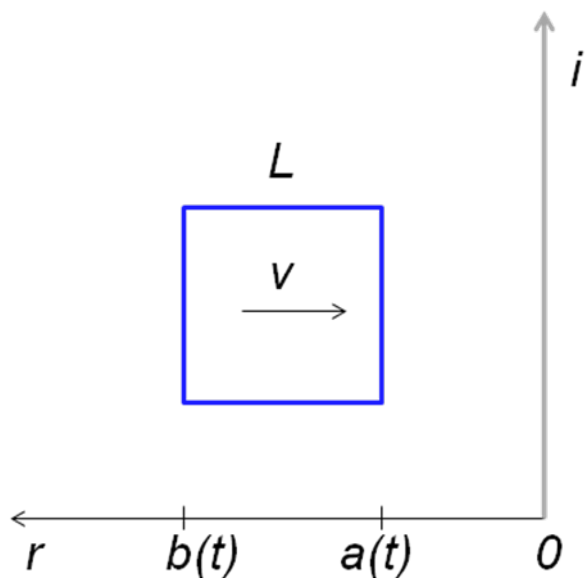
Soluzione del compito di Fisica 2

20 febbraio 2012 (Udine)

Elettrodinamica

È data una spira quadrata di lato *L* e resistenza *R*, ed un filo percorso da corrente *i* lungo *z* (vedi figura). Diciamo *a* e *b* le distanze del lato parallelo più vicino e più lontano dal filo. La spira si muova con velocità *v* nel piano *rz* verso il filo.



Trovare:

a) il flusso del campo *B* attraverso la spira;

b) la *fem* e la corrente *I* indotte nella spira, specificandone il verso;

c) la forza totale agente sulla spira.

Soluzione

a) Il campo magnetico è del tipo Biot-Savart, il flusso è quindi

$$\Phi(B) = \int_{spira} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} L dr = \frac{\mu_0}{2\pi} iL \log\frac{b(t)}{a(t)}$$

ove si è scelto di orientare la superficie della spira parallelamente al campo, cioè in verso antiorario.

b) la *fem* si trova derivando rispetto al tempo

$$fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} iL \frac{a(t)}{b(t)} \frac{b'(t)a(t) - b(t)a'(t)}{a^2(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi} iLv \frac{b(t)-a(t)}{a(t)b(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iL^2 v}{a(t)b(t)}$$

ove si è posto $a'(t) = b'(t) = v$ e $b(t) - a(t) = L$

la corrente è data da $I = \frac{fem}{R}$, il verso di entrambe è <u>orario</u>.

c) Siccome le forze agenti sui lati paralleli all'asse *r* sono uguali e contrarie, basta considerare le forze agenti sui lati paralleli all'asse *z*. Queste sono

$$F_b = ILB(b(t)) \qquad\qquad F_a = ILB(a(t))$$

la forza totale agente sulla spira dovuta al campo magnetico è dunque

$$F_{tot} = F_a - F_b = IL[B(a(t)) - B(b(t))] = IL\frac{\mu_0}{2\pi}i\left[\frac{1}{a(t)} - \frac{1}{b(t)}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iIL^2}{a(t)[a(t)+L]}$$

Siccome F_a è maggiore di F_b la forza risultante è diretta nel verso *r* positivo.

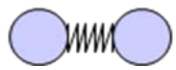
Relatività

Relatività

L'energia relativistica E di un sistema costituito da piu` particelle (*j=1,...n*) contiene, in generale, l'energia cinetica K_{CM} del centro di massa del sistema e l'energia interna (l'energia a riposo $m_j c^2$ e l'energia cinetica rispetto al centro di massa, K_j, dei costituenti e l'energia potenziale U dovuta alla loro interazione)

$$E = K_{CM} + \left(\sum_j m_j c^2 + \sum_j K_j + U \right)$$

Sia dato un sistema costituito da due corpi uguali di massa m, collegati da una molla di massa trascurabile. Inizialmente i corpi siano fermi e la molla sia carica. E` dunque presente un'energia potenziale U, che supporremo nota.



a) Determinare il valore di E nello stato iniziale, in funzione **delle masse dei corpi costituenti** e **dell'energia interna del sistema**.

   Successivamente la molla scatta e i due corpi vengono lanciati in versi opposti con uguale velocita`.

b) Determinare E nello stato finale, di nuovo in funzione delle masse dei corpi costituenti e dell'energia interna del sistema.

c) Trovare la velocita` finale v dei due corpi in funzione di m e U (suggerimento: imporre la conservazione di E e usare l'espressione dell'energia cinetica relativistica).

Soluzione

a) l'energia relativistica nello stato iniziale e` $E_i = mc^2 + mc^2 + U = 2mc^2 + U$

b) e nello stato finale $E_f = mc^2 + mc^2 + K = 2mc^2 + K$

c) Imponiamo la conservazione dell'energia relativistica $E_i = E_f$ ne segue

$$2mc^2 + U = 2mc^2 + K \qquad \text{ovvero} \qquad K = U$$

Esprimendo l'energia cinetica in forma relativistica

$$K = mc^2(\gamma - 1) + mc^2(\gamma - 1) = 2mc^2(\gamma - 1)$$

otteniamo l'espressione di γ in funzione di *U*

$$\gamma = 1 + \frac{U}{2mc^2}$$

e infine, risolvendo per la velocita` $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{U}{2mc^2}\right)^2}}$

Ottica geometrica

Un sistema di lenti e` formato da una lente convergente di lunghezza focale $f_1$ = 15 cm e da una seconda lente convergente di focale $f_2$ = 20 cm posta a 70 cm a destra della prima. Un oggetto e` posto a distanza o_1 = 20 cm a sinistra della prima lente. Disegnare il sistema.

Determinare

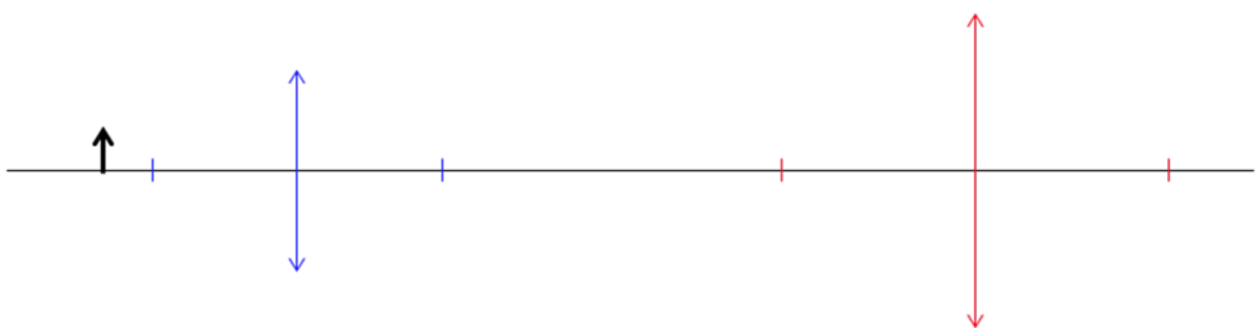
a) la distanza dell'immagine dovuta alla prima lente e le caratteristiche dell'immagine (R/V, D/C) e l'ingrandimento relativo;

b) la distanza dell'immagine dovuta **alla sola** seconda lente, le caratteristiche dell'immagine e l'ingrandimento relativo;

c) le caratteristiche dell'immagine dovuta alle due lenti e l'ingrandimento relativo;

Soluzione

Il sistema e` il seguente

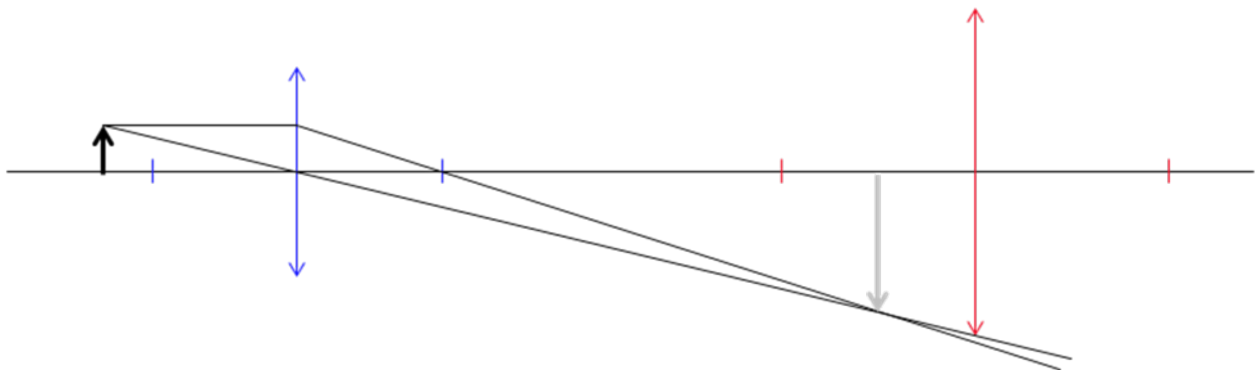


a) Applichiamo l'equazione delle lenti alla prima lente $\frac{1}{o_1}+\frac{1}{i_1}=\frac{1}{f_1}$ e

$$\frac{1}{i_1}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{o_1}=\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{4-3}{60}=\frac{1}{60}$$

da cui i_1 = 60 cm, l'immagine e` reale (R). L'ingrandimento e` dato da $G_1=-\frac{i_1}{o_1}=-\frac{60}{20}=-3$

quindi l'immagine e` capovolta (C) e ingrandita.



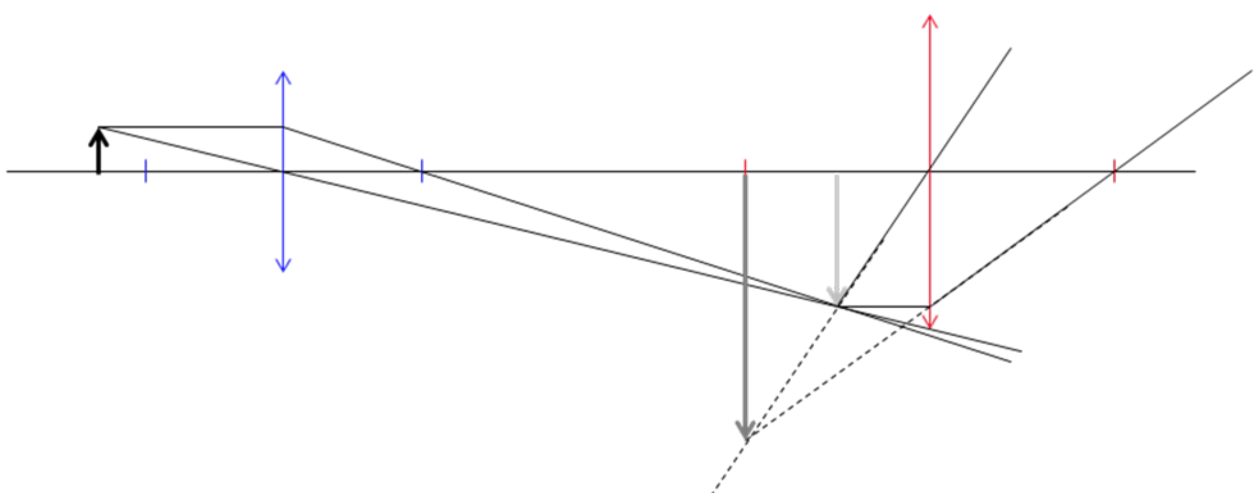
b) Applichiamo l'equazione delle lenti alla seconda lente $\frac{1}{o_2}+\frac{1}{i_2}=\frac{1}{f_2}$ e

$o_2 = d - i_1 = 70 - 60 = 10cm$ da cui

$$\frac{1}{i_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{o_2}=\frac{1}{20}-\frac{1}{10}=\frac{1-2}{20}=-\frac{1}{20}$$

e i_2 = -20 cm, l'immagine e` virtuale (V). L'ingrandimento e` dato da $G_2=-\frac{i_2}{o_2}=-\frac{-20}{10}=+2$

quindi l'immagine e` diritta (D) e ingrandita.



c) L'immagine di tutto il sistema e` virtuale, capovolta (VC) e ingrandita, l'ingrandimento vale

$$G = G_1 G_2 = (-3)\cdot(+2) = -6$$

Elettrostatica

Un condensatore cilindrico di raggio interno *a*, raggio esterno *b* e lunghezza *L* (molto maggiore di *b*, di modo che gli effetti di bordo siano trascurabili), e` riempito di un'olio isolante di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$. Il condensatore e` collegato ad una batteria di fem *F*. Trovare

a) la capacita` *C* del condensatore;

b) la carica *Q* erogata dal generatore per caricare il condensatore;

c) l'energia elettrostatica *U* immagazzinata nel condensatore;

d) l'energia elettrica totale $\mathscr{E}$ fornita dal generatore. Giustificare la risposta.

Soluzione

a) La capacita` si trova come rapporto fra carica e ddp. Quest'ultima si calcola a partire dal campo elettrico, che a sua volta si puo` calcolare dalla legge di Gauss

$$E = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \qquad V = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon}\log\frac{b}{a} \qquad C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\log\frac{b}{a}}$$

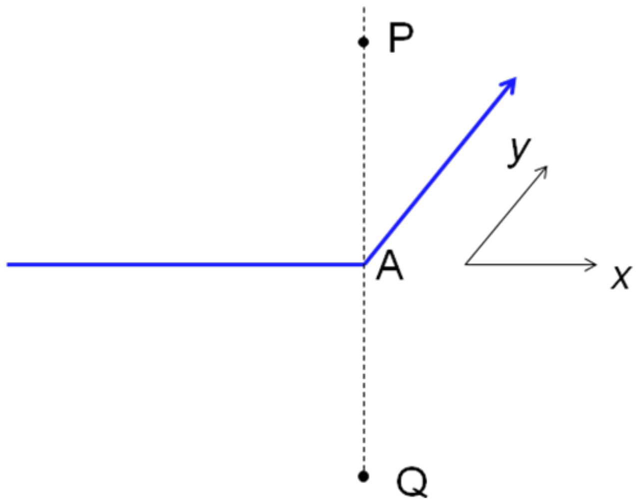
b) la carica erogata dal generatore per caricare il condensatore e` $Q = CF$

c) l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore e` $U = \frac{1}{2}CF^2$

d) l'energia totale fornita dal generatore e` pari alla carica erogata per la fem : $\mathscr{E} = QF = CF^2$. Questa energia e` il doppio di quella immagazzinata nel condensatore, una parte dell'energia e` infatti dissipata nella resistenza del circuito (in particolare nella resistenza interna del generatore). Si dimostra con calcolo diretto che tale energia e` indipendente dal valore della resistenza e vale proprio quanto l'energia immagazzinata nel condensatore.

Magnetismo

E` dato un filo indefinito piegato a 90 gradi nel punto A e giacente nel piano *xy*, percorso da corrente *I*. Si consideri un punto P posto sulla perpendicolare al piano passante per A, a distanza *d* dal piano (vedi figura).



a) Determinare le componenti cartesiane del campo magnetico generato dal filo nel punto P.

b) Scrivere l'espressione del campo risultante in forma vettoriale.

c) Scrivere l'espressione del campo magnetico nel punto Q simmetrico a P rispetto al piano.

Suggerimento: determinare preliminarmente il campo magnetico prodotto da una meta` di un filo indefinito.

Soluzione

Sfruttando la simmetria di riflessione rispetto ad un punto, il campo generato da meta` di un filo indefinito e` pari a meta` del campo generato da tutto il filo: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}$

a) per la seconda regola della mano destra il tratto di filo lungo *x* produce un campo in P con sola componente lungo y, mentre il tratto lungo y produce un campo con sola componente lungo *x*:

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d} \qquad\qquad B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}$$

b) in forma vettoriale $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}\left(\hat{i} - \hat{j}\right)$

c) nel punto Q il campo ha stesso modulo e direzione, ma verso opposto $\vec{B}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{d}\left(\hat{i} - \hat{j}\right)$