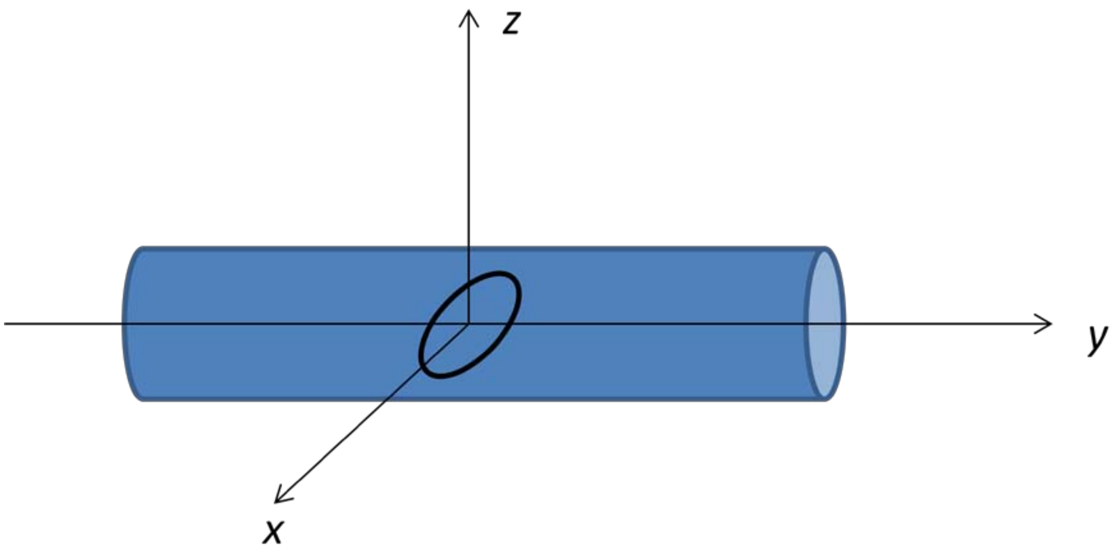
Compito del 1 settembre 2014

Elettrodinamica

Un solenoide di *N* spire, raggio *a* e lunghezza *L*, il cui asse coincide con l'asse *y*, e` percorso da una corrente continua *I*. Si supponga che le dimensioni del solenoide siano tali da garantire l'approssimazione del solenoide indefinito nel suo centro, ove e` posta una spira piana di resistenza *R*, area *A* e autoinduttanza trascurabile, libera di ruotare attorno all'asse *x* (cioe` il versore della superficie orientata e` vincolato a rimanere nel piano *yz*).



Detto θ l'angolo formato da tale versore con l'asse *y* al generico istante di tempo, si supponga che esso vari nel tempo secondo la legge $\theta(t) = \omega t$. Trovare

a) la mutua induttanza *M* tra solenoide e spira in funzione del tempo.

Dalla misura della corrente *i* indotta nella spira si vuole risalire alla corrente nel solenoide. Supposto che l'ampiezza della corrente nella spira sia i_0, e trascurando la retroazione della spira sul solenoide, trovare

b) il valore della corrente *I*.

Se la corrente del solenoide fosse alternata, del tipo $I(t) = I_0 \sin \Omega t$,

c) quale sarebbe la corrente indotta nella spira?

Soluzione

a) Detto 1 il solenoide e 2 la spira, la mutua induttanza e` definita dalla relazione che lega il flusso del campo $B_1$ attraverso la spira: $\Phi(B_1 \mid S_2) = MI$. Il flusso e` facilmente calcolabile ricordando che al centro del solenoide (nell'approssimazione considerata) il campo magnetico e` uniforme, quindi $\Phi(B_1 \mid S_2) = \vec{B}_1 \cdot \vec{A} = B_1 A \cos\theta$. Inserendo il valore del campo del solenoide, otteniamo $\Phi(B_1 \mid S_2) = \mu_0 n I A \cos\omega t$, ove $n = \dfrac{N}{L}$ e` il numero di spire per unita` di lunghezza del solenoide. Da qui segue che $M = \mu_0 n A \cos\omega t = M_0 \cos\omega t$.

b) La corrente si puo` determinare ricordando l'espressione della corrente indotta nella spira:

$$i = \frac{fem}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d(MI)}{dt} = -\frac{1}{R} I \frac{dM}{dt} = \frac{I}{R} M_0 \omega \sin \omega t = i_0 \sin \omega t \,.$$

Dalla misura di i_0 e` quindi possibile risalire alla corrente continua I del solenoide:

$$I = \frac{i_0 R}{M_0 \omega} = \frac{i_0 R L}{\mu_0 N A \omega} \,.$$

c) Nel caso I sia alternata, la corrente indotta nella spira e` data da

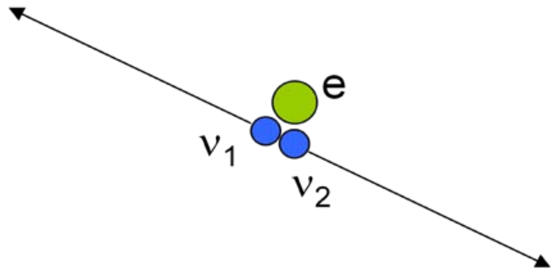
$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d(MI)}{dt} = -\frac{1}{R}\left[\frac{d(M)}{dt} I + M \frac{d(I)}{dt}\right] =$$

$$= \frac{1}{R}\left(M_0 \omega \sin \omega t I_0 \sin \Omega t - M_0 \cos \omega t I_0 \Omega \cos \Omega t\right) =$$

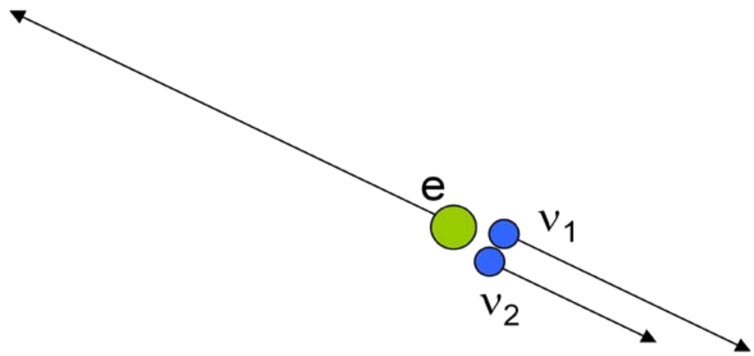
$$= \frac{M_0 I_0}{R}\left(\omega \sin \omega t \sin \Omega t - \Omega \cos \omega t \cos \Omega t\right)$$

Relativita`

I muoni decadono in un elettrone e due neutrini. L'energia che l'elettrone assume è in generale diversa da decadimento a decadimento. Essa varia da un minimo E_{min}, quando esso è fermo e i due neutrini sono emessi in direzioni opposte:



a un massimo E_{max} quando è emesso in direzione opposta a quella comune dei due neutrini:



In questo secondo caso, detta M la massa del muone e m quella dell'elettrone, supponendo nulla la massa dei neutrini, e il muone inizialmente fermo, si scriva

a) la conservazione dell'energia;
b) la conservazione della quantità di moto;
c) si trovi l'espressione del valore massimo dell'energia dell'elettrone in funzione delle masse M, m;
d) si trovi l'espressione del valore massimo dell'energia **cinetica** K dell'elettrone in funzione delle masse M, m.

Suggerimento: considerare i due neutrini come un'unica particella.

Soluzione

a) Conservazione dell'energia: $E_i = E_f$ ovvero $E_\mu = E_e + E_{\nu 1} + E_{\nu 2}$ e sostituendo:
$$Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_e^{\,2}c^2} + p_{\nu 1}c + p_{\nu 2}c.$$
b) Conservazione della quantità di moto: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ ovvero $\vec{p}_\mu = \vec{p}_e + \vec{p}_{\nu 1} + \vec{p}_{\nu 2}$ e sostituendo: $0 = p_e - p_{\nu 1} - p_{\nu 2}$.
c) Posto $P = p_{\nu 1} + p_{\nu 2}$ (consideriamo i due neutrini come un unico sistema) abbiamo le due equazioni

$$\begin{cases} Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_e{}^2c^2} + Pc \\ p_e = P \end{cases}.$$

Risolvendo otteniamo la quantità di moto massima dell'elettrone:

$$Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_e{}^2c^2} + p_e c$$

$$\left(Mc^2 - p_e c\right)^2 = m^2c^4 + p_e{}^2c^2$$

$$p_e = \frac{\left(M^2 - m^2\right)c}{2M}$$

e l'energia massima dell'elettrone:

$$E_e = \sqrt{m^2c^4 + p_e{}^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + \left(\frac{\left(M^2 - m^2\right)c}{2M}\right)^2 c^2} =$$

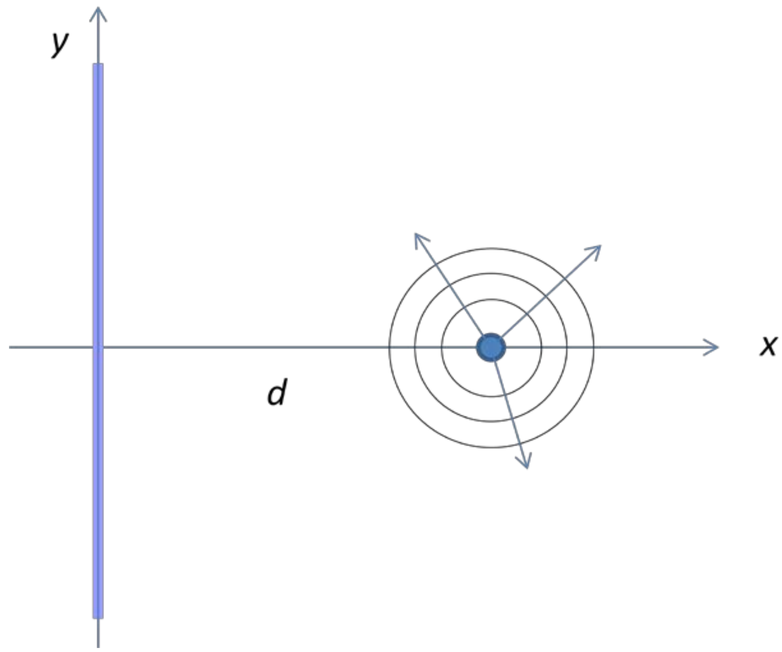
$$= \sqrt{m^2c^4 + \frac{\left(M^2 - m^2\right)^2}{4M^2}c^4} = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2$$

d) L'energia cinetica massima e` data da

$$K = E_e - mc^2 = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2 - mc^2 = \frac{\left(M - m\right)^2}{2M}c^2.$$

Onde

Una sorgente di onde sonore di lunghezza d'onda λ emette in tutte le direzioni e si trova a distanza $d>\lambda$ da una parete riflettente indefinita. Le onde riflesse dalla parete interferiscono con le onde incidenti e si ottiene un'onda risultante dalla sovrapposizione delle due.



Trovare

a) i punti dell'asse x compresi tra la parete e la sorgente in cui l'onda risultante ha un minimo di ampiezza;
b) determinare il numero di tali punti.

Trovare inoltre

c) per quali fra i punti della retta parallela all'asse y passante per la sorgente, si ha un minimo di ampiezza;
d) qual e` il valore massimo che l'ordinata di tali punti puo` assumere?

Suggerimento: e` come se le onde riflesse fossero emesse da una seconda sorgente posta dalla parte opposta della parete alla stessa distanza da questa (sorgente immagine) e in fase con la prima sorgente.

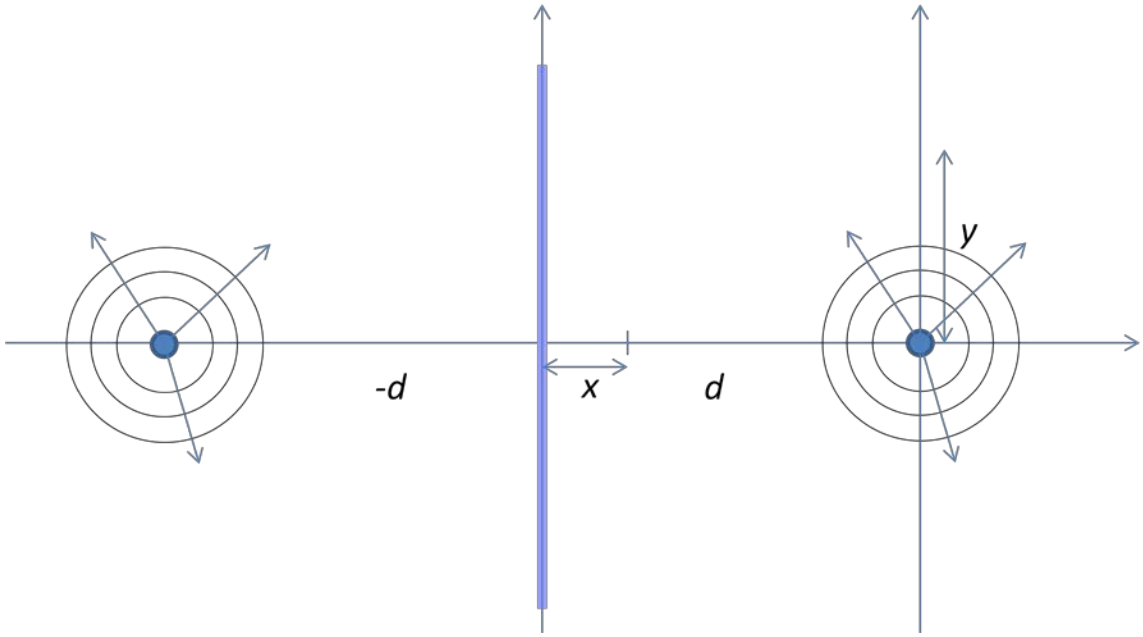
Soluzione

Usando il metodo della sorgente immagine, la condizione di minimo e`: $l_2 - l_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

ove l_1 e l_2 sono le distanze dalla prima e la seconda sorgente (ovvero la differenza tra i cammini 'ottici' delle onde e` un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda). Siccome $l_2 \geq l_1$ per tutti i punti del semispazio a destra della parete, ne segue che dev'essere $n \geq 0$.

a) in un punto a distanza x dalla parete, le onde delle due sorgenti si avra` un minimo quando: $(d+x)-(d-x)=(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, da cui otteniamo:

$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}.$



b) Il numero e` dato dalla condizione $x \le d$, da cui $n \le \frac{2d}{\lambda} - \frac{1}{2}$, ovvero

$n = \left[\frac{2d}{\lambda} - \frac{1}{2}\right]$, ove la parentesi quadra indica la parte intera dell'argomento.

c) Detta *y* l'ordinata del generico punto della retta considerata, la condizione di minimo e`:

$$\sqrt{(d+d)^2 + y^2} - \sqrt{(d-d)^2 + y^2} = \sqrt{(d+d)^2 + y^2} - |y| = (2n+1)\frac{\lambda}{2},$$

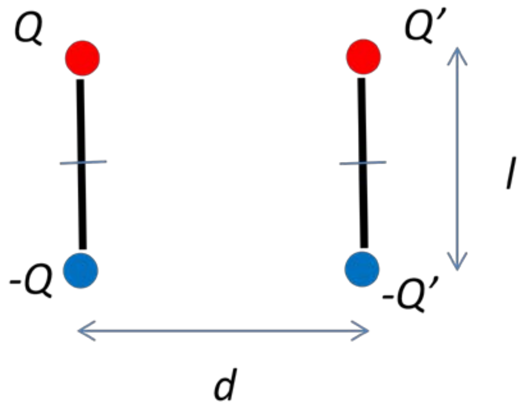
da cui $\sqrt{4d^2 + y^2} = |y| + (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ e risolvendo per *y*:

$$|y| = \frac{4d^2 - ((2n+1)\lambda/2)^2}{(2n+1)\lambda}.$$

d) il massimo *y* si ha per il minimo *n*, cioe` *n=0*: $|y|_{max} = \frac{4d^2 - (\lambda/2)^2}{\lambda}$.

Elettrostatica

Due cariche di segno opposto e ugual valore assoluto *Q* sono fissate alle estremita` di una sbarretta lunga *l*. Una seconda coppia di cariche opposte (il cui valore assoluto e` *Q'*) e` fissata alle estremita` di una seconda sbarretta di ugual lunghezza *l*. Le due coppie sono libere di ruotare attorno al proprio punto medio e sono disposte come in figura. La distanza, fissa, tra i punti medi e` $d>l$.



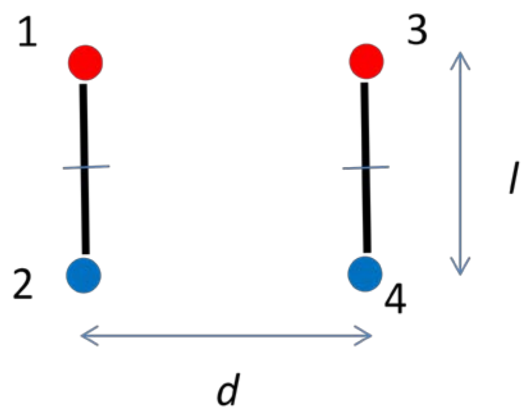
a) Trovare l'energia elettrostatica del sistema nella disposizione della figura.

b) Trovare la posizione di equilibrio stabile del sistema.

c) Trovare l'energia elettrostatica nella posizione di equilibrio stabile, verificare che il valore di tale energia e` minore che nel caso (a).

Soluzione

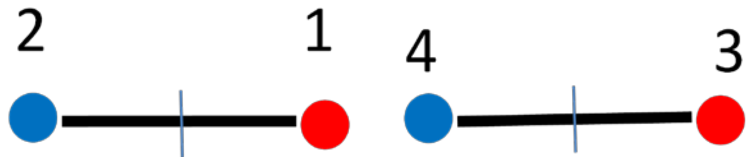
a) L'energia elettrostatica e` data dalla somma delle energie di tutte le coppie di cariche:



$$U_i = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34} =$$

$$= -k\frac{Q^2}{l} + k\frac{QQ'}{d} - k\frac{QQ'}{\sqrt{d^2+l^2}} - k\frac{QQ'}{\sqrt{d^2+l^2}} + k\frac{QQ'}{d} - k\frac{Q'^2}{l}$$

b) Le posizioni di equilibrio stabile si hanno quando due cariche di segno opposto si affacciano alla minima distanza, avremo cosi' la posizione della figura seguente e quella simmetrica con le cariche 2 e 3 affacciate



c) L’energia elettrostatica sara` di nuovo la somma

$$U_f = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

ove U_{12} e U_{34} non cambiano rispetto a prima e neppure U_{13} e U_{24}, quindi

$$U_f = U_{12} + k\frac{QQ'}{d} - k\frac{QQ'}{d-l} - k\frac{QQ'}{d+l} + k\frac{QQ'}{d} + U_{34}$$

Dal confronto dell’energia nello stato iniziale e finale, dobbiamo verificare che

$$-k\frac{QQ'}{d-l} - k\frac{QQ'}{d+l} < -k\frac{QQ'}{\sqrt{d^2+l^2}} - k\frac{QQ'}{\sqrt{d^2+l^2}}$$, ovvero che

$$\frac{1}{d-l} + \frac{1}{d+l} > \frac{2}{\sqrt{d^2+l^2}}$$

$$\frac{d}{d^2-l^2} > \frac{1}{\sqrt{d^2+l^2}}$$

$$d^2\left(d^2+l^2\right) > \left(d^2-l^2\right)^2$$

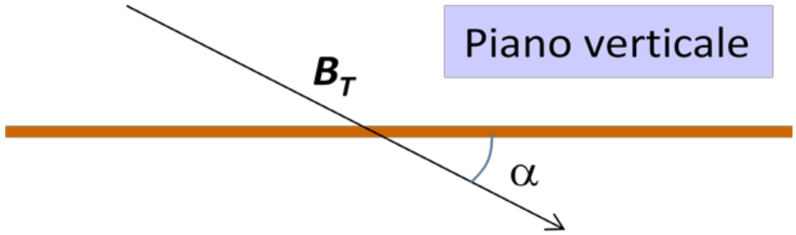
$$l^2\left(l^2-3d^2\right) < 0$$

$$l < \sqrt{3}d$$

che e` sempre verificato, perche’ $l<d$.

Magnetostatica

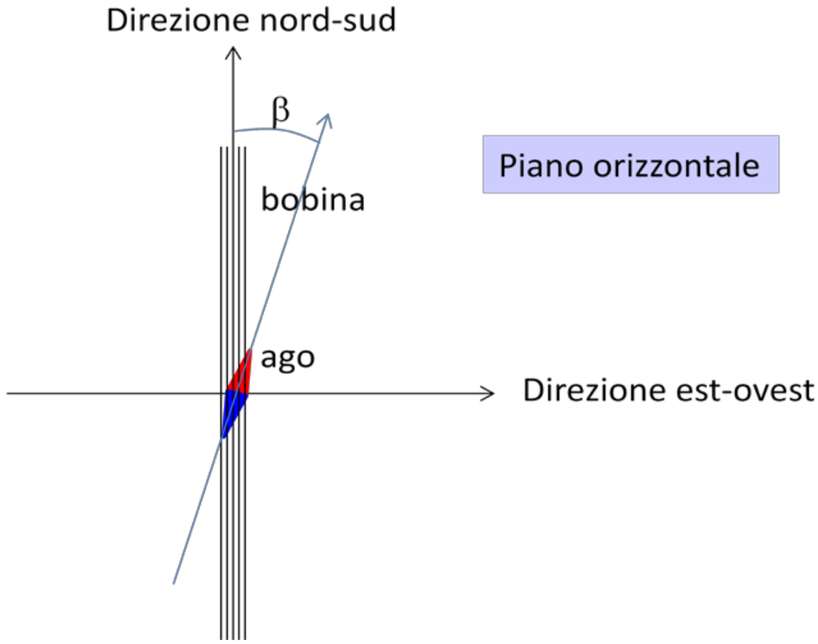
Il campo magnetico in un dato punto della superficie terrestre abbia un'intensita` di 45 μT e formi un angolo di α=40° con il suolo (vedi figura).



Una bobina di N=10 spire circolari e` posta con l'asse in direzione magnetica est-ovest e inizialmente non e` percorsa da corrente.

Un ago magnetico (di dimensioni piccole rispetto al raggio R=20 cm delle spire) si trova al centro delle spire ed e` libero di ruotare in un piano **orizzontale**.

a) Trovare la direzione in cui si dispone l'ago magnetico.



In un secondo momento la bobina sia percorsa da una corrente i=1 A. Trovare

b) il campo magnetico prodotto dalla bobina nel suo centro (per semplicita` si supponga che la bobina abbia lunghezza nulla);

c) l'angolo β formato dall'ago con la direzione nord-sud.

Dati: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

Soluzione

a) L'ago si dispone in direzione nord-sud.

b) Il campo magnetico al centro di una spira circolare e` $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$, quindi per la bobina avremo $B_b = \frac{\mu_0}{2} N \frac{i}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot 10 \frac{1}{0.2} = 31.4\mu T$

c) L'angolo e` lo stesso di quello della componente orizzontale del campo magnetico risultante dalla somma del campo terrestre e del campo della bobina. Troviamo la componente orizzontale:

$$\vec{B}_{or} = \vec{B}_{T-or} + \vec{B}_b = B_T \cos\alpha\hat{n} + B_b\hat{e} = (45\cos 40\hat{n} + 31.4\hat{e})\mu T =$$
$$= (34.5\hat{n} + 31.4\hat{e})\mu T$$

la tangente dell'angolo β e` il rapporto $tg\beta = \frac{B_b}{B_{T-or}} = \frac{31.4}{34.5} = 0.911$ e quindi l'angolo:

$\beta = arctg(0.911) = 42.3°$.