Soluzione del compito di Fisica 2

3 febbraio 2012 (Pordenone)

Elettrostatica

Un condensatore cilindrico di raggio interno *a*, raggio esterno *b* e lunghezza *L* (molto maggiore di *b*, di modo che gli effetti di bordo siano trascurabili), e` riempito di un'olio isolante di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$. Il condensatore e` collegato ad una batteria di fem *F*. Trovare

a) la capacita` *C* del condensatore;

b) la carica *Q* erogata dal generatore per caricare il condensatore;

c) l'energia elettrostatica *U* immagazzinata nel condensatore;

d) l'energia elettrica totale $\mathscr{E}$ fornita dal generatore. Giustificare la risposta.

Soluzione

a) La capacita` si trova come rapporto fra carica e ddp. Quest'ultima si calcola a partire dal campo elettrico, che a sua volta si puo` calcolare dalla legge di Gauss

$$E = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \qquad V = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon}\log\frac{b}{a} \qquad C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\log\frac{b}{a}}$$

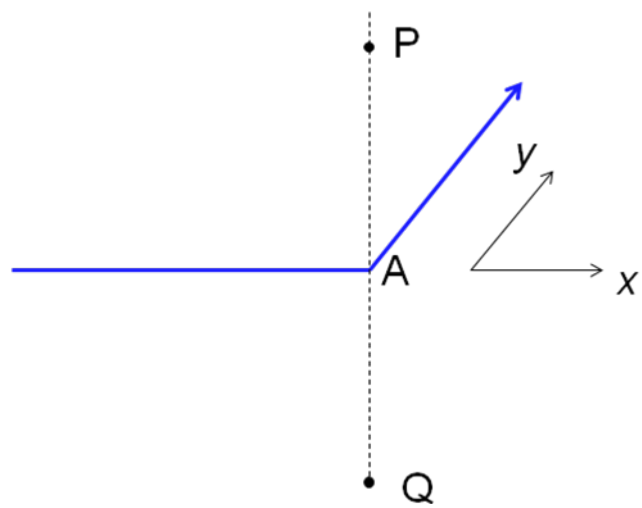
b) la carica erogata dal generatore per caricare il condensatore e` $Q = CF$

c) l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore e` $U = \frac{1}{2}CF^2$

d) l'energia totale fornita dal generatore e` pari alla carica erogata per la fem : $\mathscr{E} = QF = CF^2$. Questa energia e` il doppio di quella immagazzinata nel condensatore, una parte dell'energia e` infatti dissipata nella resistenza del circuito (in particolare nella resistenza interna del generatore). Si dimostra con calcolo diretto che tale energia e` indipendente dal valore della resistenza e vale proprio quanto l'energia immagazzinata nel condensatore.

Magnetismo

E` dato un filo indefinito piegato a 90 gradi nel punto A e giacente nel piano *xy*, percorso da corrente *I*. Si consideri un punto P posto sulla perpendicolare al piano passante per A, a distanza *d* dal piano (vedi figura).



a) Determinare le componenti cartesiane del campo magnetico generato dal filo nel punto P.

b) Scrivere l'espressione del campo risultante in forma vettoriale.

c) Scrivere l'espressione del campo magnetico nel punto Q simmetrico a P rispetto al piano.

Suggerimento: determinare preliminarmente il campo magnetico prodotto da una meta` di un filo indefinito.

Soluzione

Sfruttando la simmetria di riflessione rispetto ad un punto, il campo generato da meta` di un filo indefinito e` pari a meta` del campo generato da tutto il filo: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}$

a) per la seconda regola della mano destra il tratto di filo lungo *x* produce un campo in P con sola componente lungo y, mentre il tratto lungo y produce un campo con sola componente lungo *x*:

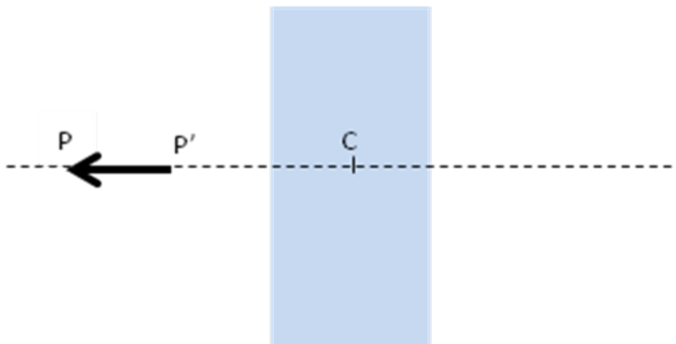
$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d} \qquad\qquad B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}$$

b) in forma vettoriale $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}\left(\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right)$

c) nel punto Q il campo ha stesso modulo e direzione, ma verso opposto $\vec{B}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}\left(\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right)$

Ottica geometrica

E` data una lastra di vetro di indice di rifrazione *n* e spessore *s*. Un oggetto puntiforme P e` posto a distanza o_1 dalla faccia di sinistra. Considerare la lastra come una coppia di diottri piani e applicando l'equazione del diottro $\frac{n_1}{o}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{R}$



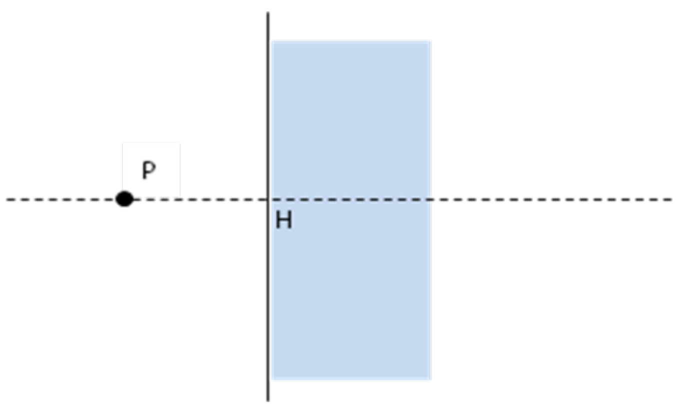
a) trovare la distanza dell'immagine Q di P, generata dalla lastra per rifrazione, dal centro C della lastra.

Supponiamo ora che l'oggetto non sia puntiforme, ma sia PP' (con P' posto a destra di P) giacente lungo una perpendicolare alla lastra e di lunghezza *O*;

b) trovare la lunghezza *I* dell'immagine QQ' di PP'.

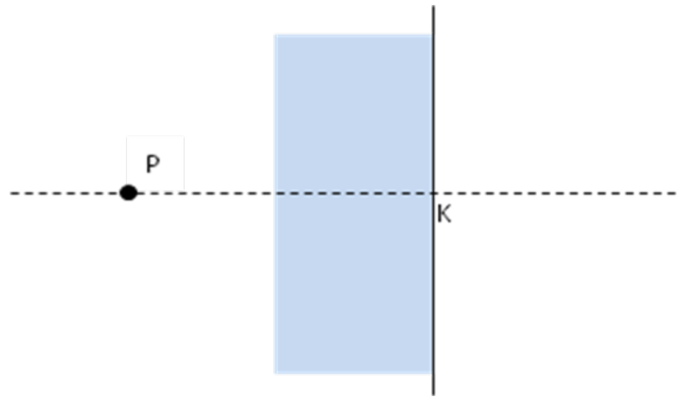
Soluzione

a) Applichiamo l'equazione del diottro alla superficie di sinistra, ponendo PH= o_1 : $\frac{1}{o_1}+\frac{n}{i_1}=0$



risolviamo per la distanza immagine i_1 del primo diottro, misurata a partire da H: $i_1=-no_1$

Applichiamo ora l'equazione del diottro alla seconda superficie, ponendo PK= o_2 : $\frac{n}{o_2}+\frac{1}{i_2}=0$



ove il valore di o_2 e` dato da $o_2 = s - i_1$

Risolviamo per la distanza immagine i_2 del secondo diottro, misurata a partire da K:

$$i_2 = -\frac{o_2}{n} = -\frac{s - i_1}{n} = -\frac{s + no_1}{n} = -o_1 - \frac{s}{n}$$

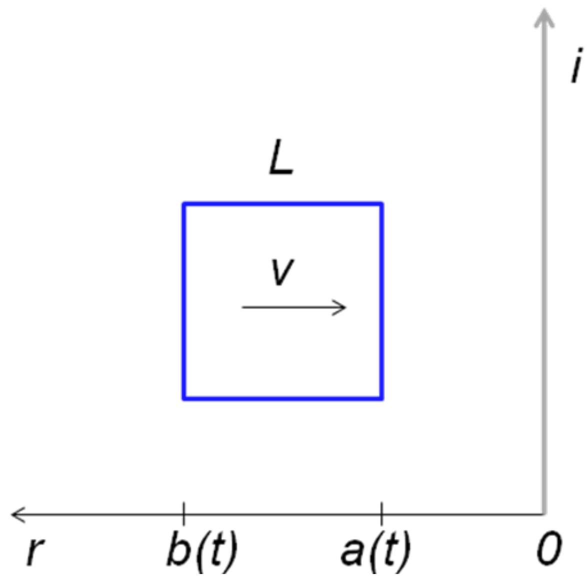
la distanza dell'immagine dal centro della lastra sara` dunque $d = |i_2| - \frac{s}{2} = o_1 + \frac{s}{n} - \frac{s}{2}$

b) La lunghezza dell'immagine si ottiene per differenza tra le posizioni delle immagini dei punti estremi

$$I = i(P) - i(P') = \left(-o(P) - \frac{s}{n}\right) - \left(-o(P') - \frac{s}{n}\right) = -\left(o(P) - o(P')\right) = -O$$

Elettrodinamica

È data una spira quadrata di lato *L* e resistenza *R*, ed un filo percorso da corrente *i* lungo *z* (vedi figura). Diciamo *a* e *b* le distanze del lato parallelo più vicino e più lontano dal filo. La spira si muova con velocità *v* nel piano *rz* verso il filo.



Trovare:

a) il flusso del campo *B* attraverso la spira;

b) la *fem* e la corrente *I* indotte nella spira, specificandone il verso;

c) la forza totale agente sulla spira.

Soluzione

a) Il campo magnetico è del tipo Biot-Savart, il flusso è quindi

$$\Phi(B) = \int_{spira} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} L dr = \frac{\mu_0}{2\pi} iL \log \frac{b(t)}{a(t)}$$

ove si è scelto di orientare la superficie della spira parallelamente al campo, cioè in verso antiorario.

b) la *fem* si trova derivando rispetto al tempo

$$fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} iL \frac{a(t)}{b(t)} \frac{a'(t)b(t) - a(t)b'(t)}{a^2(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi} iLv \frac{b(t)-a(t)}{a(t)b(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{iL^2 v}{a(t)b(t)}$$

ove si è posto $a'(t) = b'(t) = v$ e $b(t) - a(t) = L$

la corrente è data da $I = \frac{fem}{R}$, il verso di entrambe è orario.

c) Siccome le forze agenti sui lati paralleli all'asse *r* sono uguali e contrarie, basta considerare le forze agenti sui lati paralleli all'asse *z*. Queste sono

$$F_b = ILB(b(t)) \qquad\qquad F_a = ILB(a(t))$$

la forza totale agente sulla spira dovuta al campo magnetico è dunque

$$F_{tot} = F_a - F_b = IL[B(a(t)) - B(b(t))] = IL\frac{\mu_0}{2\pi}i\left[\frac{1}{a(t)} - \frac{1}{b(t)}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iIL^2}{a(t)[a(t)+L]}$$

Siccome F_a è maggiore di F_b la forza risultante è diretta nel verso *r* positivo.