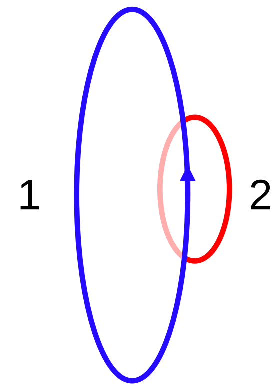
Soluzione del compito di Fisica 2

17 febbraio 2012 (Pordenone)

Elettrodinamica



Due bobine sono disposte una di fronte all'altra.

La loro induttanza mutua è M=2.0 x 10^{-2} H. L'intensità di corrente nella bobina 1 oscilla sinusoidalmente come $I_0 \sin(\omega t)$

con la frequenza di 60 Hz e l'ampiezza di 12 A.

a) Quanto vale il flusso magnetico che questa corrente induce nella bobina 2 all'istante *t*=0?
b) Quanto vale la *fem* indotta che questa corrente induce nella bobina 2 all'istante *t* =0?
c) Qual è il verso della corrente indotta nella bobina 2 all'istante *t* =0, se si assume come positivo il verso della corrente I_1?

Soluzione

a) il flusso è dato da

$$\Phi_{2|1} = MI_1 = MI_0 \sin(\omega t) = 2.0 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot \sin(2\pi \cdot 60 \cdot t)$$

al tempo *t=0* esso vale zero.

b) la *fem* è data da

$$E_{2|1} = -\frac{d\Phi_{2|1}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} = -MI_0\omega\cos(\omega t)$$

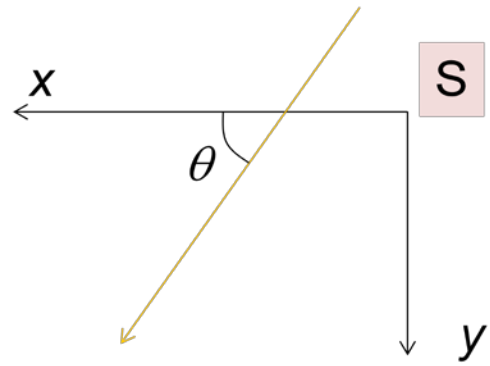
al tempo *t=0* essa vale

$$E_{2|1} = 2.0 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 2\pi \cdot 60 \cdot \cos(2\pi \cdot 60 \cdot t) = 90.5V$$

c) il verso non è determinabile, poiche' per *t=0* la corrente I_1 e` nulla.

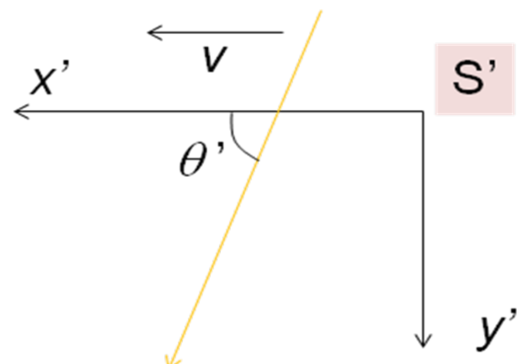
Relatività

Nel sistema inerziale S un raggio di luce proveniente da una stella forma un'angolo θ con l'asse x.



a) Trovare l'espressione della tangente dell'angolo θ in funzione delle componenti c_x e c_y della velocità. E viceversa, trovare le espressioni di c_x e c_y in funzione dell'angolo θ.

Il sistema inerziale S' si muove con velocità v rispetto a S lungo la direzione x.



b) Usando le equazioni di trasformazione relativistica della velocità, trovare le componenti della velocità c'_x e c'_y nel sistema S' in funzione di c_x e c_y.

c) Trovare l'espressione della tangente dell'angolo θ' in funzione di c'_x e c'_y e quindi di c_x e c_y e infine dell'angolo θ.

d) Quale sarebbe l'espressione di tgθ' se aveste usato le trasformazioni classiche della velocita`?

Soluzione

a) la tangente e` data da $tg\theta = \dfrac{c_y}{c_x}$ e le componenti della velocita` da

$$c_x = c\cos\theta \qquad c_y = c\sin\theta$$

b) le componenti della velocita` in S' sono

$$c'_x = \frac{c_x - v}{1 - \frac{c_x v}{c^2}} \qquad c'_y = \frac{c_y}{\gamma\left(1 - \frac{c_x v}{c^2}\right)}$$

c) la tangente dell'angolo in S' e`

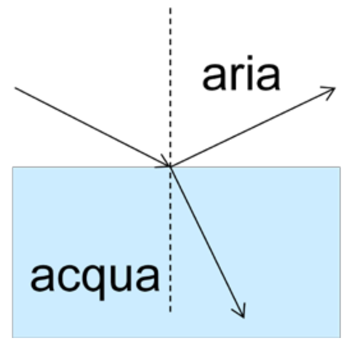
$$tg\theta' = \frac{c'_y}{c'_x} = \frac{c_y}{\gamma(c_x - v)} = \frac{c\sin\theta}{\gamma(c\cos\theta - v)} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - v/c)}$$

d) se avessimo usato le trasformazioni di Galileo, avremmo ottenuto

$$tg\theta' = \frac{c'_y}{c'_x} = \frac{c_y}{c_x - v} = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta - v} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - v/c}$$

Onde, polarizzazione

Un'onda non polarizzata incide con angolo *i* uguale all'angolo di Brewster sulla superficie di separazione aria-acqua (l'indice di rifrazione dell'acqua e` 1.33), vedi figura.



Ricordando la relazione tra angolo di Brewster e indice di rifrazione

$$tg\theta_B = n$$

e le formule dei coefficienti di riflessione per la componente parallela al piano di incidenza e per quella perpendicolare

$$R_{\parallel} = \left(\frac{tg(i-t)}{tg(i+t)}\right)^2 \qquad R_{\perp} = \left(\frac{\sin(i-t)}{\sin(i+t)}\right)^2$$

a) calcolare entrambi i coefficienti; calcolare anche i coefficienti di trasmissione;
b) calcolare il coefficiente di riflessione globale e quello di trasmissione globale dell'onda.

Soluzione

Troviamo l'angolo di Brewster $\theta_B = arctg(n) = arctg(1.33) = 53.05^\circ$ e l'angolo di trasmissione $t = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_B}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0.7993}{1.33}\right) = \arcsin(0.6010) = 36.94^\circ$

a) i coefficienti di riflessione sono

$$R_{\parallel} = 0 \qquad R_{\perp} = \left(\frac{\sin(53.05-36.94)}{\sin 90}\right)^2 = (\sin 16.11)^2 = 0.0770$$

e quelli di trasmissione

$$T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel} = 1 \qquad T_{\perp} = 1 - R_{\perp} = 1 - 0.0770 = 0.9230$$

b) il coefficiente di riflessione globale si trova considerando meta` della luce nello stato di polarizzazione parallelo al piano di incidenza e l'altra meta` nello stato perpendicolare, quindi l'intensita` riflessa globalmente e`

$$I_{rif} = \frac{I}{2} R_{\parallel} + \frac{I}{2} R_{\perp} = I \frac{R_{\parallel} + R_{\perp}}{2}$$

e il coefficiente di riflessione globale e`

$$R = \frac{I_{rif}}{I} = \frac{R_{\parallel} + R_{\perp}}{2} = \frac{0 + 0.0770}{2} = 0.0385$$

e quello di trasmissione globale e`

$$T = 1 - R = 1 - 0.0385 = 0.9615$$

Elettrostatica

Due condensatori, di capacità $C_1 = 15\,\mu\text{F}$ e $C_2 = 45\,\mu\text{F}$, sono caricati alle d.d.p. $V_1 = 300\text{ V}$ e $V_2 = 200\text{ V}$,rispettivamente.

Supponendo che i condensatori siano collegati fra loro in modo che l'armatura positiva di ogni condensatore sia connessa all'armatura negativa dell'altro, determinare:

a) la d.d.p. finale ai capi dei due condensatori;

b) di quanto varia l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nei condensatori.

Nel caso in cui le armature dei due condensatori siano connesse tra loro rispettando i segni, determinare di nuovo

c) la d.d.p. finale ai capi dei due condensatori;

d) di quanto varia l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nei condensatori.

Soluzione

Troviamo innanzitutto la carica presente su ciascun condensatore prima del collegamento elettrico.

$$Q_1 = C_1V_1 = 15\mu F \cdot 300V = 4.5mC$$

$$Q_2 = C_2V_2 = 45\mu F \cdot 200V = 9mC$$

troviamo anche l'energia elettrostatica accumulata:

$$U_{1i} = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}15\mu F \cdot 300^2V = 0.675J$$

$$U_{2i} = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}45\mu F \cdot 200^2V = 0.9J$$

$$U_i = U_{1i} + U_{2i} = 1.575J$$

Il collegamento dei due condensatori e` di tipo parallelo, e la capacita` equivalente e` data da

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 60\mu F$$

Usiamo la conservazione della carica elettrica.

Nel primo caso il condensatore equivalente avra` una carica pari alla differenza delle cariche presenti su ciascun condensatore prima del collegamento. Tale carica vale

$$Q = Q_2 - Q_1 = 9mC - 4.5mC = 4.5mC$$

a) La ddp ai capi dei condensatori e`

$$V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{4.5mC}{60\mu F} = 75V$$

e l’energia elettrostatica vale $U_f = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}60\mu F \cdot 75^2 V = 0.169J$

b) La variazione di energia e` dunque $\Delta U = U_f - U_i = 0.169J - 1.575J = -1.406J$

Nel secondo caso il condensatore equivalente avra` una carica pari alla somma delle cariche presenti su ciascun condensatore prima del collegamento. Tale carica vale

$$Q = Q_2 \_ Q_1 = 9mC + 4.5mC = 13.5mC$$

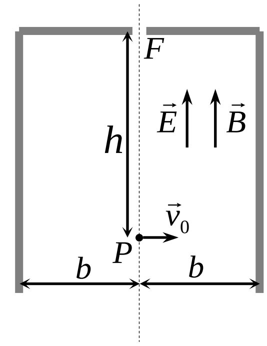
c) La ddp ai capi dei condensatori e`

$$V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{13.5mC}{60\mu F} = 225V$$

e l’energia elettrostatica vale $U_f = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}60\mu F \cdot 225^2 V = 1.519J$

d) La variazione di energia e` dunque $\Delta U = U_f - U_i = 1.519J - 1.575J = -0.056J$

Magnetostatica



E` data una scatola cilindrica di raggio $b = 10\,\mathrm{cm}$ in cui esistono un campo elettrostatico $E = 500\,\mathrm{V/m}$ e un campo magnetico *B*, uniformi e diretti lungo l'asse (*z*) della scatola (vedi figura). Da un punto *P*, posto sull'asse della scatola a distanza $h = 20cm$ dalla base superiore, un protone viene lanciato con una velocità $v_0 = 1.0 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$ parallela alla base stessa (vedi figura). Al centro della base è presente un foro *F*. La massa e la carica del protone sono: $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$, $e = 1.60 \cdot 10^{-19}\,C$.

Si calcolino (trascurando gli effetti della gravità) i valori di *B* per i quali il protone, nel suo moto,

a) non urta la superficie laterale;

b) attraversa il foro *F*.

Soluzione

La forza magnetica agisce solo sul piano *xy*, perpendicolare all'asse *z*, mentre la forza elettrica agisce solo lungo *z*. Grazie a cio`, possiamo scomporre il problema nel piano *xy* e lungo *z*.

Nel piano *xy* il protone percorre in senso orario un'orbita circolare passante per centro (il punto P) della sezione trasversale e tangente ad un suo diametro. Il raggio dell'orbita si ricava dall'equazione del moto

$$\vec{F}_L = m\vec{a}_c \qquad e\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}_c \qquad ev_\perp B = m\frac{v_\perp^2}{R}$$

ovvero $R = \dfrac{m}{e}\dfrac{v_\perp}{B} = \dfrac{m}{e}\dfrac{v_0}{B}$

a) Affinche' il protone non urti la superficie laterale, occorre che il diametro dell'orbita sia minore del raggio della scatola, cosa che impone una condizione al campo magnetico

$$2R < b \qquad B > B^* = 2\frac{m}{e}\frac{v_0}{b} = 0.2088T$$

Il periodo del moto e` $T = \dfrac{2\pi R}{v_0} = 2\pi\dfrac{m}{e}\dfrac{1}{B}$

Lungo *z* il protone effettua un moto uniformemente accelerato

$$\vec{F}_e = m\vec{a}_z \qquad e\vec{E} = m\vec{a}_z \qquad a_z = \frac{e}{m}E$$

per percorrere la distanza *h*, impiega un tempo $t = \sqrt{\frac{2h}{a_z}} = \sqrt{\frac{2h}{E}\frac{m}{e}}$

b) Affinche' il protone riesca a passare attraverso il foro, occorre che in questo tempo *t* esso compia un numero intero di rivoluzioni, cioe`

$$t = nT \qquad\qquad \sqrt{\frac{2h}{E}\frac{m}{e}} = n2\pi\frac{m}{e}\frac{1}{B}$$

questa e` una seconda condizione sul campo magnetico

$$B = n\pi\sqrt{2\frac{m}{e}\frac{E}{h}} = nB_0 = n\cdot 2.27\cdot 10^{-2}T$$

cioe` dev'essere un multiplo intero di un valore minimo B_0.

Dall'insieme delle due condizioni otteniamo

$$nB_0 > B^* \qquad\qquad n > \frac{0.2088T}{2.27\cdot 10^{-2}T} = 9.2$$

quindi i valori ammessi del campo magnetico sono $B = n\cdot 2.27\cdot 10^{-2}T$ con $n \geq 10$.