}{1 + \left(v'_\nu\right)_x V/c^2} = \frac{0+V}{1+0} = V$$

$$\left(v_\nu\right)_y = \frac{\left(v'_\nu\right)_y}{\gamma\left(1 + \left(v'_\nu\right)_x V/c^2\right)} = \frac{-c}{\gamma(1+0)} = -\frac{c}{\gamma}$$

Nell'approssimazione fatta, il modulo della velocità del neutrino vale *c* in S' e quindi ha lo stesso valore anche in S: $v_\nu = c$.

Elettrodinamica



Una spira circolare di raggio *a* e resistenza *R* è immersa in un campo magnetico diretto lungo l'asse *z*, dotato di simmetria cilindrica e che, nello spazio occupato dalla spira, dipende da *r* come

$$B(r) = B_0 - \gamma r^2 .$$

Il campo inoltre varia nel tempo secondo la legge *F(t)*: $B(r,t) = (B_0 - \gamma r^2)F(t)$.

L'asse della spira coincide con l'asse di simmetria del campo.

a) Calcolare la corrente indotta nella spira;
b) calcolare il campo magnetico prodotto da questa corrente al centro della spira;
c) calcolare il campo totale al centro della spira nel caso $F(t) = \sin\omega t$.

Soluzione

a) Per calcolare la corrente occorre preliminarmente calcolare il flusso del campo ***B*** concatenato alla spira:

$$\Phi(B) = \iint_{C(spira)} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \iint_{C(spira)} (B_0 - \gamma r^2)F(t)da = \int_0^a (B_0 - \gamma r^2)2\pi r dr \cdot F(t) =$$

$$= \pi a^2\left(B_0 - \frac{\gamma}{2}a^2\right)F(t)$$

Quindi $i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{1}{R}\pi a^2\left(B_0 - \frac{\gamma}{2}a^2\right)\frac{dF(t)}{dt}$

b) Il campo al centro della spira, dovuto alla corrente indotta è

$$B_{spira}(C) = -\mu_0 \frac{\pi}{2}\frac{a}{R}\left(B_0 - \frac{\gamma}{2}a^2\right)\frac{dF(t)}{dt}$$

c) Il campo totale al centro della spira (*r=0*) è

$$B_{tot}(C) = B_0 \sin\omega t - \mu_0 \frac{\pi}{2}\frac{a\omega}{R}\left(B_0 - \frac{\gamma}{2}a^2\right)\cos\omega t$$

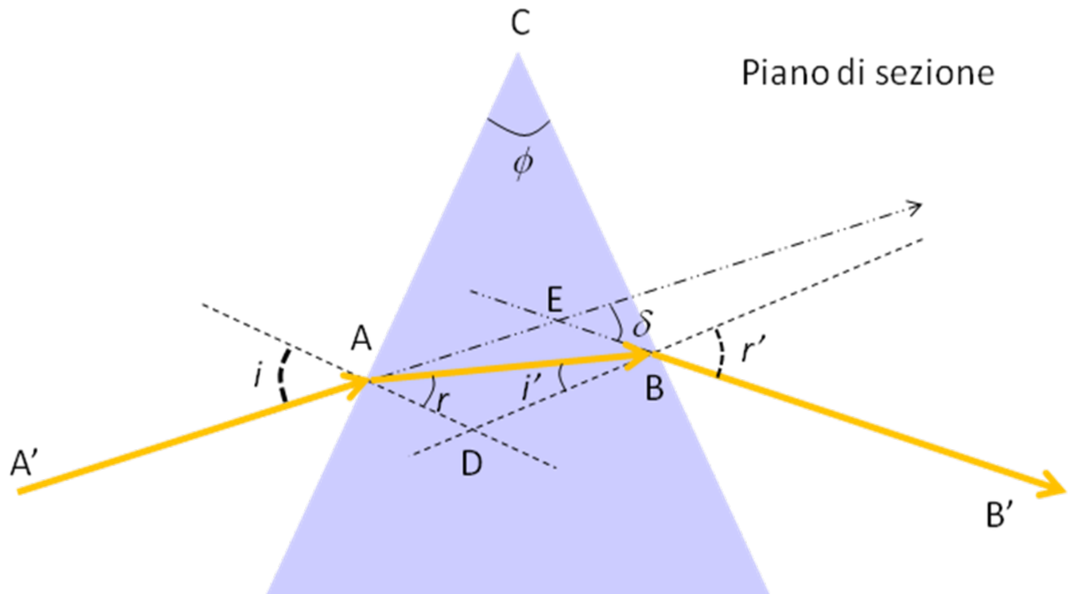
Ottica geometrica

La misura dell'indice di rifrazione di un mezzo trasparente si basa sulla legge di Snell. La difficoltà sperimentale consiste nella misura degli angoli *i* e *r*. Un metodo per superate tale difficoltà è quello di inviare un raggio di luce su una porzione di materiale tagliato a prisma triangolare e determinare due quantità facilmente misurabili: l'angolo di deviazione del raggio e l'angolo al vertice del prisma.
Sia dunque dato un prisma di vetro di indice di rifrazione *n,* a sezione triangolare e con angolo al vertice ϕ (vedi figura). Un raggio di luce A'A giacente sul piano di sezione incontra il prisma nel punto A dove subisce rifrazione. Il raggio prosegue lungo AB, subisce una seconda rifrazione in B e fuoriesce dal prisma, proseguendo lungo BB'. Diciamo rispettivamente *i, r* gli angoli di incidenza e rifrazione in A e *i', r'* gli angoli di incidenza e rifrazione in B. Le rette AD e BD sono perpendicolari rispettivamente in A e B ai due lati del prisma. L'angolo δ in E compreso tra le rette A'A e BB' è detto **angolo di deviazione** del raggio.
NOTA: trascurare i raggi riflessi.

a) Considerando il triangolo ABC, trovare la relazione tra l'angolo ϕ e gli angoli *r, i'*;
b) considerando il triangolo AEB trovare la relazione tra l'angolo δ e gli angoli *i, r, i', r'*.

E` sempre possibile porsi in una situazione simmetrica, in cui *r'=i , i'=r* .

c) Riscrivere in questo caso le due relazioni relative ai punti (a) e (b) e determinare l'indice di rifrazione mediante la legge di Snell in funzione delle quantità misurabili ϕ e δ.
Suggerimento: esprimere *r* in funzione di ϕ e *i* in funzione di ϕ e δ.



Soluzione

a) Notiamo che l'angolo CAB vale $\frac{\pi}{2} - r$ e l'angolo CBA $\frac{\pi}{2} - i'$. La somma degli angoli del triangolo ABC è dunque $\pi = \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i'\right) + \phi$, da cui segue $\phi = r + i'$.

b) L'ampiezza dell'angolo esterno in E al triangolo AEB è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti EAB e EBA. Il primo è uguale a $i - r$, il secondo a $r' - i'$, quindi

$$\delta = i - r + r' - i'$$

c) In tal caso $\phi = 2r$, $\delta = 2(i - r)$, da cui $r = \frac{\phi}{2}$, $i = \frac{\delta + \phi}{2}$ e applicando la legge di Snell:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\delta + \phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$