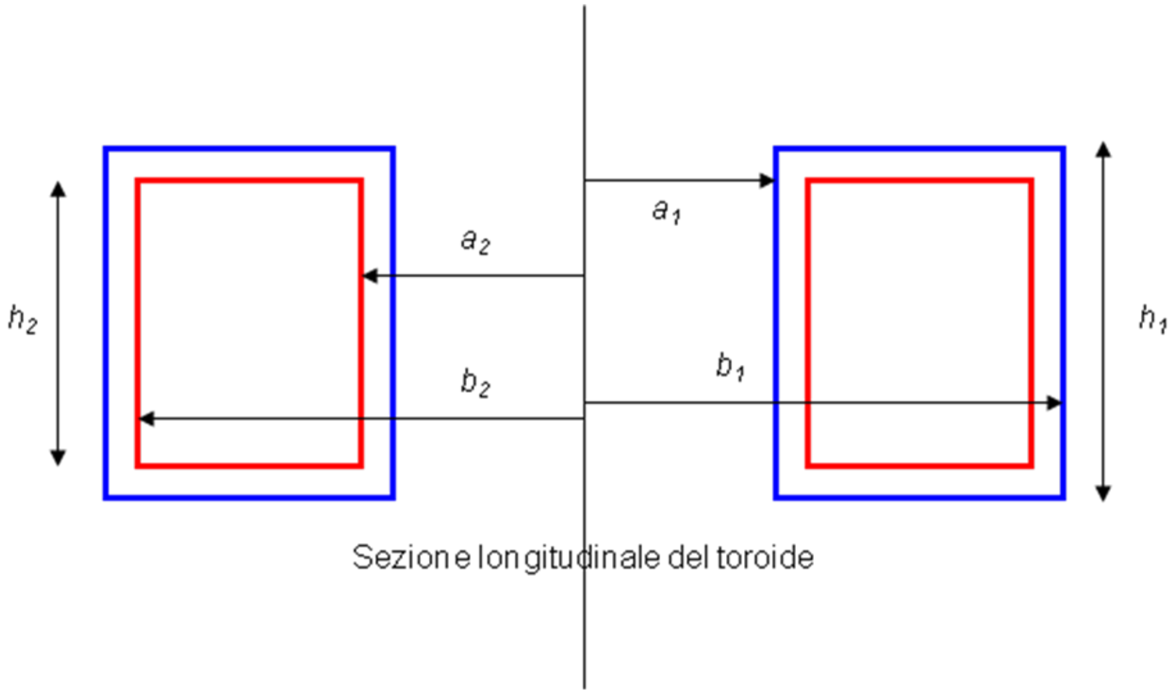
Elettrodinamica

Un toroide a sezione rettangolare porta due avvolgimenti, uno esterno di N_1 spire, altezza h_1, raggio interno a_1, raggio esterno b_1, ed un avvolgimento interno di N_2 spire, altezza h_2, raggio interno a_2, raggio esterno b_2.



Determinare l'espressione di

a) coefficiente di autoinduzione dei due avvolgimenti L_1, L_2;
b) coefficiente di mutua induzione M;
c) verificare che la disuguaglianza $L_1L_2 \geq M^2$ è soddisfatta;
d) a che condizioni potrebbe accadere che $L_1L_2 = M^2$?

Soluzione

a) Troviamo dapprima il flusso del campo magnetico prodotto da un avvolgimento (quando percorso da una corrente i) attraverso una spira dell'avvolgimento stesso:

$$\Phi^{(1)} = \iint_{spira} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} Ni \int_a^b \frac{1}{r} hdr = \frac{\mu_0}{2\pi} Nih \log\frac{b}{a}$$

Il flusso concatenato con tutto l'avvolgimento è $\Phi = N\Phi^{(1)} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 ih \log\frac{b}{a}$ e il coefficiente di autoinduzione è $L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \log\frac{b}{a}$. Quindi avremo

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1{}^2 h_1 \log\frac{b_1}{a_1} \qquad\qquad L_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} N_2{}^2 h_2 \log\frac{b_2}{a_2}$$

b) Troviamo di nuovo il flusso del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento 1 (quando percorso da corrente i_1) attraverso una spira dell'avvolgimento 2:

$$\Phi_{12}^{(1)} = \iint_{spira\,2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 i_1 \int_{a2}^{b2} \frac{1}{r} h_2 dr = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 i_1 h_2 \log\frac{b_2}{a_2}$$

il flusso concatenato con tutto l'avvolgimento 2 è $\Phi_{12} = N_2 \Phi_{12}^{(1)} = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 i_1 h_2 \log \frac{b_2}{a_2}$ e il coefficiente di mutua induzione è $M = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 h_2 \log \frac{b_2}{a_2}$

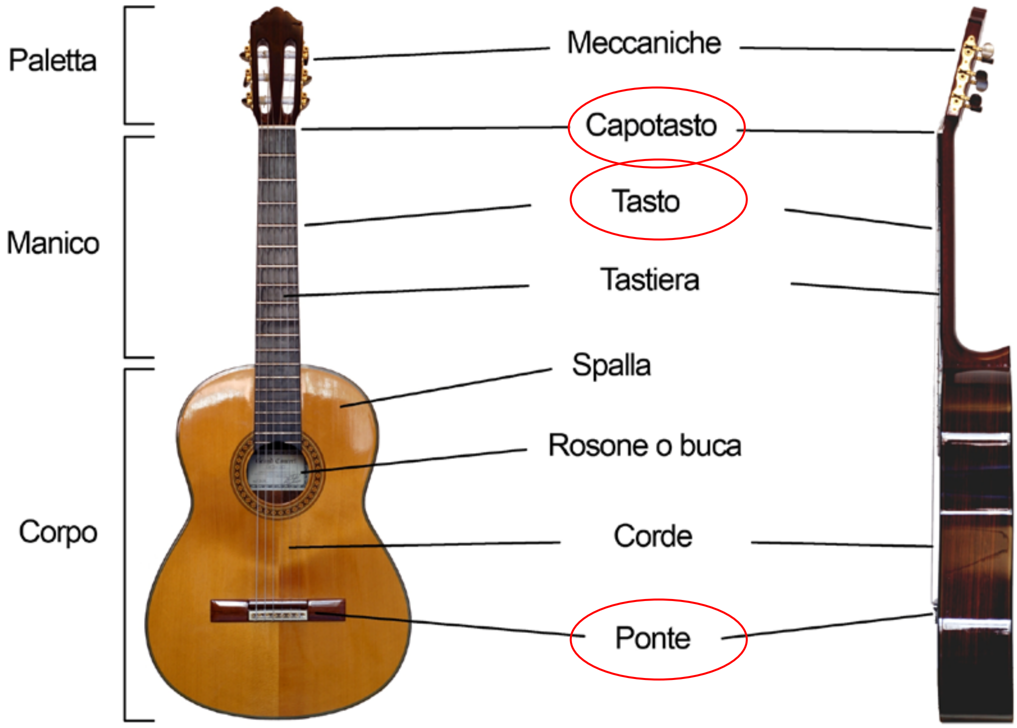
c) Moltiplichiamo i coefficienti di autoinduzione e confrontiamo col quadrato del coefficiente di mutua induzione $L_1 L_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1^{\,2} h_1 \log \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} N_2^{\,2} h_2 \log \frac{b_2}{a_2}$,

$M^2 = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 h_2 \log \frac{b_2}{a_2} \right)^2$. Eliminando i fattori comuni avremo $h_1 \log \frac{b_1}{a_1}$ da un lato e $h_2 \log \frac{b_2}{a_2}$ dall'altro. La prima espressione è sempre maggiore della seconda, come si evince dalla geometria del problema,e quindi, la disuguaglianza è soddisfatta.

d) Accadrebbe quando le dimensioni geometriche fossero uguali.

Onde

La corda del mi basso della chitarra ha una densità lineare di massa μ=5.52x10^{-2} g/cm ed è tesa con una forza T=57.6 N. La lunghezza l della corda compresa tra capotasto e ponte è di 62 cm.



E' noto che la velocità di propagazione di un'onda su una corda è data dalla relazione $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

Determinare

a) la velocità di propagazione dell'onda sulla corda;
b) la lunghezza d'onda λ_0 dell'onda stazionaria fondamentale della corda;
c) la frequenza fondamentale f_0.

La corda in vibrazione produce un'onda in aria che si propaga alla velocità v_a=343.8 m/s e che corrisponde al mi basso. Determinare

d) la lunghezza d'onda λ_a dell'onda prodotta in aria.

Nella scala musicale temperata un intervallo di un semitono corrisponde ad un rapporto di frequenze $\dfrac{f'}{f} = \sqrt[12]{2}$.

Determinare

e) a che distanza dal capotasto dev'essere posto il primo tasto affinché il suono prodotto corrisponda al fa, un semitono più alto del mi.

Soluzione

a) La velocità è $v = \sqrt{\dfrac{57.6N}{5.52 \cdot 10^{-3}\, kg/m}} = 102.2 m/s$.
b) L'onda stazionaria fondamentale ha lunghezza d'onda pari a due volte la lunghezza della corda: $\lambda_0 = 2l = 1.24m$.

c) La frequenza fondamentale è $f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{102.2}{1.24} = 82.4Hz$

d) La lunghezza d'onda dell'onda in aria è

$$\lambda_a = \frac{v_a}{f_0} = \frac{343.8}{82.4} = 4.2m$$

e) Il rapporto fra le frequenze è uguale al rapporto inverso tra le lunghezze d'onda sulla corda e quindi tra le lunghezze della corda corrispondente alle due note, mi e fa:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{l}{l'}$$

quindi $l' = l\frac{f}{f'} = l\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ e la distanza dal capotasto è

$$l - l' = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right) = 0.62 \cdot 0.0561 = 3.5cm.$$

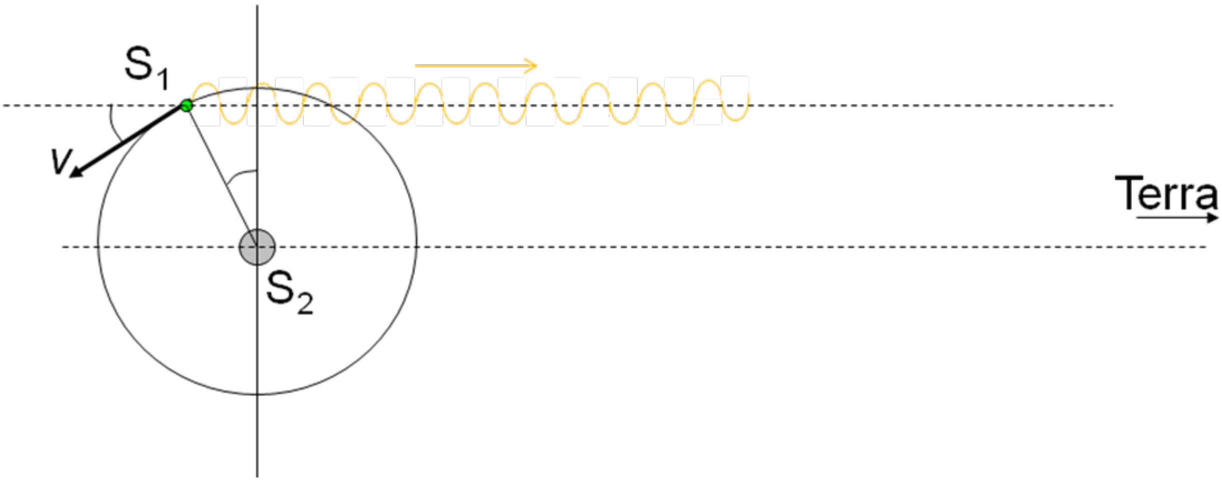
Relatività

Un sistema binario è composto da due stelle S_1 S_2 orbitanti una attorno all'altra. Consideriamo la luce emessa dalla stella S_1 e osservata sulla Terra a grande distanza *d* dal sistema. Una qualunque riga spettrale di frequenza *f* sarà spostata per effetto Doppler dovuto al moto di rivoluzione della stella. Tale effetto dipende dal tempo, poiché la velocità relativa della stella rispetto alla Terra varia continuamente nel tempo. Supposto per semplicità che l'osservatore terrestre giaccia nel piano dell'orbita stellare, che questa sia circolare con velocità *v* uniforme e la velocita` della Terra non cambi, determinare

a) l'espressione della frequenza *f'* misurata sulla Terra, in funzione del tempo;
b) il valore medio, massimo e minimo della frequenza *f'*;

Supposto di aver misurato le frequenze al punto (b), determinare

c) la velocità di rivoluzione della stella;
d) il valore della frequenza *f* nel sistema di riferimento solidale con $S_{1.}$



Soluzione

a) Per come sono stati scelti in figura, gli angoli Doppler θ e orbitale ωt sono uguali. La frequenza rilevata sulla Terra è data da $f' = f\gamma(1-\beta\cos\theta) = f\gamma(1-\beta\cos\omega t)$.
b) Il valor medio è $\langle f' \rangle = \langle f\gamma(1-\beta\cos\omega t)\rangle = f\gamma$, mentre il massimo e il minimo si ottengono, rispettivamente, per $\theta = \pi$ e $\theta = 0$:
$$f'_{\max} = f\gamma(1+\beta),\ f'_{\min} = f\gamma(1-\beta).$$
c) Dal rapporto *R* tra la frequenza massima e minima, abbiamo $R = \dfrac{f'_{\max}}{f'_{\min}} = \dfrac{1+\beta}{1-\beta}$, da cui
$$v = \beta c = \frac{R-1}{R+1}c\,.$$
d) Si risale alla frequenza di emissione della luce, dal suo valor medio (rispetto all'osservatore terrestre) e dalla velocità: $f = \dfrac{\langle f' \rangle}{\gamma} = \langle f' \rangle\sqrt{1-\beta^2} = \langle f' \rangle 2\dfrac{\sqrt{R}}{R+1}$.

Ottica geometrica

Il vetro ‘crown’ ha un indice di rifrazione per il rosso e il violetto pari a, rispettivamente, $n_R = 1.46$, $n_V = 1.47$. Una lente biconvessa, costruita con tale vetro, ha raggi di curvatura $R_1 = 10cm$, $R_2 = -15cm$. Determinare

a) la distanza focale della lente per il rosso f_R e per il violetto f_V.

Un oggetto è posto a distanza *o*=20 cm dalla lente. Determinare, con il metodo algebrico e geometrico,

b) la posizione *i* dell’immagine e l’ingrandimento *G* per il rosso e

c) per il violetto.

(Suggerimento: fare due disegni distinti, uno per il rosso e l’altro per il violetto).

Soluzione

a) Usando la formula dei fabbricanti di lenti, otteniamo:

$$\frac{1}{f_R} = (n_R - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.46 - 1)\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15}\right) = 0.46\frac{1}{6} = 0.07667$$

$$\frac{1}{f_V} = (n_V - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.47 - 1)\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15}\right) = 0.47\frac{1}{6} = 0.07833$$

da cui

$$f_R = 13.04cm,$$

$$f_V = 12.77cm.$$

b) Per l’immagine abbiamo $\frac{1}{i_R} = \frac{1}{f_R} - \frac{1}{o} = 0.07667 - \frac{1}{20} = 0.02667$, da cui

$$i_R = 37.5cm,$$

e l’ingrandimento è $G_R = -\frac{i_R}{o} = -\frac{37.5}{20} = -1.875$

c) Per l’immagine abbiamo $\frac{1}{i_V} = \frac{1}{f_V} - \frac{1}{o} = 0.07833 - \frac{1}{20} = 0.02833$, da cui

$$i_V = 35.3cm,$$

e l’ingrandimento è $G_V = -\frac{i_V}{o} = -\frac{35.3}{20} = -1.765$