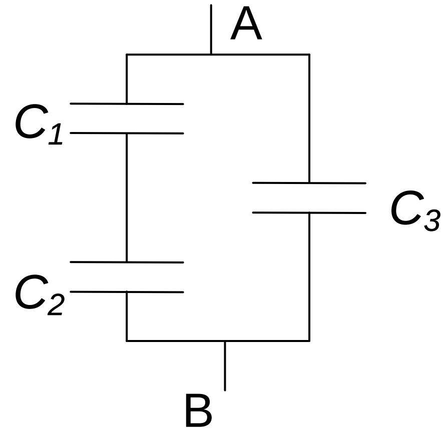
Elettrostatica



Tre condensatori C_1 = 2 μF, C_2 = 6 μF, C_3 = 3.5 μF, sono disposti come in figura.

a) Trovare la capacità equivalente del sistema;
b) se le ddp di scarica dei condensatori sono V_1 = 100 V, V_2 = 50 V, V_3 = 400 V, qual è la massima ddp che si può applicare tra A e B?

Soluzione

a) troviamo dapprima la capacità equivalente C_{12} del ramo di sinistra:

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{6\mu}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3\mu}\right)^{-1} = 1.5\mu F$$

quindi la capacità equivalente totale:

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = 1.5\mu F + 3.5\mu F = 5\mu F$$

b) detta V_{AB} la ddp applicata ai punti A, B, determiniamo la ddp ai capi di ciascun condensatore. Per C_3, V_3=V_{AB}. Per i condensatori del ramo sinistro, notiamo che la carica sui due è la stessa, quindi

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

e poiché V_1+ V_2=V_{AB} otteniamo

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}V_{AB} = \frac{6}{2+6}V_{AB} = \frac{3}{4}V_{AB}$$
$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V_{AB} = \frac{2}{2+6}V_{AB} = \frac{1}{4}V_{AB}$$

Imponiamo ora le condizioni di assenza di scarica:

$$\frac{3}{4}V_{AB} = V_1 < 100V$$
$$\frac{1}{4}V_{AB} = V_2 < 50V$$
$$V_{AB} = V_3 < 400V$$

da cui

$$V_{AB} < \frac{4}{3}100V = 133V$$
$$V_{AB} < 4 \cdot 50V = 200V$$
$$V_{AB} < 400V$$

La condizione più restrittiva è la prima, che quindi stabilisce la massima ddp applicabile.

Magnetismo

Si costruisce una bobina di *N* spire circolari uguali partendo da un filo di lunghezza fissata *l*. Se la corrente che circola nella bobina vale *I*,

a) trovare il valore del momento magnetico μ della spira;
b) trovare il valore di *N* che massimizza il momento magnetico;
c) perché nella ricerca del massimo valore del momento magnetico si possono considerare solo spire circolari?

Soluzione

a) se abbiamo *N* spire, ognuna ha una lunghezza $2\pi r = l / N$ ovvero un raggio $r = l / 2\pi N$ e un'area $a = \pi r^2 = \frac{l^2}{4\pi N^2}$. Il momento magnetico della bobina è $\mu = IaN = \frac{l^2 I}{4\pi N}$

b) il momento è massimo quando si ha una sola spira: $\mu_{\max} = \frac{l^2 I}{4\pi}$

c) perché il cerchio è la figura geometrica che massimizza l'area a parità di lunghezza della spira.

Relatività

Sia dato un pione (massa *M*) inizialmente fermo nel sistema di riferimento S. Esso poi decada (stato finale) in un muone (massa *m* e quantità di moto p_μ) e un neutrino (massa nulla e quantità di moto p_ν). Ricordando la relazione relativistica tra energia, *E*, quantità di moto, *p,* e massa, *m,*

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

a) scrivere la conservazione dell'energia negli stati iniziale e finale;
b) scrivere la conservazione della quantità di moto negli stati iniziale e finale.
Si ottengono cosí due equazioni nelle due incognite p_μ , p_ν .
c) Risolvere il sistema, determinando le espressioni di p_μ , p_ν .

Soluzione

a) l'energia delle tre particelle è

$$E_\pi = Mc^2, \quad E_\mu = \sqrt{p_\mu{}^2c^2 + m^2c^4}, \qquad E_\nu = p_\nu c$$

la conservazione dell'energia si scrive

$E_\pi = E_\mu + E_\nu$ ovvero $Mc^2 = \sqrt{p_\mu{}^2c^2 + m^2c^4} + p_\nu c$

b) la quantità di moto è

$$\vec{p}_\pi = 0, \qquad \vec{p}_\mu, \qquad \vec{p}_\nu$$

la conservazione della qdm si scrive $0 = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$

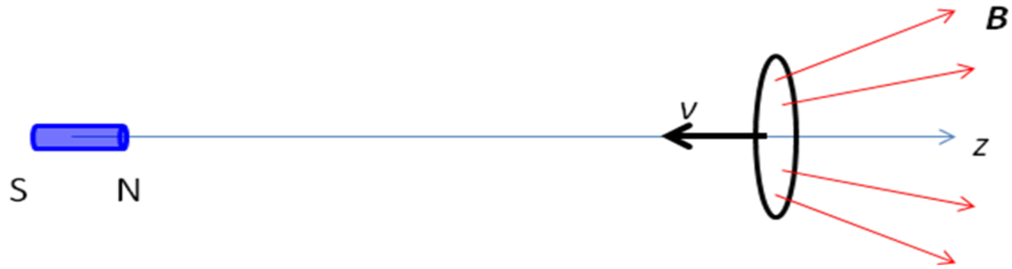
ovvero, passando alle proiezioni lungo la direzione del muone $p_\mu = p_\nu$

c) sostituendo (b) in (a): $\left(Mc^2 - p_\mu c\right)^2 = p_\mu{}^2c^2 + m^2c^4$ da cui, semplificando,

$$p_\mu = p_\nu = \frac{M^2 - m^2}{2M}c$$

Elettrodinamica

Una spira circolare di raggio *a* e resistenza *R* viene lanciata verso un dipolo magnetico di valore *m* con velocità iniziale v_0 (l'asse del dipolo e della spira coincidano, vedi figura).



Ricordando l'espressione del campo di dipolo in coordinate cilindriche

$$\vec{B}=\begin{pmatrix}B_r\\B_\varphi\\B_z\end{pmatrix}=\frac{K}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix}\dfrac{3rz}{z^2+r^2}\\0\\\dfrac{3z^2}{z^2+r^2}-1\end{pmatrix}$$

ove si è posto $K=\dfrac{\mu_0}{4\pi}m$ per semplicità, *z* è la distanza tra il centro della spira e del dipolo e *r* è la distanza dall'asse *z*. Si supponga *a*<<*z* di modo che, vicino alla spira, si possa trascurare r^2 nel denominatore di *B*.

a) Calcolare il flusso del campo ***B*** attraverso la spira (preliminarmente si determini quale componente del campo entra nel calcolo);
b) calcolare la corrente indotta nella spira;
c) calcolare la forza agente sulla spira (preliminarmente si determini quale componente del campo entra nel calcolo).

Soluzione

Innanzitutto scriviamo l'espressione del campo trascurando i termini in *r* di ordine maggiore di uno:

$$\vec{B}\approx\frac{K}{z^3}\begin{pmatrix}\dfrac{3r}{z}\\0\\2\end{pmatrix}$$

a) Come superficie su cui effettuare il flusso conviene scegliere il cerchio che poggia sulla spira, in tal caso la sola componente di ***B*** che entra nel calcolo è quella *z*:

$$\Phi(B) = \iint_{C(spira)} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \iint_{C(spira)} B_z da = 2\frac{K}{z^3} \iint_{C(spira)} da = 2\frac{K}{z^3}\pi a^2$$

b) la corrente indotta è data da

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(2\frac{K}{z^3}\pi a^2\right) = -\frac{1}{R}2K\pi a^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z^3}\right) =$$

$$= \frac{6K\pi a^2}{R}\frac{1}{z^4}\frac{d}{dt}(z) = \frac{6K\pi a^2}{Rz^4} v$$

ove $v = \frac{dz}{dt} < 0$ è la velocità istantanea della spira.

c) La forza agente sulla spira è

$$\vec{F} = \oint_{spira} i d\vec{l} \times \vec{B}$$

scomponendo il campo e la forza lungo gli assi, otteniamo

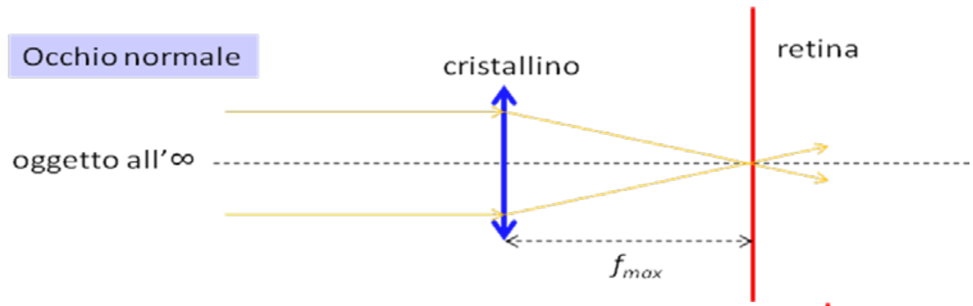
$$\hat{r}F_r + \hat{k}F_z = \oint_{spira} i d\vec{l} \times \vec{B}_z + \oint_{spira} i d\vec{l} \times \vec{B}_r$$

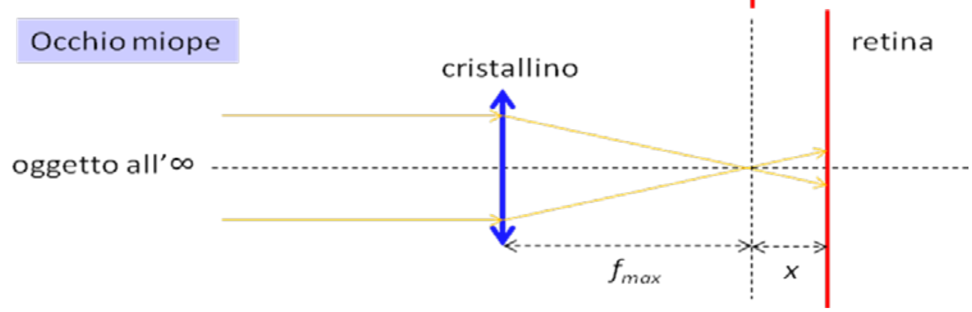
per simmetria il primo integrale si annulla e rimane

$$F = F_z = -\oint_{spira} i dl B_r = -i\frac{3Ka}{z^4}\oint_{spira} dl = -\frac{3Ka}{z^4} i 2\pi a = -\frac{6K\pi a^2}{z^4} i = -\left(\frac{6K\pi a^2}{z^4}\right)^2 \frac{v}{R} > 0$$

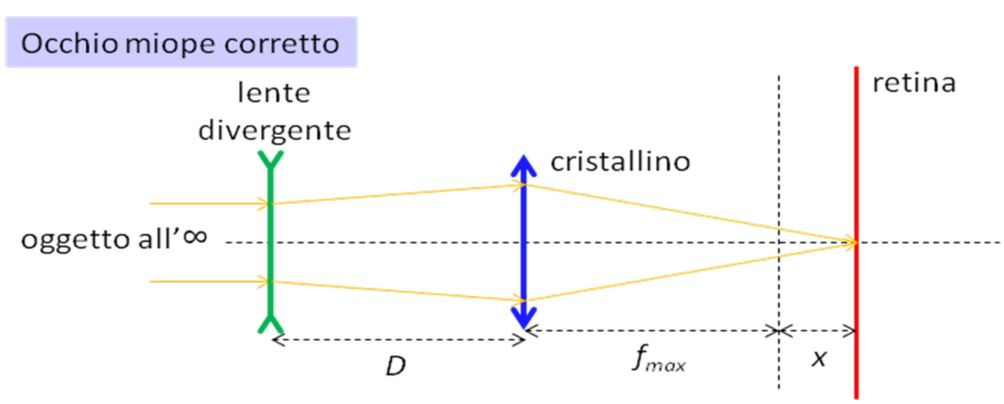
Ottica geometrica

La miopia è molto spesso dovuta ad un allungamento del bulbo oculare, di modo che il cristallino (che è una lente deformabile a focale regolabile) non riesce ad aumentare a sufficienza la propria lunghezza focale per formare l'immagine sulla retina di oggetti molto lontani. Consideriamo un modello semplificato dell'occhio, in cui trascuriamo il fatto che è riempito da sostanze diverse dall'aria. Nelle figure seguenti è riportata la situazione di un occhio normale e di uno miope. f_{max} è la massima lunghezza focale raggiungibile dal cristallino; per un occhio normale è uguale alla distanza L_{norm} tra retina e cristallino. Per un occhio miope questa distanza è $L_{norm} + x > L_{norm}$, di conseguenza l'immagine sulla retina non è più stigmatica.





Per correggere questa situazione si antepone all'occhio una lente divergente, di focale f', a distanza D dal cristallino, come raffigurato di seguito:



Tutto ciò premesso, determinare:

a) l'espressione della distanza focale f' della lente correttiva in funzione dell'allungamento x del bulbo oculare e dei parametri in gioco (D e $f_{max} = L_{norm}$);

b) calcolare la potenza *P* della lente correttiva, espressa in diottrie, per la seguente scelta di valori:
$L_{norm} = 23\ mm$ $\quad$ $x = 0.5\ mm$ $\quad$ $D = 25\ mm$.

NOTA BENE: ai fini della soluzione dell'esercizio il cristallino può essere considerato come una lente a focale fissa di valore f_{max}.

Soluzione

a) applichiamo la legge delle lenti sottili alla lente correttiva per trovare ove cade l'immagine che essa forma:

$$\frac{1}{o_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{f'}$$

poiché l'oggetto è all'infinito, ne segue che $i_1 = f' < 0$ quindi a sinistra della lente.

Questa immagine funge da oggetto per il cristallino, che dista da essa $o_2 = D - f' > 0$.

Riapplicando la legge delle lenti, otteniamo:

$$\frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_{max}}$$

ove il valore dell'immagine dev'essere uguale (per ipotesi) alla distanza della retina: $i_2 = f_{max} + x$

Ne segue

$$\frac{1}{D - f'} + \frac{1}{f_{max} + x} = \frac{1}{f_{max}}$$

da cui, risolvendo per *f'* troviamo:

$$f' = D - \frac{f_{max}\left(f_{max} + x\right)}{x}$$

b) per i valori dati, otteniamo:

$$f' = 25 - \frac{23(23 + 0.5)}{0.5} = 25 - 1081 = -1056mm$$

Ovviamente negativa. La potenza è l'inverso della distanza focale espressa in metri, quindi

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-1.056} = -0.95D$$

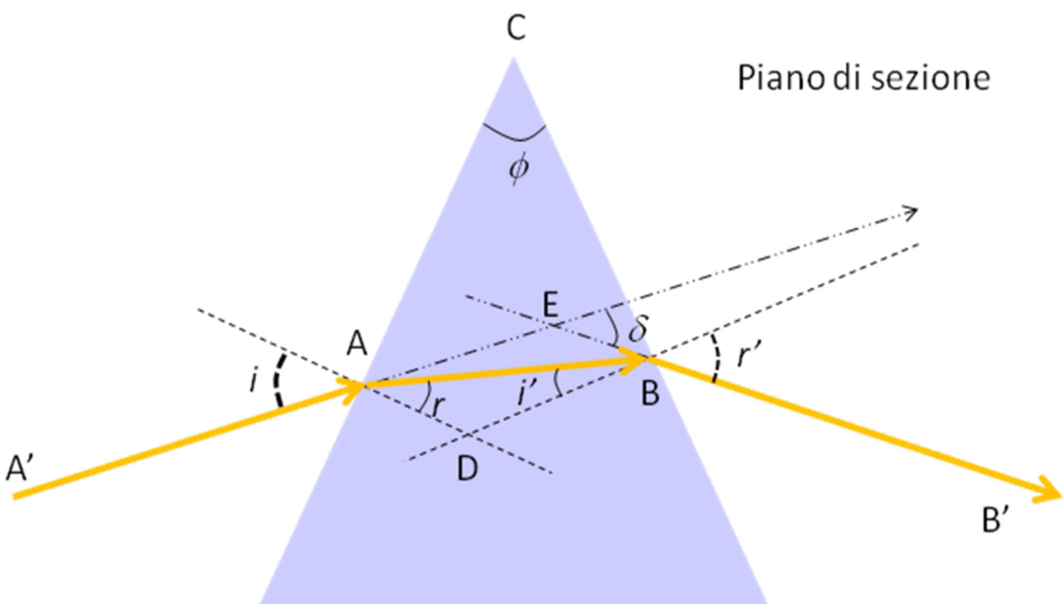
Ottica geometrica

La misura dell'indice di rifrazione di un mezzo trasparente si basa sulla legge di Snell. La difficoltà sperimentale consiste nella misura degli angoli *i* e *r*. Un metodo per superate tale difficoltà è quello di inviare un raggio di luce su una porzione di materiale tagliato a prisma triangolare e determinare due quantità facilmente misurabili: l'angolo di deviazione del raggio e l'angolo al vertice del prisma.
Sia dunque dato un prisma di vetro di indice di rifrazione *n,* a sezione triangolare e con angolo al vertice ϕ (vedi figura). Un raggio di luce A'A giacente sul piano di sezione incontra il prisma nel punto A dove subisce rifrazione. Il raggio prosegue lungo AB, subisce una seconda rifrazione in B e fuoriesce dal prisma, proseguendo lungo BB'. Diciamo rispettivamente *i, r* gli angoli di incidenza e rifrazione in A e *i', r'* gli angoli di incidenza e rifrazione in B. Le rette AD e BD sono perpendicolari rispettivamente in A e B ai due lati del prisma. L'angolo δ in E compreso tra le rette A'A e BB' è detto **angolo di deviazione** del raggio.
NOTA: trascurare i raggi riflessi.

a) Considerando il triangolo ABC, trovare la relazione tra l'angolo ϕ e gli angoli *r, i'*;
b) considerando il triangolo AEB trovare la relazione tra l'angolo δ e gli angoli *i, r, i', r'*.

E` sempre possibile porsi in una situazione simmetrica, in cui *r'=i , i'=r* .

c) Riscrivere in questo caso le due relazioni relative ai punti (a) e (b) e determinare l'indice di rifrazione mediante la legge di Snell in funzione delle quantità misurabili ϕ e δ.
   Suggerimento: esprimere *r* in funzione di ϕ e *i* in funzione di ϕ e δ.



Soluzione

a) Notiamo che l'angolo CAB vale $\frac{\pi}{2}-r$ e l'angolo CBA $\frac{\pi}{2}-i'$. La somma degli angoli del triangolo ABC è dunque $\pi=\left(\frac{\pi}{2}-r\right)+\left(\frac{\pi}{2}-i'\right)+\phi$, da cui segue $\phi=r+i'$.

b) L'ampiezza dell'angolo esterno in E al triangolo AEB è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti EAB e EBA. Il primo è uguale a $i-r$, il secondo a $r'-i'$, quindi

$$\delta = i - r + r' - i'$$

c) In tal caso $\phi = 2r$, $\delta = 2(i - r)$, da cui $r = \frac{\phi}{2}$, $i = \frac{\delta + \phi}{2}$ e applicando la legge di Snell:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\delta + \phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$