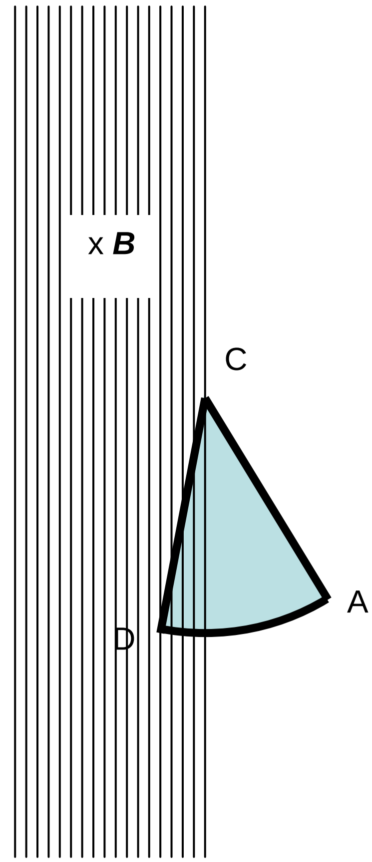
Elettrodinamica

Una spira ACD, di resistenza *R*, ha la forma di un settore circolare, con angolo al centro C di ampiezza Θ e raggio *a*. La spira giace su un piano orizzontale e può ruotare attorno all'asse verticale fisso passante per C e perpendicolare al piano. Nella parte sinistra della figura (tratteggiata) è presente un campo magnetico uniforme *B*, perpendicolare al piano della spira, mentre nella parte destra il campo è nullo (per semplicità si suppone che il campo cambi valore bruscamente tre le due parti). La spira ruoti con velocità angolare istantanea ω. Diciamo θ la porzione dell'angolo Θ immersa nel campo ***B***. Si vuole determinare:

a) la corrente indotta nella spira nei tre casi possibili: (i) quando è tutta fuori dal campo ***B***, (ii) quando è in parte nel campo e in parte fuori, e (iii) quando è tutta nel campo;
b) la forza elettrodinamica totale agente sulla spira nei tre casi.



Soluzione

a) La corrente indotta è proporzionale alla *fem*, dovremo pertanto determinare quest'ultima. Nei casi (i) e (iii) la *fem* (e quindi la corrente) è nulla, in quanto il flusso del campo non varia. Nel caso (ii), detta θ la porzione dell'angolo Θ immersa nel campo ***B***, la *fem* è data da

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdA}{dt} = -\frac{Ba^2 d\theta}{2dt} = -\frac{1}{2}Ba^2\omega,$$

e la corrente da $\quad i = \frac{fem}{R} = -\frac{Ba^2}{2R}\omega.$

b) Nei casi (i) e (iii) la forza è nulla. Nel caso (ii) la forza è data da due contributi. Il primo e\` la forza agente sul lato DC immerso nel campo: essa ha direzione azimutale e sia che la spira entri o esca dal campo, si oppone al moto di rotazione della spira e vale

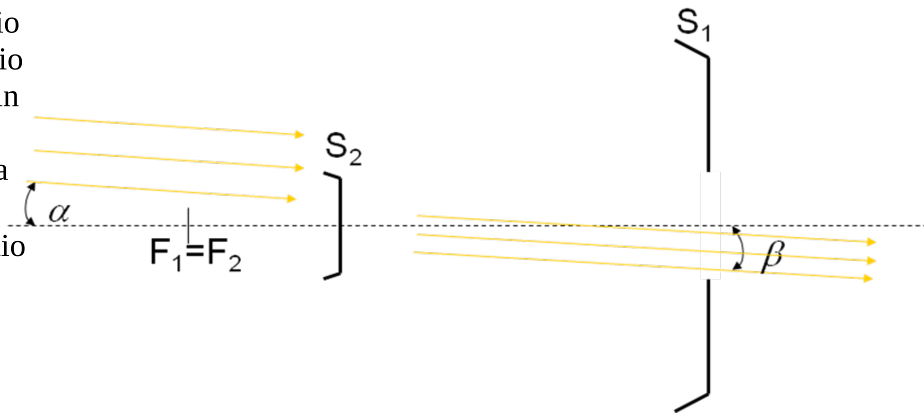
$$\vec{F}_\theta = i\vec{a} \times \vec{B} = iaB\hat{\theta} = -\frac{B^2a^3}{2R}\omega\hat{\theta}$$

Il secondo contributo e\` dato dalla porzione DK immersa nel campo dell'arco DA, ha direzione radiale ed è compensata dalla reazione *V* del vincolo in C. Essa vale

$$\vec{F}_r = i\int_{AK} d\vec{l} \times \vec{B} = i\left(D\vec{K}\right) \times \vec{B} = i2a\sin\frac{\theta}{2}B\hat{r} = -\frac{B^2a^3}{R}\omega\sin\frac{\theta}{2}\hat{r}$$

Ottica geometrica

Un telescopio è formato da uno specchio concavo S_1 di focale f_1 e da uno specchio convesso S_2 di focale f_2, ed è costruito in modo che i loro fuochi coincidano. Raggi paralleli provenienti da una stella incidono sul telescopio inclinati di un angolo α, vengono riflessi dallo specchio S_1 e quindi dallo specchio S_2 e fuoriescono dal telescopio attraverso un'apertura praticata nello specchio S_1, inclinati di un angolo β.



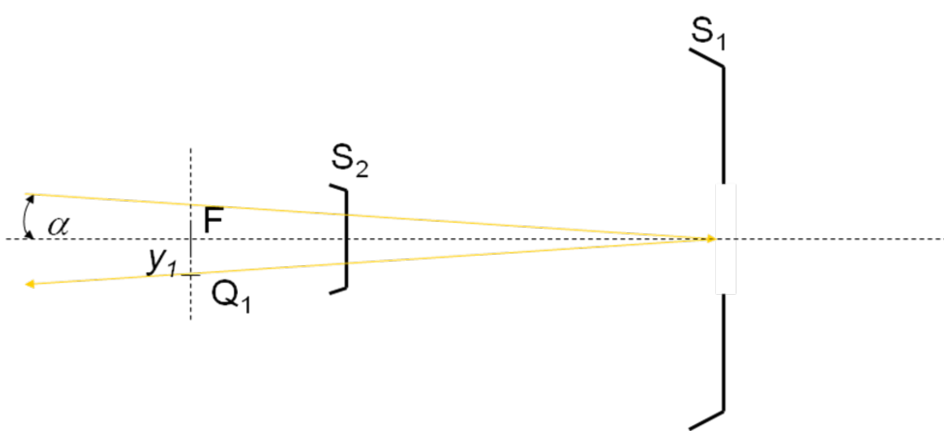
Determinare

a) l'angolo β in funzione dell'angolo α e delle distanze focali degli specchi;
b) qual è l'ingrandimento visuale V di questo telescopio?

Suggerimento: la determinazione dell'immagine di ciascuno specchio è indipendente dalla presenza dell'altro specchio, e quindi dal fatto che S_2 intercetta parte dei raggi. Altrettanto ininfluente per la formazione dell'immagine di S_1 è la presenza dell'apertura.

Soluzione

a) È noto che l'immagine di un punto all'infinito giace sul piano focale. Basterà quindi un raggio per trovare l'immagine Q_1 della stella. Prendiamo il raggio principale che passa per il vertice dello specchio S_1, esso è riflesso simmetricamente rispetto all'asse e interseca il piano focale a distanza y_1, dall'asse.

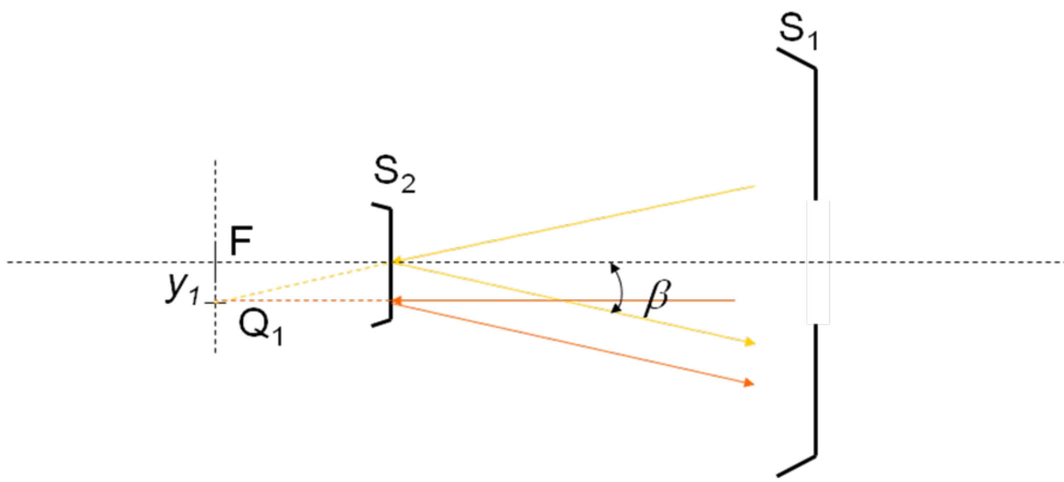


Questa distanza è data dalla relazione

$$y_1 = f_1 tg\alpha$$

Prendiamo Q_1 come oggetto <u>virtuale</u> dello specchio S_2, e usiamo come raggi principali quello che incide sul vertice di S_2 e quello parallelo all'asse. I raggi riflessi sono paralleli, e formano un'angolo β con l'asse. Il valore di quest'angolo è

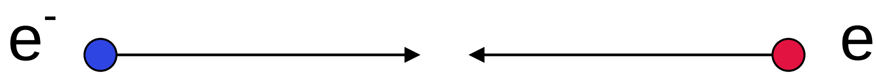
$$tg\beta = \frac{y_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_2} tg\alpha$$

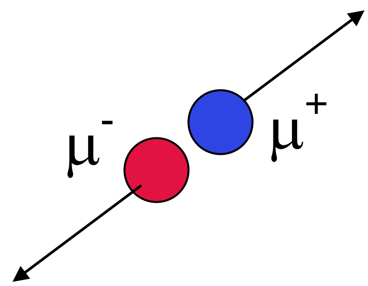


b) l'ingrandimento visuale è $V = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$ come per i telescopi di Galileo e Keplero.

Relatività

Un elettrone di quantità di moto nota $\boldsymbol{p}_e$ urta un positrone che si muove con quantità di moto uguale ed opposta $\boldsymbol{p}_p = -\boldsymbol{p}_e$. Nell'urto le due particelle annichilano generando una coppia di muoni di segno opposto.





L'elettrone e il positrone hanno massa fra loro uguale $m=0,511\ MeV/c^2$, i due muoni hanno pure massa fra loro uguale $M=106\ MeV/c^2$. Le quantità di moto dei muoni siano $\boldsymbol{p}_{\mu1}$, $\boldsymbol{p}_{\mu2}$.
Imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia tra stato iniziale e finale,

a) determinare la quantità di moto dei due muoni;
b) calcolare il valore numerico minimo della quantità di moto dell'elettrone (e del positrone), affinché questa reazione possa avvenire.

Soluzione

a) Le quantità di moto iniziale sono, rispettivamente,

$$\vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_p = 0 \qquad\qquad \vec{p}_f = \vec{p}_{\mu1} + \vec{p}_{\mu2}.$$

Dal principio di conservazione otteniamo $\vec{p}_{\mu1} + \vec{p}_{\mu2} = 0$. Passando alle proiezioni

$$p_p = p_e = p \qquad\qquad p_{\mu1} = p_{\mu2} = P.$$

L'energia negli stati iniziale e finale è, rispettivamente,

$$E_i = E_e + E_p = \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4} + \sqrt{p_p^2c^2 + m^2c^4} = 2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$E_f = E_{\mu1} + E_{\mu2} = \sqrt{p_{\mu1}^2c^2 + M^2c^4} + \sqrt{p_{\mu2}^2c^2 + M^2c^4} = 2\sqrt{P^2c^2 + M^2c^4}.$$

Imponendo il principio di conservazione otteniamo $2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = 2\sqrt{P^2c^2 + M^2c^4}$, da cui si determina il valore della QdM dei muoni: $P = \sqrt{p^2 - \left(M^2 - m^2\right)c^2}$

b) Occorre che l'espressione sotto radice sia non negativa, da cui segue

$$p \geq \sqrt{\left(M^2 - m^2\right)c^2} = \sqrt{106^2 - 0.511^2}\,MeV \approx 106\,MeV$$