Magnetismo

È dato un conduttore cilindrico di lunghezza *L*, sezione *A* e resistività ρ, collegato ad una batteria di fem *E*. Il contatto elettrico con le basi è realizzato mediante piatti conduttori di area *A* e resistività molto minore di ρ, in modo che le basi del cilindro risultino equipotenziali.

Determinare

a) la corrente e la densità di corrente che attraversano il conduttore;
b) il campo magnetico B all'interno del conduttore, supposto che la lunghezza *L* sia molto grande rispetto alle dimensioni trasversali, di modo che si possano trascurare gli effetti di bordo;
c) la densità di energia magnetica all'interno del conduttore;
d) l'energia magnetica immagazzinata in un tratto di lunghezza *a* del conduttore.

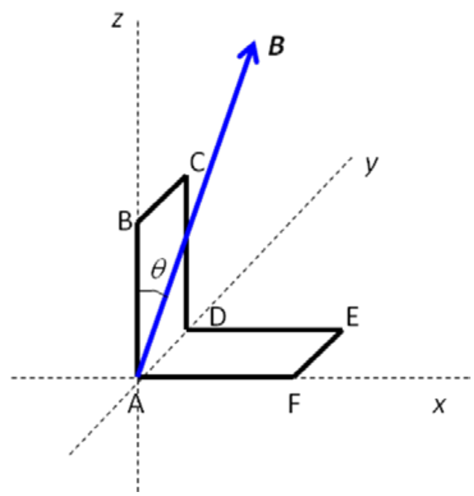
Soluzione

a) la resistenza totale del conduttore è $R = \rho L / A$, la corrente e la densità di corrente risultano $i = E / R$, $J = E / RA = E / \rho L$.
b) il campo si trova con la legge di Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i_{conc}$, ove la circuitazione va fatta lungo una circonferenza coassiale col cilindro (ove è garantito che il campo è uniforme) e la corrente concatenata è quella contenuta nel cerchio che appoggia sulla circonferenza. Supposto che la densità di corrente sia uniforme sulla sezione circolare, tale corrente vale $i_{conc} = iA(r) / A$ ove *A(r)* è l'area del cerchio amperiano di raggio *r*. Avremo quindi $B 2\pi r = \mu i A(r) / A = \mu i r^2 / r_0^2$ e infine $B = \mu i r / 2\pi r_0^2$, ove r_0 è il raggio della sezione circolare.
c) la densità di energia entro il conduttore è $u_m = B^2 / 2\mu = \dfrac{i^2 r^2}{8\pi^2 \mu r_0^4}$.
d) l'energia magnetica si trova integrando la densità nel volume del tratto lungo *a*:

$$U_m = \iiint_V B^2 / 2\mu dV = \iiint_V \frac{i^2 r^2}{8\pi^2 \mu r_0^4} r dr d\phi dz = \frac{i^2}{8\pi^2 \mu r_0^4} 2\pi a \int_o^{r_0} r^3 dr = \frac{i^2 a}{16\pi\mu}$$

Elettrodinamica

Due studenti vogliono calcolare il flusso di un campo magnetico uniforme ***B*** concatenato con una spira non piana (vedi figura)



in cui i vertici A, B, C, D, E, F coincidono con sei degli otto vertici di un cubo da lato *L*. La spira può ruotare attorno all'asse *y*, cosicché sia il lato AB che AF giacciono sempre nel piano *xz*. Nel sistema di riferimento scelto, il campo *B* non ha componenti lungo *y*. Il primo studente sceglie come superficie di integrazione l'unione dei due quadrati ABCD e DEFA. Il secondo studente sceglie invece l'unione del rettangolo BCEF e dei due triangoli ABF e DCE. Sia θ l'angolo tra la direzione AB e il campo magnetico in un istante arbitrario di tempo.

a) Calcolare il flusso sulla superficie scelta dal primo studente.
b) Calcolare il flusso sulla superficie scelta dal secondo studente.
c) trovare la *fem* indotta nella spira se essa ruota di moto circolare uniforme con velocità angolare di rotazione ω.

Soluzione

a) La prima scelta dà:

$$\Phi(B) = \Phi_{ABCD}(B) + \Phi_{DEFA}(B) = BA_{ABCD}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + BA_{DEFA}\cos\theta = BA(\sin\theta + \cos\theta)$$

Ove si è indicata con *A* l'area comune delle due superfici.

b) La seconda scelta dà:

$$\Phi'(B) = \Phi_{BCEF}(B) + \Phi_{ABF}(B) + \Phi_{DCE}(B) = BA_{BCEF}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + 0 + 0 =$$

$$= BA'\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta + \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\right) = BA'\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$$

ove con *A'* si è indicata l'area del rettangolo BCEF e si è tenuto conto che il flusso sui due triangoli è nullo. La relazione tra le aree *A* e *A'* è $A' = \sqrt{2}A$, ne segue, come dev'essere, che i due calcoli danno lo stesso risultato.

c) La *fem* si trova derivando il flusso rispetto al tempo:

$$fem = -\frac{d}{dt}\left[BA(\sin\omega t + \cos\omega t)\right] = BA\omega(-\cos\omega t + \sin\omega t)$$