Compito del 23 giugno 2014

Ottica geometrica

Un oggetto ed uno schermo sono posti in posizione fissa a distanza *D*. Una lente convergente di focale *f* puo` essere spostata liberamente tra di essi.

a) Trovare le posizioni della lente per cui si forma un'immagine reale sullo schermo.
b) Qual e` la condizione che dev'essere soddisfatta affinche' ci siano soluzioni?
c) Determinare l'ingrandimento per le soluzioni trovate. Qual e` la relazione tra gli ingrandimenti delle diverse soluzioni?
d) Tracciare graficamente le soluzioni trovate (un grafico per soluzione, porre *D*=15 cm, *f*=3 cm).

Soluzione

a) Vale la relazione $o+i=D$, che assieme all'equazione delle lenti $\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$ permette di trovare le possibili soluzioni. Sostituendo ,otteniamo $\frac{D}{o(D-o)}=\frac{1}{f}$, da cui $o^2-Do+Df=0$, le cui due soluzioni sono $o_{1,2}=\frac{1}{2}\left(D\pm\sqrt{D^2-4Df}\right)$.
b) Le soluzioni fisicamente accettabili esistono solo quando il radicando della soluzione non e` negativo, ovvero $D\geq 4f$.
c) Determiniamo preliminarmente la posizione dell'immagine per le due soluzioni trovate:
$$i_{1,2}=D-o_{1,2}=\frac{1}{2}\left(D\mp\sqrt{D^2-4Df}\right)=o_{2,1}$$
L'ingrandimento per le due soluzioni e`
$$G_1=-\frac{i_1}{o_1}=-\frac{D+\sqrt{D^2-4Df}}{D-\sqrt{D^2-4Df}} \qquad G_2=-\frac{i_2}{o_2}=-\frac{D-\sqrt{D^2-4Df}}{D+\sqrt{D^2-4Df}}$$
La relazione tra i due ingrandimenti e` $G_1=\frac{1}{G_2}$.
d) La soluzione grafica richiede la determinazione preliminare delle posizioni della lente (uguali alle distanze oggetto): $o_{1,2}=\frac{1}{2}\left(15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 15\cdot 3}\right)=\begin{pmatrix}4.146\\10.854\end{pmatrix}$

Ottica fisica

Un'onda luminosa piana, bianca, si propaga in aria (mezzo 0) e incide perpendicolarmente su una superficie piana che delimita un mezzo (mezzo 2) di indice di rifrazione n_2. Per diminuire la riflessione all'indietro, sulla superficie viene depositato uno strato di spessore s di un mezzo (mezzo 1) di indice di rifrazione n_1, in modo che l'onda riflessa sull'interfaccia 12 e quella riflessa sull'interfaccia 01 interferiscano piu` o meno distruttivamente (si suppone per semplicita` che le due onde riflesse abbiano la stessa ampiezza).

Detta λ_0 la lunghezza d'onda in aria della generica componente dell'onda bianca, trovare

a) la corrispondente lunghezza d'onda λ_1 nel mezzo 1 e lo sfasamento ϕ tra le due onde riflesse.

Detta λ_d la lunghezza d'onda in aria per cui l'interferenza e` totalmente distruttiva. Trovare

b) la relazione tra s e λ_d. Determinare il minimo valore s_m di s.

Usando i seguenti valori: n_2=1.7, n_1=1.5, λ_d=550 nm, λ'=400 nm, s=s_m, e ricordando che l'intensita` (media nel tempo) dell'onda risultante dalla sovrapposizione si puo` esprimere come $I = I_0 \cos^2 \dfrac{\phi}{2}$, ove I_0 e` un'opportuna costante (che non occorre specificare) e $\phi$ e` lo sfasamento tra le onde riflesse, si calcoli

c) l'intensita` dell'onda riflessa risultante di lunghezza d'onda in aria λ'.

NOTA: si trascurino le riflessioni successive sulle interfacce.

Soluzione

a) Vale la relazione tra le lunghezze d'onda nei due mezzi: $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$. Per lo sfasamento abbiamo $\frac{\phi}{2\pi} = \frac{2s}{\lambda_1}$, ove 2*s* e` la differenza di cammino, dovuta all'andata e ritorno nel mezzo 1 dell'onda riflessa all'interfaccia 12. Lo sfasamento e` quindi: $\phi = 4\pi \frac{s}{\lambda_0} n_1$.

b) La condizione di minimo si ha quando lo sfasamento e` un multiplo dispari di π:
$\phi = 4\pi \frac{s}{\lambda_d} n_1 = (2k+1)\pi$, da cui si ricava $s = (2k+1)\frac{\lambda_d}{4n_1}$. Il valore minimo di *s* per cui si ha interferenza distruttiva si ottiene per *k*=0: $s_m = \frac{\lambda_d}{4n_1}$.

c) L'intensita` dell'onda riflessa risultante alla lunghezza d'onda $\lambda'$ e`

$$I = I_0 \cos^2\left(2\pi \frac{s_m}{\lambda'} n_1\right) = I_0 \cos^2\left(2\pi \frac{s_m}{\lambda_d} n_1 \frac{\lambda_d}{\lambda'}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_d}{\lambda'}\right) =$$

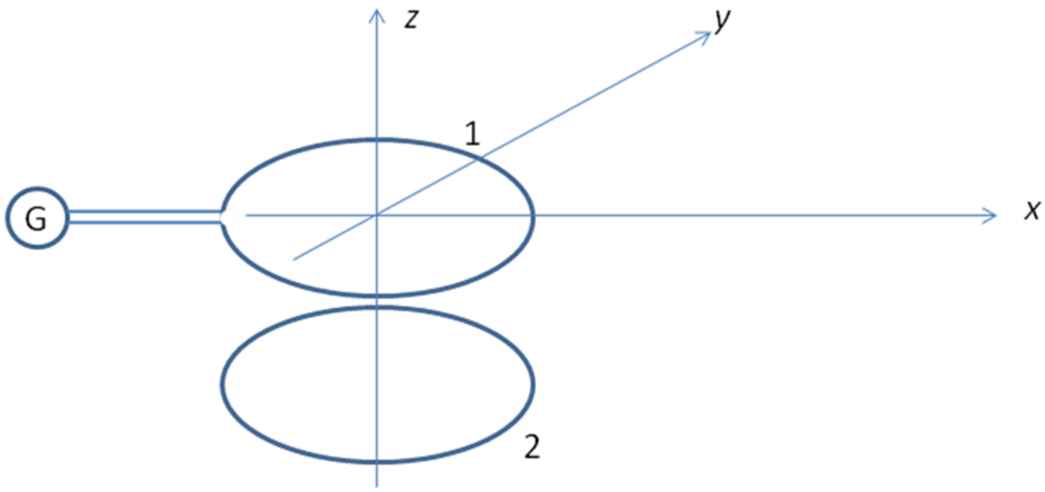
$$= I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{550}{400}\right) = I_0 \cdot 0.309$$

Elettrodinamica

E` dato un circuito serie contenente un'induttanza *L* e una resistenza *R* (non rappresentata nelle figure seguenti). Il circuito giace nel piano *xy* (*z*=0) ed e` percorso da una corrente variabile nel tempo $i = i(t)$ che supporremo nota. Scegliamo il versore ***z*** come verso positivo di circolazione. Si determini

a) l'espressione della *fem* autoindotta ai capi dell'induttanza.

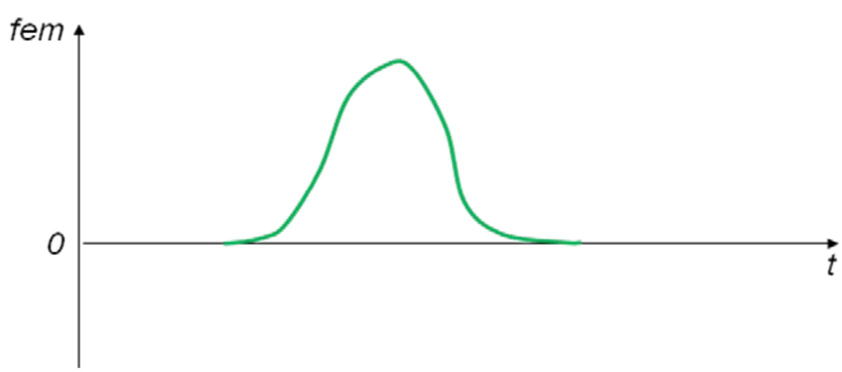
Un secondo circuito piano e` posto parallelamente e sotto (*z*<0) al primo, come in figura



Detto *M* il coefficiente di mutua induzione, determinare

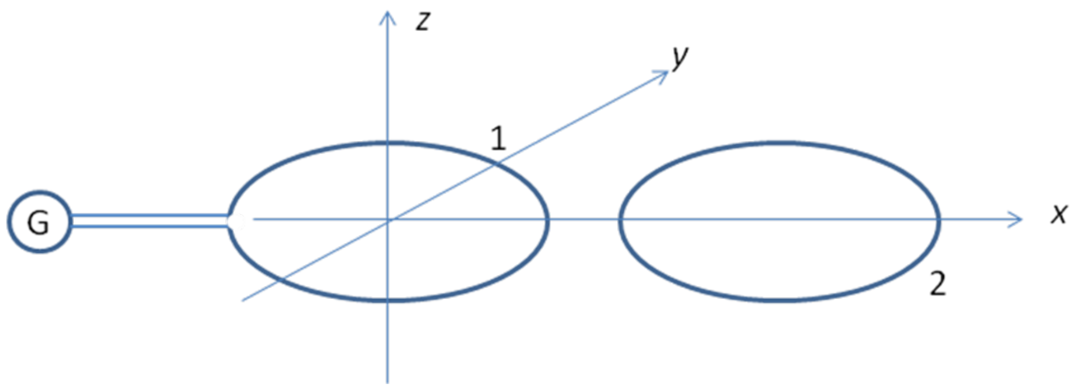
b) la *fem* indotta nel secondo circuito e in particolare specificarne il verso (relativamente al verso della fem autoindotta nel primo circuito).

Supposto che la *fem* ai capi dell'induttanza del primo circuito abbia l'andamento seguente



c) si tracci l'andamento della *fem* nel secondo circuito. *M* e` positivo o negativo? Giustificare la risposta.

Il secondo circuito viene poi spostato sul piano *xy*, accanto al primo, come in figura



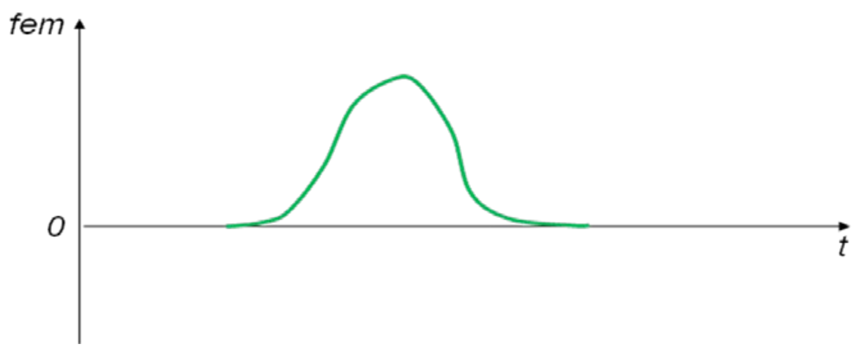
Detto *M'* il nuovo coefficiente di mutua induzione, determinare nuovamente

d) la *fem* indotta nel secondo circuito e in particolare specificarne il verso (relativamente al verso della fem autoindotta nel primo circuito);
e) si tracci l'andamento della *fem* nel secondo circuito. *M'* e` positivo o negativo? Giustificare la risposta.

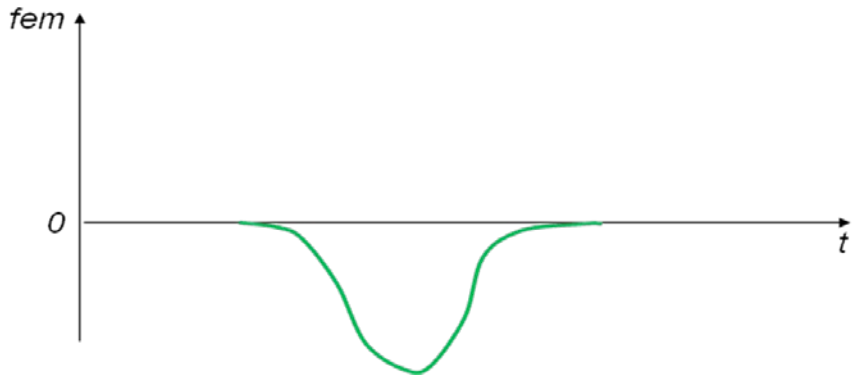
NOTA: si trascuri la retroazione del secondo circuito sul primo.

Soluzione

a) La *fem* autoindotta e` $fem_1 = -L\dfrac{di}{dt}$.
b) La *fem* ora vale $fem_2 = -M\dfrac{di}{dt} = \dfrac{M}{L}\left(-L\dfrac{di}{dt}\right) = \dfrac{M}{L}fem_1$ ed il verso e` lo stesso che nel primo circuito. Il coefficiente *M* dev'essere positivo: $M = L\dfrac{fem_2}{fem_1} > 0$.
c) L'andamento e` il seguente:



d) La *fem* vale $fem_3 = -M'\dfrac{di}{dt} = \dfrac{M'}{L}\left(-L\dfrac{di}{dt}\right) = \dfrac{M'}{L}fem_1$ ed il verso e` opposto rispetto al primo circuito. Il coefficiente *M'* dev'essere negativo: $M' = L\dfrac{fem_3}{fem_1} < 0$.
e) L'andamento e` il seguente:



Questo e` il principio su cui si basa il **trasformatore a inversione di polarita`**.