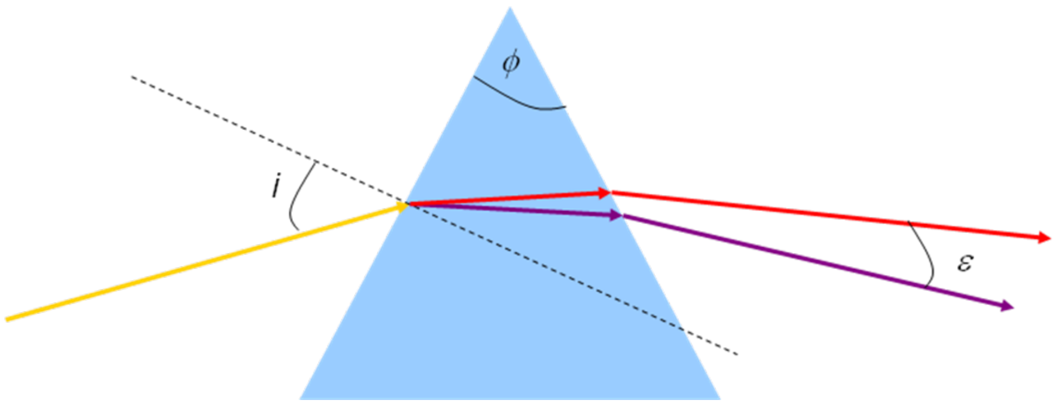
Soluzione del compito del 5 settembre 2012

Ottica geometrica

Un raggio di luce bianca incide su un prisma di vetro di angolo di apertura $\phi = 60°$ con un angolo di incidenza $i = 45°$. A causa della dispersione della luce, il raggio si separa in un pennello di raggi associati ciascuno ad una frequenza luminosa diversa.



Detto n_R =1.51 l'indice di rifrazione della radiazione rossa e n_V =1.53 quello radiazione violetta (corrispondenti ai limiti delle frequenze visibili), determinare numericamente:

a) gli angoli di rifrazione r_R , r_V nel punto d'entrata per la radiazione rossa e violetta;
b) gli angoli di incidenza i'_R , i'_V nel punto d'uscita per la radiazione rossa e violetta;
c) gli angoli di rifrazione r'_R , r'_V nel punto d'uscita per la radiazione rossa e violetta;
d) l'ampiezza del pennello di raggi uscenti, ovvero dell'angolo ε individuato dai raggi rosso e violetto.

Suggerimento: trovare preliminarmente la relazione tra r, i' e ϕ.

Soluzione

a) Nel punto d'entrata applichiamo la legge di Snell:

$$r_R = \arcsin\left(\frac{1}{n_R}\sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.51}\sin 45°\right) = 27.92°$$

$$r_V = \arcsin\left(\frac{1}{n_V}\sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.53}\sin 45°\right) = 27.53°$$

b) Dalla relazione $i' = \phi - r$ otteniamo:

$$i'_R = 60° - 27.92° = 32.08°$$

$$i'_V = 60° - 27.53° = 32.47°$$

c) Nel punto d'uscita applichiamo di nuovo la legge di Snell:

$$r'_R = \arcsin(n_R \sin i'_R) = \arcsin(1.51 \sin 32.08°) = 53.31°$$

$$r'_V = \arcsin(n_V \sin i'_V) = \arcsin(1.53 \sin 32.47°) = 55.23°$$

d) Infine l'angolo ε è dato dall'espressione:

$$\varepsilon = r'_V - r'_R = 55.23° - 53.31° = 1.92°$$

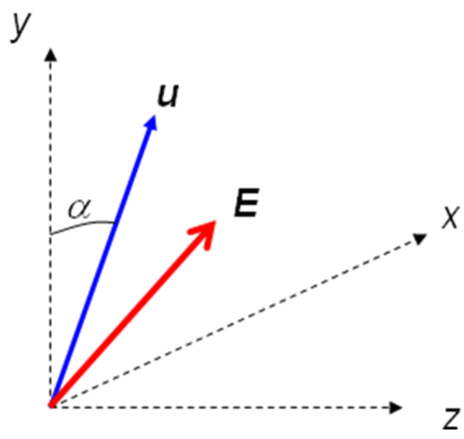
Ottica fisica

Carlo e Francesca vogliono studiare la luce emessa in direzione x da un laser di cui non sanno se la polarizzazione è lineare

$$\vec{E}_{i,L} = E_y \sin(kx - \omega t)\hat{j} + E_z \sin(kx - \omega t)\hat{k}$$

o circolare

$$\vec{E}_{i,C} = E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$$



Hanno a disposizione un polarizzatore ad assorbimento e uno schermo su cui rilevare l'intensità della luce. Supposto di porre il polarizzatore con l'asse (nel piano yz) inclinato di un angolo generico α rispetto all'asse y,

a) determinare il campo elettrico $\boldsymbol{E}_{f,L}$ dell'onda al di là del polarizzatore nel primo caso;
b) determinare il campo elettrico $\boldsymbol{E}_{f,C}$ dell'onda al di là del polarizzatore nel secondo caso.

Carlo e Francesca studiano le due formule cercando di capire cosa fare per scoprire qual è la polarizzazione della luce emessa dal laser. Ad un tratto Francesca dice: "Bisogna agire sul polarizzatore."

c) Qual è l'azione da fare sul polarizzatore per poter scegliere tra i due casi? Spiegare il motivo per cui l'idea funziona.

Soluzione

a) Al di là del polarizzatore sopravvive solo la componente parallela a $\boldsymbol{u}$, nel primo caso:

$$\vec{E}_{f,L} = (\vec{E}_{i,L} \cdot \hat{u})\hat{u} = \{[E_y \sin(kx - \omega t)\hat{j} + E_z \sin(kx - \omega t)\hat{k}] \cdot \hat{u}\}\hat{u} =$$
$$= \{E_y \sin(kx - \omega t)\hat{j} \cdot \hat{u} + E_z \sin(kx - \omega t)\hat{k} \cdot \hat{u}\}\hat{u}$$

Esprimendo $\boldsymbol{u}$ in termini dei versori x e y: $\hat{u} = \cos\alpha\hat{j} + \sin\alpha\hat{k}$, otteniamo

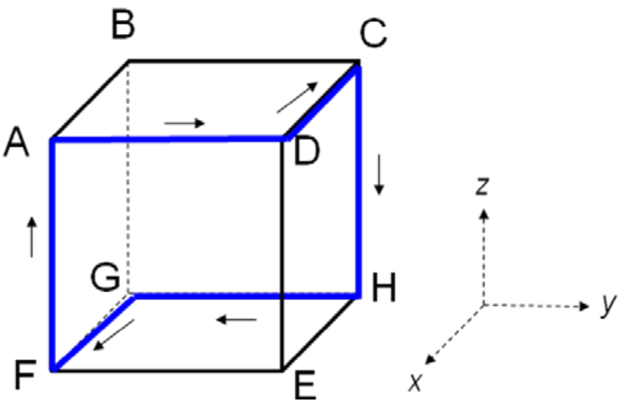
$$\vec{E}_{f,L} = \{E_y \sin(kx - \omega t)\cos\alpha + E_z \sin(kx - \omega t)\sin\alpha\}\hat{u} =$$
$$= \{E_y \cos\alpha + E_z \sin\alpha\}\sin(kx - \omega t)\hat{u} =$$
$$= E_u \sin(kx - \omega t)\hat{u}$$

b) Nel secondo caso

$$\vec{E}_{f,C} = (\vec{E}_{i,C} \cdot \hat{u})\hat{u} = \{[E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}] \cdot \hat{u}\}\hat{u} =$$
$$= \{E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{j} \cdot \hat{u} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k} \cdot \hat{u}\}\hat{u} =$$
$$= \{E_0 \sin(kx - \omega t)\cos\alpha + E_0 \cos(kx - \omega t)\sin\alpha\}\hat{u} =$$
$$= E_0 \sin(kx - \omega t + \alpha)\hat{u}$$

c) Bisogna ruotare il polarizzatore e osservare come cambia l'intensità della luce. Nel primo caso E_u varia dal valore massimo quando $\boldsymbol{u}$ è parallelo a $\boldsymbol{E}$, a zero, quando i due vettori sono perpendicolari. L'intensità presenterà quindi un massimo e un minimo in corrispondenza di tali posizioni. Nel secondo caso l'ampiezza del campo rimane sempre uguale a E_0, e quindi l'intensità non dipende dall'orientazione del polarizzatore.

Magnetismo



È data una spira non piana percorsa da corrente I (vedi curva blu in figura, la figura ABCDEFGH è un cubo di lato L) e immersa in un campo magnetico uniforme diretto lungo z: $\vec{B} = B_0\hat{k}$

Trovare:

a) la forza agente sui lati della spira;
b) il momento meccanico agente sulla spira;

Carlo e Francesca stanno considerando il problema e Carlo propone di complicarlo un po' assumendo che il campo dipenda da z secondo l'espressione

$$\vec{B} = (B_0 - \gamma z)\hat{k}$$

Francesca ci pensa un po' su ed esclama: "Non è possibile, questa espressione è in disaccordo con una delle leggi di Maxwell"

c) quale legge di Maxwell viola l'espressione del campo proposta da Carlo? Dimostrare tale violazione usando la formulazione integrale della legge.

Soluzione

a) La forza totale è uguale alla somma delle forze agenti sui singoli lati di filo:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{CH} + \vec{F}_{HG} + \vec{F}_{GF} + \vec{F}_{FA}$$

I contributi dei lati AF e CH sono nulli poiché la corrente scorre parallelamente al campo; i contributi dei lati AD e HG danno forze dirette lungo x; i contributi dei lati DC e GF danno forze dirette lungo y:

$$\vec{F}_{tot} = F_{AD}\hat{i} + F_{DC}\hat{j} - F_{HG}\hat{i}F_{GF}\hat{j}$$

Il modulo di tutte le forze è uguale: $F = ILB$, avremo quindi:

$$\vec{F}_{tot} = \left(\hat{i} + \hat{j} - \hat{i} - \hat{j}\right)ILB = 0$$

b) Il momento è uguale alla somma dei momenti agenti sui singoli lati di filo: i contributi dei lati AF e CH sono nulli poiché le forze corrispondenti sono nulle; scegliamo poi come polo il centro della base EFGH, di modo che il momento dei lati FG, GH risulti pure nullo; il contributo dei lati AD, DC è:

$$\vec{\tau}_{AD} = \vec{L} \times F_{AD}\hat{i} = IL^2B\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_{DC} = \vec{L} \times F_{DC}\hat{j} = -IL^2B\hat{i}$$

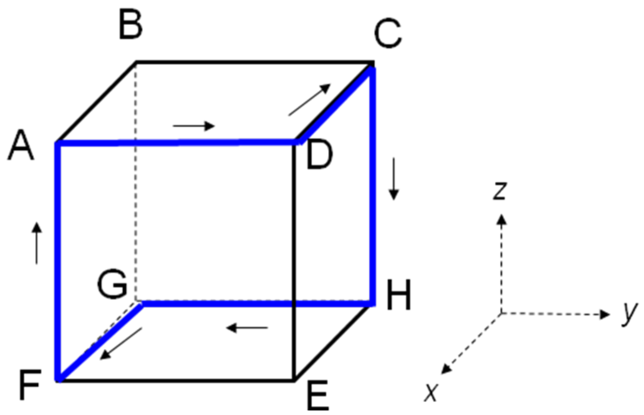
il momento risultante è $\vec{\tau} = IL^2B\left(\hat{j} - \hat{i}\right)$

c) La legge violata è quella dell'assenza di cariche magnetiche. Se calcoliamo il flusso del campo attraverso la superficie del cubo otteniamo infatti (le facce laterali danno contributo nullo):

$$\Phi = \Phi_{ABCD} + \Phi_{EFGH} = L^2B(L) - L^2B(0) = -L^2\gamma L = -\gamma L^3 \neq 0$$

cioè un risultato non nullo, contrariamente al dettato della legge.

Elettrodinamica



È data una spira non piana percorsa da corrente I (vedi curva blu in figura, la figura ABCDEFGH è un cubo di lato L) e immersa in un campo magnetico uniforme diretto lungo z e dipendente da t secondo l'espressione

$$\vec{B} = B_0 f(t)\hat{k}$$

Trovare:

a) il flusso del campo concatenato con la spira;
b) la *fem* indotta nella spira.

Carlo e Francesca stanno considerando il problema e Carlo propone di complicarlo un po' assumendo che il campo dipenda da z secondo l'espressione

$$\vec{B} = B(z) f(t)\hat{k} = (B_0 - \gamma z) f(t)\hat{k}$$

Francesca ci pensa un po' su ed esclama: "Non è possibile, questa espressione è in disaccordo con una delle leggi di Maxwell"

c) quale legge di Maxwell viola l'espressione del campo proposta da Carlo? Dimostrare tale violazione usando la formulazione integrale della legge.

Soluzione

a) Per calcolare il flusso scegliamo come superficie che poggia sul circuito la superficie unione delle facce ABCD, BCHG, GFAB:

$$\Phi = \Phi_{ABCD} + \Phi_{BCHG} + \Phi_{GFAB}$$

Gli ultimi due termini sono nulli poiché su queste facce il campo è parallelo alla superficie, il flusso vale quindi $\Phi = \Phi_{ABCD} = L^2 B_0 f(t)$.

b) La *fem* vale
$$fem = -\frac{d}{dt}\Phi = -L^2 B_0 \frac{d}{dt} f(t).$$

c) La legge violata è quella dell'assenza di cariche magnetiche. Se calcoliamo il flusso del campo attraverso la superficie del cubo otteniamo infatti (le facce laterali danno contributo nullo):

$$\Phi = \Phi_{ABCD} + \Phi_{EFGH} = L^2 B(L) f(t) - L^2 B(0) f(t) = -\gamma L^3 f(t) \neq 0$$

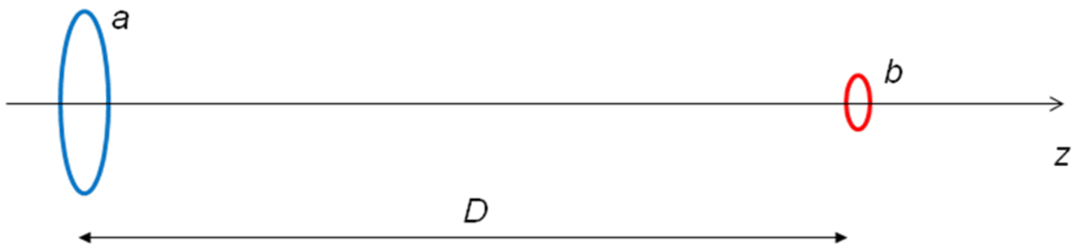
cioè un risultato non nullo, contrariamente al dettato della legge.

Elettrodinamica

È data una spira circolare di raggio a, corrente I_1 e momento magnetico m. A distanza sufficientemente grande il campo magnetico generato dalla spira è dato da

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\varphi \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \begin{pmatrix} \frac{3r}{z} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{z^3}$$

A grande distanza D dalla spira è posta una seconda spira circolare, che funge da rivelatore della prima, di resistenza R_2, raggio b, e asse coincidente con la prima (vedi figura).



Se $I_2(t) = I_{2,0} \sin \omega t$ è la corrente indotta nella seconda spira dalla prima, trovare

a) l'espressione della corrente nella prima spira.

Carlo e Francesca stanno contemplando la soluzione del problema, quando Carlo dice: "Conosciamo b e R_2, supponiamo anche di conoscere a e D, tuttavia, per conoscere *completamente* la corrente nella prima spira, non basta misurare la corrente nella seconda."

b) A cosa si riferisce Carlo e perché il rivelatore non permette di determinare completamente la corrente I_1?

Soluzione

a) La relazione tra le correnti delle due spire si trova mediante la legge di Faraday:

$$I_2 = \frac{fem_2}{R_2} = -\frac{1}{R_2}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}\iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 =$$

$$= -\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}\iint_{S_2} B_z r dr d\varphi = -\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt} 2\pi \int_0^b \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{2}{D^3} r dr =$$

$$= -\frac{1}{R_2}\frac{\mu_0}{2\pi D^3}\frac{d}{dt}\left(\pi a^2 I_1 \pi b^2\right) = -\frac{1}{R_2}\frac{\mu_0}{2D^3}\pi a^2 b^2 \frac{dI_1}{dt} = -K\frac{dI_1}{dt}$$

Nota I_2, I_1 si trova per integrazione:

$$I_1(t) = -\frac{1}{K}\int I_2(t)dt + const. = -\frac{1}{K}\int I_{2,0} \sin \omega t dt + const. =$$

$$= \frac{1}{\omega K} I_{2,0} \cos \omega t + const.$$

b) Carlo si riferisce al fatto che I_1 si determina mediante un processo di integrazione e quindi a meno di una costante arbitraria, che nel nostro caso è la eventuale componente continua della corrente I_1, che non contribuisce alla *fem* della seconda spira e quindi a I_2.