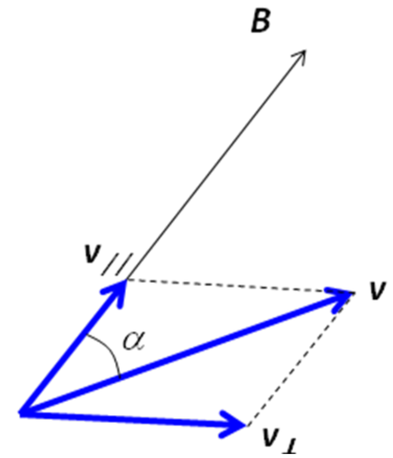
Relatività
Un elettrone (*m= 9.11x10*$^{-31}$ *kg, |q|=1.6x10*$^{-19}$ *C*), immerso in un campo magnetico *B = 1 T* , abbia **energia cinetica** *K* pari all'energia a riposo.



a) Supponendo che l'elettrone si comporti in modo classico, e quindi, usando le equazioni classiche, determinarne la velocità *v*, il raggio *R* e il passo *p* della traiettoria elicoidale seguita dall'elettrone, supposto che l'angolo formato dalla velocità e dal campo sia α.
b) Ripetere il calcolo di *v, R, p* applicando le equazioni relativistiche. Suggerimento: l'unica differenza nell'espressione della forza centripeta è che bisogna usare $m\gamma$ al posto di *m*.

Soluzione

a) La relazione classica tra energia cinetica e velocità è $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, da cui, sostituendo il valore di *K*:
$v = \sqrt{\frac{2mc^2}{m}} = \sqrt{2}c = 4.24 \cdot 10^8 m/s$, che risulta maggiore di *c*.

Il raggio si trova imponendo che la forza centripeta sia la forza di Lorentz: $m\frac{v_\perp^2}{R} = |q|v_\perp B$, ove si è considerata la sola componente della velocità perpendicolare al campo *B*. Da qui segue:

$$R = \frac{mv_\perp}{|q|B} = \frac{mv}{|q|B}\sin\alpha = \frac{9.11\cdot 10^{-31}\cdot 4.24\cdot 10^8}{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 1}\sin\alpha = 2.41\cdot 10^{-3}\sin\alpha . m$$

Il periodo di rivoluzione dell'elettrone è

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi\cdot 9.11\cdot 10^{-31}}{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 1} = 3.58\cdot 10^{-11} . s .$$

Il passo, infine, è dato da

$$p = v_{\parallel}T = v\cos\alpha T = 4.24\cdot 10^8\cdot 3.58\cdot 10^{-11}\cos\alpha = 1.52\cdot 10^{-2}\cos\alpha . m$$

b) Usando le eqq. relativistiche, troviamo dapprima il valore di γ: $K = mc^2(\gamma - 1)$,da cui $\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = \frac{mc^2}{mc^2} + 1 = 2$, e quindi quello della velocità: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2.60 \cdot 10^8 \, m/s$.

Ora il raggio vale

$$R = \frac{m\gamma v_\perp}{|q|B} = \frac{m\gamma v}{|q|B} \sin\alpha = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 2.60 \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \sin\alpha = 2.96 \cdot 10^{-3} \sin\alpha . m .$$

Il periodo diviene

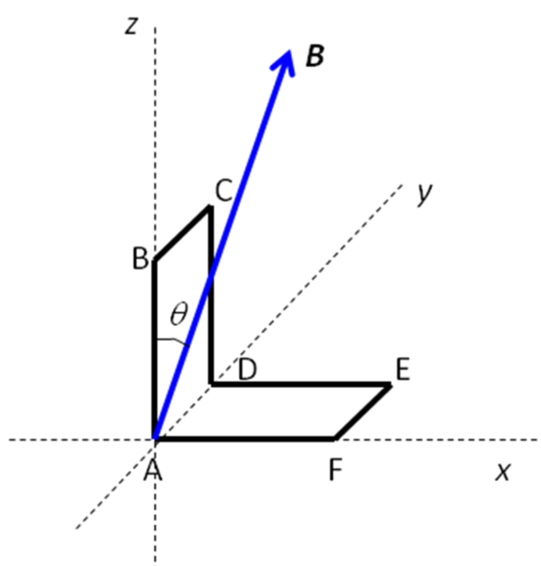
$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m\gamma}{|q|B} = \frac{2\pi \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 2}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 7.16 \cdot 10^{-11} . s ,$$

e il passo

$$p = v_{\parallel} T = v \cos\alpha T = 2.60 \cdot 10^8 \cdot 7.16 \cdot 10^{-11} \cos\alpha = 1.86 \cdot 10^{-2} \cos\alpha . m$$

Elettrodinamica

Due studenti vogliono calcolare il flusso di un campo magnetico uniforme ***B*** concatenato con una spira non piana (vedi figura)



in cui i vertici A, B, C, D, E, F coincidono con sei degli otto vertici di un cubo da lato *L*. La spira può ruotare attorno all'asse *y*, cosicché sia il lato AB che AF giacciono sempre nel piano *xz*. Nel sistema di riferimento scelto, il campo *B* non ha componenti lungo *y*. Il primo studente sceglie come superficie di integrazione l'unione dei due quadrati ABCD e DEFA. Il secondo studente sceglie invece l'unione del rettangolo BCEF e dei due triangoli ABF e DCE. Sia θ l'angolo tra la direzione AB e il campo magnetico in un istante arbitrario di tempo.

a) Calcolare il flusso sulla superficie scelta dal primo studente.
b) Calcolare il flusso sulla superficie scelta dal secondo studente.
c) trovare la *fem* indotta nella spira se essa ruota di moto circolare uniforme con velocità angolare di rotazione ω.

Soluzione

a) La prima scelta dà:

$$\Phi(B)=\Phi_{ABCD}(B)+\Phi_{DEFA}(B)=BA_{ABCD}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+BA_{DEFA}\cos\theta=BA(\sin\theta+\cos\theta)$$

Ove si è indicata con *A* l'area comune delle due superfici.

b) La seconda scelta dà:

$$\Phi'(B)=\Phi_{BCEF}(B)+\Phi_{ABF}(B)+\Phi_{DCE}(B)=BA_{BCEF}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+0+0=$$

$$=BA'\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta+\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)=BA'\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$$

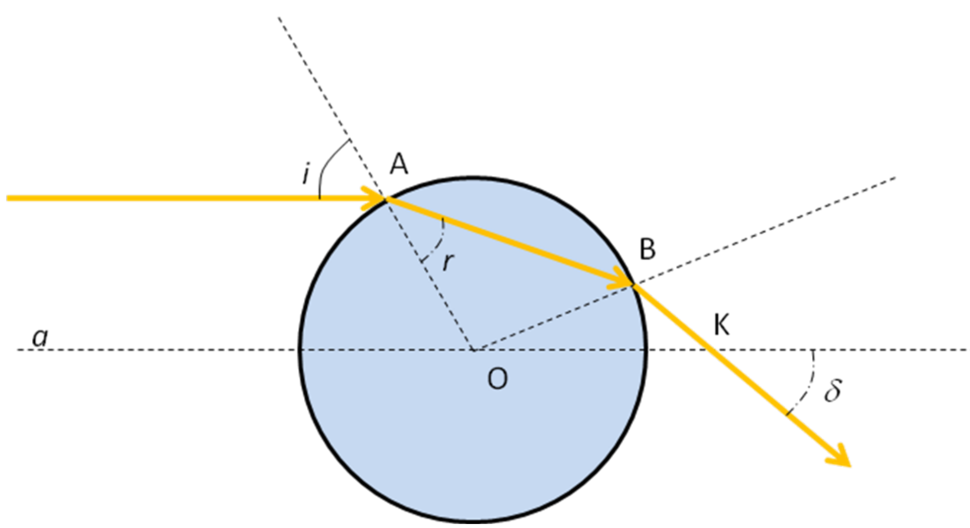
ove con *A'* si è indicata l'area del rettangolo BCEF e si è tenuto conto che il flusso sui due triangoli è nullo. La relazione tra le aree *A* e *A'* è $A'=\sqrt{2}A$, ne segue, come dev'essere, che i due calcoli danno lo stesso risultato.

c) La *fem* si trova derivando il flusso rispetto al tempo:

$$fem=-\frac{d}{dt}\left[BA(\sin\omega t+\cos\omega t)\right]=BA\omega(-\cos\omega t+\sin\omega t)$$

Ottica geometrica

Sia data una goccia d'acqua sferica di indice di rifrazione *n* = 1.33 e AOB sia una sezione passante per il centro O della goccia. Sia *a* una retta passante per il centro O e un raggio di luce parallelo ad *a* incida sulla goccia nel punto A. Il raggio subisce rifrazione (trascurare il raggio riflesso) e si propaga nella goccia fino a B, ove subisce una seconda rifrazione e esce dalla goccia (trascurare anche qui il raggio riflesso).

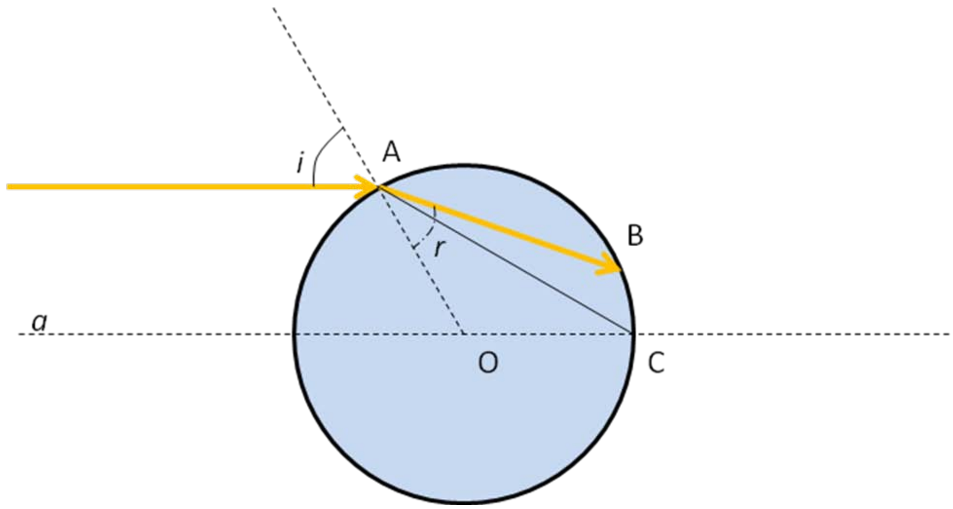


Si può dimostrare che per l'acqua, il punto B sta dalla stessa parte di A rispetto alla retta *a*. Sia K l'intersezione tra il raggio uscente e la retta *a*. Trovare

a) l'espressione dell'angolo di deviazione δ del raggio luminoso in funzione dell'angolo di incidenza *i*.

b) trovare per quale valore di *i* l'angolo δ è massimo e determinare tale massimo.

Con riferimento al triangolo AOC



c) dimostrare quanto affermato, cioè che per l'acqua, B sta dalla stessa parte di A rispetto alla retta *a*. Suggerimento: dimostrare che l'angolo OAC è sempre minore di *r*.

Soluzione

a) Diciamo α l'angolo acuto compreso tra la retta *a* e la retta OB e notiamo che l'angolo compreso tra la retta *a* e la retta OA è uguale a *i*. Consideriamo il triangolo AOB: la somma dei suoi angoli è $2r+(\pi-i-\alpha)=\pi$, da cui possiamo esprimere α in funzione di *i*: $\alpha=2r-i$. Considerando il triangolo OBX, vale la relazione $i=\alpha+\delta$. Da queste due eqq. possiamo esprimere δ in funzione degli angoli *i* e *r* : $\delta=2(i-r)$. Mediante la legge di Snell possiamo esprimere *r* in funzione di *i* e quindi δ in funzione di *i*: $r=\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right)$, $\delta=2\left[i-\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right)\right]$.

b) Per trovare il massimo studiamo il segno della derivata rispetto a *i*:

$$\frac{d\delta}{di}=2\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\sin i\right)^2}}\frac{1}{n}\cos i\right]=2\left[1-\sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}\right]\geq 0$$

La diseguaglianza forte è sempre soddisfatta, e quindi non c'è massimo relativo, inoltre la funzione è crescente. Il massimo assoluto si trova quindi all'estemità destra *i=π/2* dell'intervallo,ove δ vale

$$\delta=2\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right)=1.44\,rad\approx 82.49°$$

c) Detto γ l'angolo OAC, considerando il triangolo OAC, vale la seguente relazione: $i=2\gamma$. Dobbiamo dimostrare che *r>γ*, ovvero $\sin r>\sin\gamma$ o, usando la legge di Snell a primo membro e la relazione tra *i* e γ a secondo: $\frac{1}{n}\sin i>\sin\frac{i}{2}$. Esprimendo il primo membro in funzione di *i/2*: $\frac{1}{n}2\sin\frac{i}{2}\cos\frac{i}{2}>\sin\frac{i}{2}$ e semplificando, otteniamo $\cos\frac{i}{2}>\frac{n}{2}$. Questa disuguaglianza è sempre verificata in quanto il coseno è una funzione decrescente in (0, π/2) e quindi maggiore del valore che assume all'estremo destro: $\cos\frac{i}{2}>\cos\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ che è a sua volta maggiore di $\frac{n}{2}=\frac{1.33}{2}$.