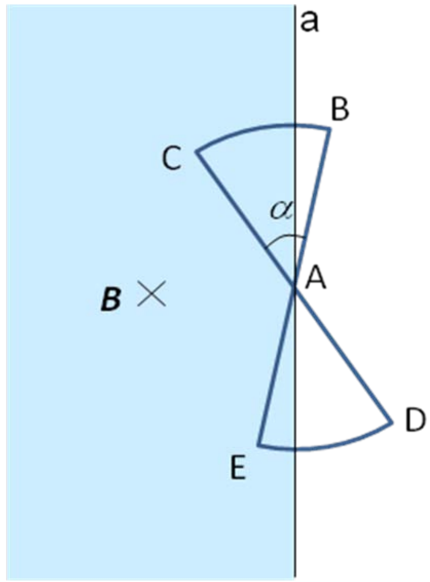
Elettrodinamica

Due spire piane di filo conduttore ABC, AED, hanno forma di settore circolare con angolo al vertice α e sono poste una opposta all'altra rispetto al vertice A (vedi figura)



Il vertice A giace sulla retta *a* che separa una regione (a sinistra in figura) con campo magnetico ***B*** uniforme diretto lungo l'asse *z*, perpendicolare al piano delle spire, da una regione (a destra in figura) priva di campo magnetico (la configurazione del campo e` idealizzata per semplicita` di calcolo). Le due spire sono collegate *meccanicamente* a formare una 'farfalla' e possono ruotare attorno ad un asse passante per A e parallelo all'asse *z*. Supposto che la velocita` di rotazione ω sia uniforme e antioraria, trovare

a) la fem indotta nella spira ABC e nella spira AED;
b) Carlo e Francesca vogliono costruire un generatore di fem, e devono decidere come collegare *elettricamente* fra loro le due spire per ottenere la massima fem. Se collegano un polo al lato AB della prima spira, a quale lato della seconda spira dovranno collegare il secondo polo e come bisogna collegare tra loro la prima e la seconda spira?
c) Se *T* e` il periodo di rotazione della farfalla e $\tau=\alpha/\omega$ il tempo che impiega a percorrere l'angolo α, disegnare il grafico della fem in un periodo.

Soluzione

a) La fem indotta nella spira ABC è nulla quando la spira è completamente immersa nel campo *B* o quando è completamente esterna al campo (caso 1), è invece pari a :

$$fem_{ABC} = -\frac{d\Phi_{ABC}}{dt} = -\frac{-BdA}{dt} = B\frac{1}{2}R^2\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}R^2\omega B$$

quando la spira è in parte immersa e in parte no (caso 2).

Analogamente per la spira AED, la fem indotta sarà zero o:

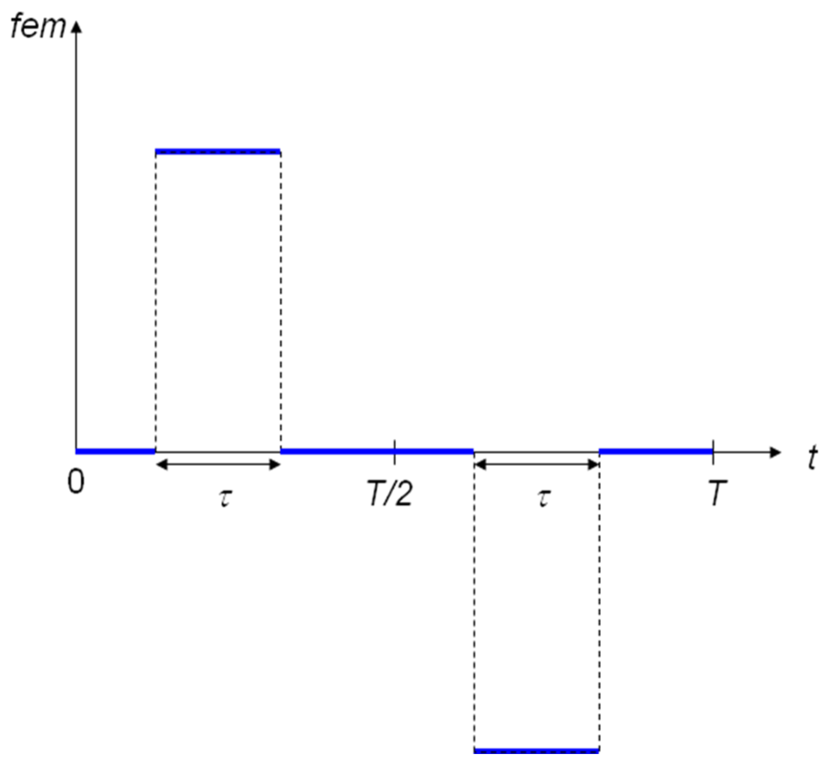
$$fem_{AED} = -\frac{d\Phi_{AED}}{dt} = -\frac{-BdA}{dt} = B\frac{1}{2}R^2\left(-\frac{d\alpha}{dt}\right) = -\frac{1}{2}R^2\omega B$$

b) Il secondo polo va collegato con il lato AE; il lato AC della prima spira va collegato al lato AD della seconda spira. La fem totale è nulla nel caso 1 e pari alla differenza delle fem delle due spire nel caso 2.

c) Caso 1: $fem = 0$, si verifica quando la retta *a* è contenuta nell'angolo $\pi - \alpha$;

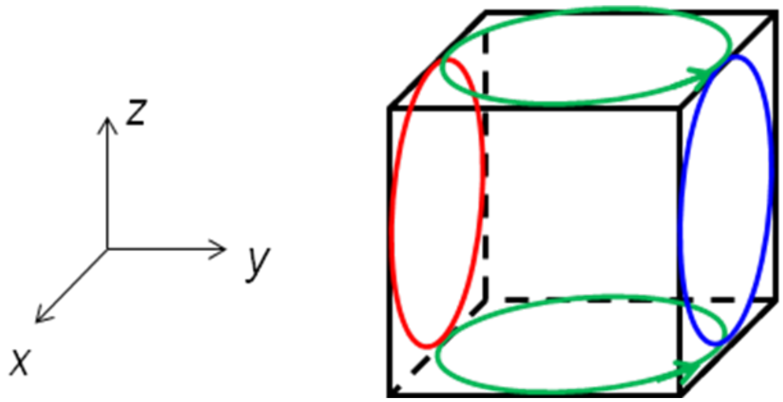
caso 2: $fem = fem_{ABC} - fem_{AED} = R^2 \omega B$, si verifica quando la retta *a* è contenuta nell'angolo α.

Il grafico della fem è il seguente:



Elettromagnetismo

Due spire circolari uguali, di diametro *L*, giacciono rispettivamente sulla faccia *xy* superiore e inferiore di un cubo di lato *L*. Le correnti nelle due spire sono uguali ad *i*.



trovare

a) il campo magnetico nel centro C del cubo.

Sulle facce *xz* sinistra e destra del cubo giacciono due anelli di diametro *L* uniformemente carichi con densita` uguali in modulo e di segno rispettivamente positivo e negativo. Trovare

b) il campo elettrico nel centro del cubo.

Una particella di carica *q* positiva, si trova nel centro del cubo in un dato istante di tempo, con velocita` *v* diretta verso *x* positivo. Trovare

c) la forza magnetica ed elettrica agenti sulla particella (specificarne intensita`, direzione e verso).
d) trovare il valore di *v* per cui la forza totale agente sulla particella e` nulla nell'istante di tempo considerato.

Soluzione

a) Il campo magnetico si trova con la prima formula di Laplace, applicata ad un punto generico dell'asse della spira e con il principio di sovrapposizione applicato alle due spire. Il campo dovuto ad una spira di raggio *R*, per un punto a distanza *z* dal piano della spira e`

$$B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Per il centro del cubo *z=R=L/2* e tenuto conto del contributo di entrambe le spire, il campo diviene

$$B_C = 2\frac{\mu_0}{2} i \frac{(L/2)^2}{\left((L/2)^2 + (L/2)^2\right)^{3/2}} = \mu_0 i \frac{1}{\sqrt{2}L}$$

b) Analogamente si trova il campo elettrico di una spira per un punto generico dell'asse a distanza *y* dal piano della spira

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0} \lambda \frac{Ry}{\left(R^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

Per il centro del cubo *y=R=L/2* e tenuto conto del contributo di entrambe le spire, il campo diviene

$$E_C = 2\frac{1}{2\varepsilon_0} \lambda \frac{(L/2)^2}{\left((L/2)^2 + (L/2)^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}L}$$

c) la forza magnetica e` $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}_C$ ovvero $\vec{F}_B = qvB_C\hat{i} \times \hat{k} = qvB_C\left(-\hat{j}\right)$; la forza elettrica $\vec{F}_E = q\vec{E}_C = qE_C\,\hat{j}$

d) la forza risultante e` nulla quando $qvB_C = qE_C$ ovvero per un valore della velocita` di

$$v = \frac{E_C}{B_C} = \frac{\lambda}{\mu_0 \varepsilon_0 i}$$

Ottica fisica

Uno schermo, illuminato con un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ=500 nm, porta due fenditure parallele di ampiezza *a*=0.04 mm, distanti *d*=0.5 mm. Avremo contemporaneamente diffrazione da ciascuna fenditura e interferenza tra le due. Ricordando l'espressione dell'intensita` per la diffrazione e l'interferenza ($\alpha$ e` la direzione dei raggi uscenti dalla fenditura, rispetto alla direzione di incidenza)

$$I_{diff} = I_0 \left(\frac{\sin(\pi(a/\lambda)\sin\alpha)}{\pi(a/\lambda)\sin\alpha} \right)^2 \qquad I_{interf} = I_0 \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha \right)$$

a) calcolare il numero di massimi di interferenza compresi nel massimo centrale di diffrazione.
b) Su uno schermo posto a distanza *D*=2 m dalle fenditure, calcolare la larghezza del primo massimo di diffrazione;
c) calcolare la distanza tra i massimi di interferenza compresi nel massimo centrale di diffrazione.

Soluzione

a) il massimo centrale di diffrazione è delimitato dai minimi di primo ordine:

$$\pi \frac{a}{\lambda} \sin\alpha_{dif} = \pm\pi \qquad \sin\alpha_{dif} = \pm\frac{\lambda}{a}$$

all'interno di questo intervallo sono presenti massimi di interferenza:

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha_{\text{int}} = \pm k\pi \qquad \sin\alpha_{\text{int}} = \pm k\frac{\lambda}{d}$$

occorre quindi che

$$k\frac{\lambda}{d} \le \frac{\lambda}{a} \qquad k \le \frac{d}{a}$$

il numero cercato sarà

$$N = 2\left[\frac{d}{a}\right] + 1 = 2\left[\frac{0.5}{0.04}\right] + 1 = 2[12.5] + 1 = 25$$

dove con la parentesi quadra si è indicata la parte intera di *d/a*, il fattore 2 tien conto della simmetria tra valori positivi e negativi e l'1 sommato, del massimo di interferenza centrale.

b) La larghezza e` pari differenza tra le posizioni del secondo e del primo minimo di diffrazione:

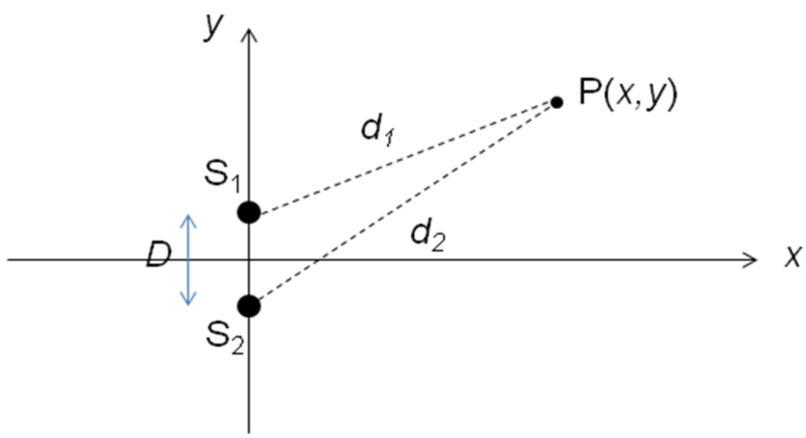
$$\Delta y_{dif} = Dtg\alpha_2 - Dtg\alpha_1 \approx D(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = D\left(2\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a}\right) = D\frac{\lambda}{a} = 2\frac{500nm}{0.04mm} = 2.5cm$$

c) La distanza tra i massimi di interferenza e`:

$$\Delta y_{\text{int}} = Dtg\left[(k+1)\frac{\lambda}{d}\right] - Dtg\left[k\frac{\lambda}{d}\right] \approx D\left[(k+1)\frac{\lambda}{d} - k\frac{\lambda}{d}\right] = D\frac{\lambda}{d} = 2\cdot\frac{500nm}{0.5mm} = 2mm$$

Onde

Due sorgenti di vibrazione meccanica in fase fra loro S_1, S_2, poste simmetricamente rispetto all'origine, distanti D, generano onde circolari sinusoidali trasversali di lunghezza d'onda λ sulla superficie di un bacino d'acqua.



Detto P(x,y) un generico punto della superficie, trovare

a) le distanze d_1, d_2 del punto dalle sorgenti;

b) qual e` la condizione che il punto deve soddisfare per avere interferenza costruttiva delle due sorgenti?

c) determinare il luogo geometrico dei punti del piano xy che soddisfano (b).

Soluzione

a) Le distanze sono: $d_1 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2}$ $\qquad d_2 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{D}{2}\right)^2}$

b) La differenza di cammino ottico dev'essere uguale ad un multiplo di lunghezza d'onda: $d_2 - d_1 = n\lambda$

c)

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{D}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} = n\lambda$$

Portando a secondo membro la seconda radice ed elevando al quadrato, otteniamo

$$x^2 + \left(y + \frac{D}{2}\right)^2 = n^2\lambda^2 - 2n\lambda\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} + x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2$$

Portando la radice a primo membro,tutto il resto a secondo e semplificando:

$$2n\lambda\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2} = n^2\lambda^2 - 2yD$$

elevando a quadrato e semplificando:

$$4n^2\lambda^2 x^2 - 4\left(D^2 - n^2\lambda^2\right)y^2 + n^2\lambda^2\left(D^2 - n^2\lambda^2\right) = 0$$

otteniamo così un'equazione che rappresenta un'iperbole.