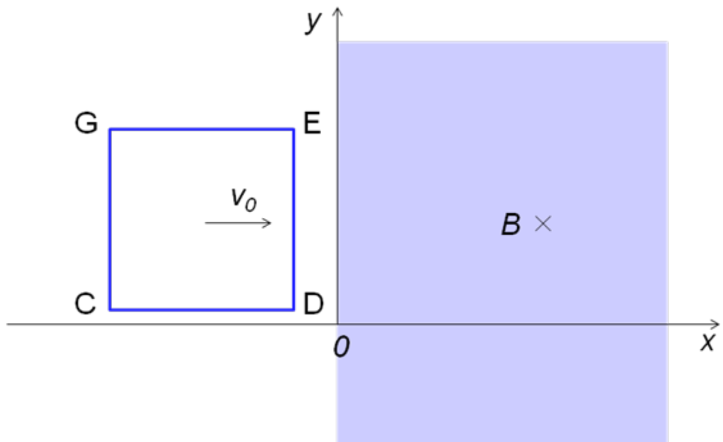
Soluzione del compito di Fisica 2

2 febbraio 2012 (Udine)

Elettrodinamica

E` data una spira conduttrice quadrata di lato $L$ e resistenza $R$, vincolata sul piano $xy$, in moto lungo $x$ con velocita` iniziale v_0. Nel punto $x=0$ la spira entra in un campo magnetico B uniforme, di verso entrante nel foglio (il campo per $x<0$ venga supposto nullo per semplicita`).



Trovare

a) la fem indotta nella spira nei tre casi seguenti: la spira non ha ancora raggiunto l'asse y, la spira e` a cavallo dell'asse $y$ (cioe` per $x_D > 0$ e $x_C < 0$) e la spira ha sorpassato l'asse y; esplicitare il verso della fem;

b) trovare la forza (modulo, direzione e verso) agente sulla spira dovuta all'interazione tra la corrente indotta e il campo magnetico nei tre casi citati al punto (a);

c) dire se la forza varia nell'intervallo di tempo occorrente alla spira per attraversare l'asse y. Giustificare la risposta.

Soluzione

a) La fem indotta e` diversa da zero solo quando la spira e` a cavallo dell'asse y. Prima e dopo infatti il flusso del campo non varia (prima perche' B e` nullo, dopo perche' $B$ e` uniforme). Quando la spira e` a cavallo abbiamo $\Phi = -BLx$ ove con $x$ indichiamo la parte del lato CD che ha oltrepassato l'asse $y$. La *fem* e` dunque

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLv$$

Il verso della *fem* e` tale da far circolare corrente in verso antiorario.

b) la corrente indotta nella spira e` $i = fem / R$ e la forza e` dovuta al solo lato DE. Infatti le porzioni dei lati CD e GE immerse nel campo magnetico danno forze uguali e contrarie e il lato CG non e` soggetto a forza, in quanto esterno al campo. La forza totale e` dunque diversa da zero solo quando la spira e` a cavallo dell'asse *y* e vale, in modulo

$$F = iLB = \frac{fem}{R} LB = \frac{(LB)^2}{R} v$$

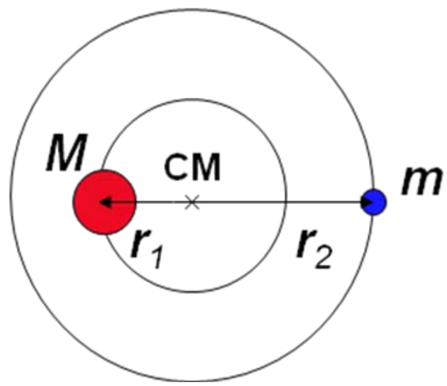
con la regola della mano destra si trova poi che essa e` diretta in verso *x* negativo.

c) La forza varia perche' essendo una forza deceleratrice, essa fa diminuire la velocita` della spira e questo, a sua volta, porta ad una diminuzione della forza.

Magnetismo

Il momento magnetico è dovuto alla presenza di corrente. Per una particella neutra ci si potrebbe aspettare che il momento magnetico sia nullo, dato che la carica della particella è nulla. In realtà questo non è necessariamente vero.

a) Si calcoli il momento magnetico di un sistema (vedi figura) composto da due particelle di massa *M* e *m* e cariche uguali e contrarie *q* e -*q*. Si supponga che le due particelle ruotino attorno al centro di massa comune sotto l'azione della forza colombiana, secondo le leggi della meccanica classica e per semplicità la distanza tra di esse $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ sia costante (cioe` le orbite siano circolari). Considerare il moto delle cariche come equivalente a due correnti.



Dopo aver espresso le distanze $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ dal centro di massa in funzione della distanza $\boldsymbol{r}$ e delle masse delle due particelle, dire

b) qual e` la condizione per ottenere un momento magnetico diverso da zero.

Soluzione

a) Il momento magnetico totale e` dato dal contributo delle due cariche: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_1$

La rivoluzione di ciascuna carica e` assimilabile ad una corrente e poiche' le correnti giacciono sullo stesso piano, i due momenti sono vettori paralleli; possiamo quindi passare dai vettori alle componenti lungo la direzione normale al piano. Indicata con *i* la corrente e con *A* l'area racchiusa dall'orbita, i

momenti sono: $\mu_1 = i_1 A_1 = \dfrac{q}{T}\pi r_1^2$ $\qquad \mu_2 = i_2 A_2 = \dfrac{-q}{T}\pi r_2^2$ quindi,

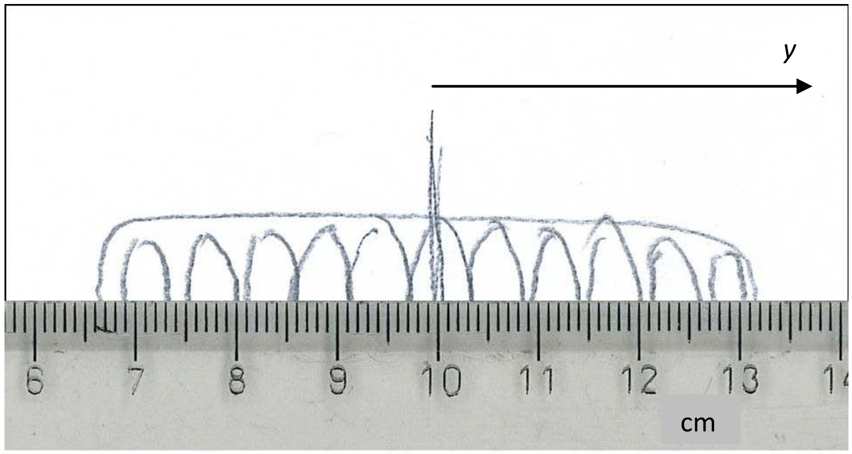
introducendo la velocita` angolare

$$\mu = \frac{q}{T}\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \frac{q}{2}\omega r^2\left(\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 - \left(\frac{M}{M+m}\right)^2\right) = -\frac{q}{2}\omega r^2\,\frac{M-m}{M+m}$$

b) basta che le masse siano diverse.

Ottica fisica

Due fenditure distanti *D*=0.6 mm, illuminate da un fascio di luce coerente, producono l'interferenza disegnata in figura su uno schermo distante *d*=534 cm da esse.



Ricordando l'espressione dell'intensita` della figura di Interferenza

$$I = I_0 \cos^2\left(\pi \frac{D}{\lambda} \sin\alpha\right)$$

a) misurare sulla figura la distanza *y* del quarto massimo laterale dal massimo centrale;
b) esprimere α in funzione di *y*;
c) determinare la lunghezza d'onda λ della luce usata.

Soluzione

L'intensita` ha un massimo quando la fase e` un multiplo intero di π.

$$\pi \frac{D}{\lambda} \sin\alpha = m\pi .... m \in Z$$

Gli angoli corrispondenti ai massimi sono $\sin\alpha_m = m\frac{\lambda}{D}$; noi vogliamo il quarto massimo, quindi

$$\sin\alpha_4 = 4\frac{\lambda}{D}$$

a) per trovare la distanza del quarto massimo possiamo dividere a meta` la distanza tra il quarto massimo a sinistra e quello a destra del massimo centrale. Dalla figura risulta

$$y_4 = \frac{4.6cm}{2} = 2.3cm$$

b) vista la grande distanza tra le fenditure e lo schermo, possiamo approssimare il seno con la tangente o con l'arco

$$tg\alpha_4 = \frac{y_4}{d} \approx \alpha_4 \approx \sin\alpha_4 = 4\frac{\lambda}{D}$$

c) e ricavare infine la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{y_4 D}{4d} = \frac{2.3 \cdot 0.6}{4 \cdot 534} = 646nm$$

Elettrostatica

Due condensatori, di capacità $C_1 = 15\ \mu\text{F}$ e $C_2 = 45\ \mu\text{F}$, sono caricati alle d.d.p. $V_1 = 300\ \text{V}$ e $V_2 = 200\ \text{V}$,rispettivamente.

Supponendo che i condensatori siano collegati fra loro in modo che l'armatura positiva di ogni condensatore sia connessa all'armatura negativa dell'altro, determinare:

a) la d.d.p. finale ai capi dei due condensatori;

b) di quanto varia l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nei condensatori.

Nel caso in cui le armature dei due condensatori siano connesse tra loro rispettando i segni, determinare di nuovo

c) la d.d.p. finale ai capi dei due condensatori;

d) di quanto varia l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nei condensatori.

Soluzione

Troviamo innanzitutto la carica presente su ciascun condensatore prima del collegamento elettrico.

$$Q_1 = C_1V_1 = 15\mu F \cdot 300V = 4.5mC$$

$$Q_2 = C_2V_2 = 45\mu F \cdot 200V = 9mC$$

troviamo anche l'energia elettrostatica accumulata:

$$U_{1i} = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}15\mu F \cdot 300^2V = 0.675J$$

$$U_{2i} = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}45\mu F \cdot 200^2V = 0.9J$$

$$U_i = U_{1i} + U_{2i} = 1.575J$$

Il collegamento dei due condensatori e` di tipo parallelo, e la capacita` equivalente e` data da

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 60\mu F$$

Usiamo la conservazione della carica elettrica.

Nel primo caso il condensatore equivalente avra` una carica pari alla differenza delle cariche presenti su ciascun condensatore prima del collegamento. Tale carica vale

$$Q = Q_2 - Q_1 = 9mC - 4.5mC = 4.5mC$$

a) La ddp ai capi dei condensatori e`

$$V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{4.5mC}{60\mu F} = 75V$$

e l'energia elettrostatica vale $U_f = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}60\mu F \cdot 75^2 V = 0.169J$

b) La variazione di energia e` dunque $\Delta U = U_f - U_i = 0.169J - 1.575J = -1.406J$

Nel secondo caso il condensatore equivalente avra` una carica pari alla somma delle cariche presenti su ciascun condensatore prima del collegamento. Tale carica vale

$$Q = Q_2 \_ Q_1 = 9mC + 4.5mC = 13.5mC$$

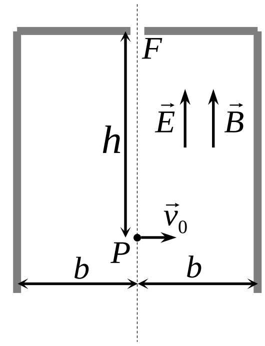
c) La ddp ai capi dei condensatori e`

$$V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{13.5mC}{60\mu F} = 225V$$

e l'energia elettrostatica vale $U_f = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}60\mu F \cdot 225^2 V = 1.519J$

d) La variazione di energia e` dunque $\Delta U = U_f - U_i = 1.519J - 1.575J = -0.056J$

Magnetostatica



E` data una scatola cilindrica di raggio $b = 10\,\mathrm{cm}$ in cui esistono un campo elettrostatico $E = 500\,\mathrm{V/m}$ e un campo magnetico *B*, uniformi e diretti lungo l'asse (*z*) della scatola (vedi figura). Da un punto *P*, posto sull'asse della scatola a distanza $h = 20cm$ dalla base superiore, un protone viene lanciato con una velocità $v_0 = 1.0 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$ parallela alla base stessa (vedi figura). Al centro della base è presente un foro *F*.

Si calcolino (trascurando gli effetti della gravità) i valori di *B* per i quali il protone, nel suo moto,

a) non urta la superficie laterale;

b) attraversa il foro *F.*

Soluzione

La forza magnetica agisce solo sul piano *xy*, perpendicolare all'asse *z*, mentre la forza elettrica agisce solo lungo *z*. Grazie a cio`, possiamo scomporre il problema nel piano *xy* e lungo *z*.

Nel piano *xy* il protone percorre in senso orario un'orbita circolare passante per centro (il punto P) della sezione trasversale e tangente ad un suo diametro. Il raggio dell'orbita si ricava dall'equazione del moto

$$\vec{F}_L = m\vec{a}_c \qquad e\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}_c \qquad ev_\perp B = m\frac{v_\perp^2}{R}$$

ovvero $R = \dfrac{m}{e}\dfrac{v_\perp}{B} = \dfrac{m}{e}\dfrac{v_0}{B}$

a) Affinche' il protone non urti la superficie laterale, occorre che il diametro dell'orbita sia minore del raggio della scatola, cosa che impone una condizione al campo magnetico

$$2R < b \qquad B > B^* = 2\frac{m}{e}\frac{v_0}{b} = 0.2088T$$

Il periodo del moto e` $T = \dfrac{2\pi R}{v_0} = 2\pi\dfrac{m}{e}\dfrac{1}{B}$

Lungo *z* il protone effettua un moto uniformemente accelerato

$$\vec{F}_e = m\vec{a}_z \qquad e\vec{E} = m\vec{a}_z \qquad a_z = \frac{e}{m}E$$

per percorrere la distanza *h*, impiega un tempo $t = \sqrt{\dfrac{2h}{a_z}} = \sqrt{\dfrac{2h}{E}\dfrac{m}{e}}$

b) Affinche' il protone riesca a passare attraverso il foro, occorre che in questo tempo *t* esso compia un numero intero di rivoluzioni, cioe`

$$t = nT \qquad\qquad \sqrt{\frac{2h}{E}\frac{m}{e}} = n2\pi\frac{m}{e}\frac{1}{B}$$

questa e` una seconda condizione sul campo magnetico

$$B = n\pi\sqrt{2\frac{m}{e}\frac{E}{h}} = nB_0 = n \cdot 2.27 \cdot 10^{-2}T$$

cioe` dev'essere un multiplo intero di un valore minimo B_0.

Dall'insieme delle due condizioni otteniamo

$$nB_0 > B^* \qquad\qquad n > \frac{0.2088T}{2.27 \cdot 10^{-2}T} = 9.2$$

quindi i valori ammessi del campo magnetico sono $B = n \cdot 2.27 \cdot 10^{-2}T$ con $n \geq 10$.