Compito del 7 luglio 2014

Ottica geometrica

Un occhio miope può solo mettere a fuoco oggetti a distanza finita o_R (punto remoto dell'occhio). Schematizziamo un occhio miope con una lente convergente di lunghezza focale fissa f (facente le funzioni del cristallino aggiustato al punto remoto) e uno schermo a distanza fissa i dalla lente (facente le funzioni della retina). Vogliamo aggiungere una lente correttiva di focale f_L che permetta la messa a fuoco di un oggetto all'infinito.
Trovare la relazione tra o_R e la distanza focale della lente correttiva.
Suggerimento: si trattino le due lenti come un doppietto addossato.

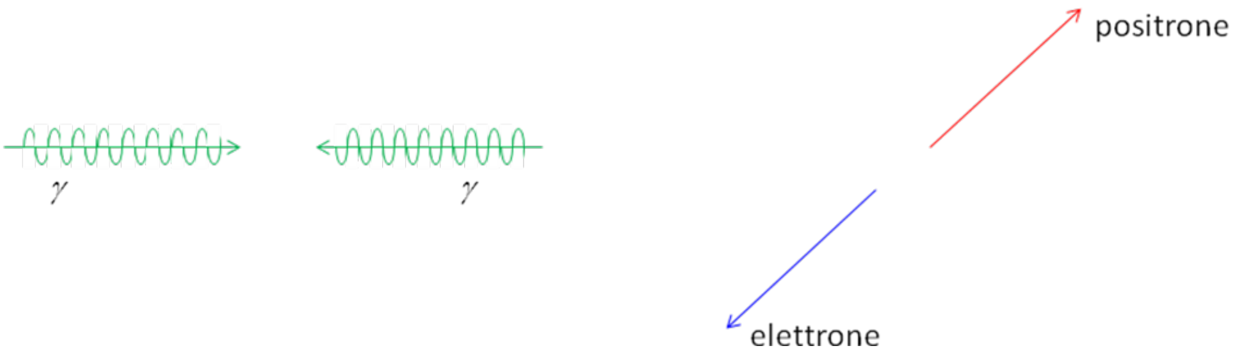
Soluzione

In assenza di lente correttiva abbiamo: $\frac{1}{o_R}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$. Con la lente correttiva la distanza focale del doppietto è $\frac{1}{f_{eq}}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_L}$ e per definizione questa lente permette di mettere a fuoco all'infinito, quindi $\frac{1}{o_\infty}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f_{eq}}$, ove i ha lo stesso valore della prima equazione. Ma $o_\infty=\infty$, quindi $f_{eq}=i$.
Introducendo nella seconda equazione, otteniamo $\frac{1}{f_L}=\frac{1}{f_{eq}}-\frac{1}{f}=\frac{1}{i}-\frac{1}{f}$ e usando la prima equazione $\frac{1}{f_L}=\frac{1}{i}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{o_R}$, da cui $f_L=-o_R$. Abbiamo quindi bisogno di una lente divergente di focale pari alla distanza del punto remoto.

Si puo` vedere la cosa in altro modo: la lente aggiunta deve formare l'immagine del punto all'infinito nel punto R, punto remoto per l'occhio miope.
Poiche' R sta a sinistra della lente aggiunta (ricordiamo che la lente e` posta praticamente a contatto dell'occhio), l'immagine e` virtuale e quindi la lente e` divergente. Per essa vale la legge solita:
$\frac{1}{o_1}+\frac{1}{i_1}=\frac{1}{f_L}$ ove o_1=infinito, i_1=-o_R, quindi $\frac{1}{-o_R}=\frac{1}{f_L}$ da cui $f_L=-o_R$.

Relatività

Due fotoni (raggi gamma) di ugual energia ε e quantità di moto p si urtano frontalmente, annichilano e producono una coppia elettrone-positrone.



a) Scrivere la quantità di moto e l'energia dello stato iniziale;
b) Scrivere la quantità di moto e l'energia dello stato finale;
c) Imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia, determinare la quantità di moto P e l'energia E sia dell'elettrone che del positrone.
d) Qual è la minima energia dei fotoni, affinché la reazione possa avvenire?

NOTA 1: la massa dell'elettrone è uguale a quella del positrone.
NOTA 2: si trascuri l'energia potenziale dovuta all'attrazione elettrostatica tra elettrone e positrone.

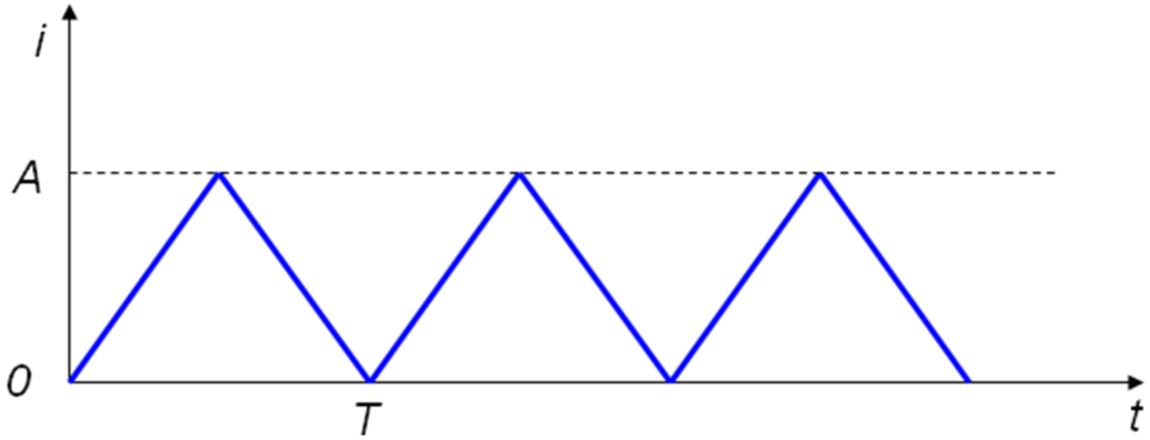
Soluzione

a) Quantità di moto iniziale: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, energia iniziale: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$. Poiché per un fotone $\varepsilon = pc$, dall'uguaglianza delle energie segue che le quantità di moto delle due particelle sono uguali: $p_1 = p_2 = p$. Inoltre il fatto che l'urto sia frontale implica che la quantità di moto iniziale sia nulla: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.
b) Quantità di moto finale: $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$, energia finale: $E_1 + E_2 = \sqrt{P_1^2c^2 + m^2c^4} + \sqrt{P_2^2c^2 + m^2c^4}$.
c) Imponendo la conservazione della qdm otteniamo $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$, da cui segue che la qdm dell'elettrone e del positrone sono uguali in modulo: $P_1 = P_2 = P$, da cui segue che anche le energie delle due particelle sono uguali $E_1 = E_2 = E$. Immettendo questi risultati nell'equazione dell'energia troviamo $E = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4}$. Imponendo la conservazione dell'energia troviamo $\sqrt{P^2c^2 + m^2c^4} = \varepsilon$ e risolvendo per P: $P = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2c^2}$.
d) L'energia dev'essere tale che il radicando sia positivo, quindi $\varepsilon \geq mc^2$. Fisicamente questo significa che l'energia dei fotoni dev'essere almeno sufficiente per produrre le particelle a riposo; tutta l'energia in più si ritrova come energia cinetica delle particelle.

Elettrodinamica

Un circuito è percorso da una corrente *i*. Un secondo circuito, è accoppiato al primo con un coefficiente di mutua induzione *M>0*.

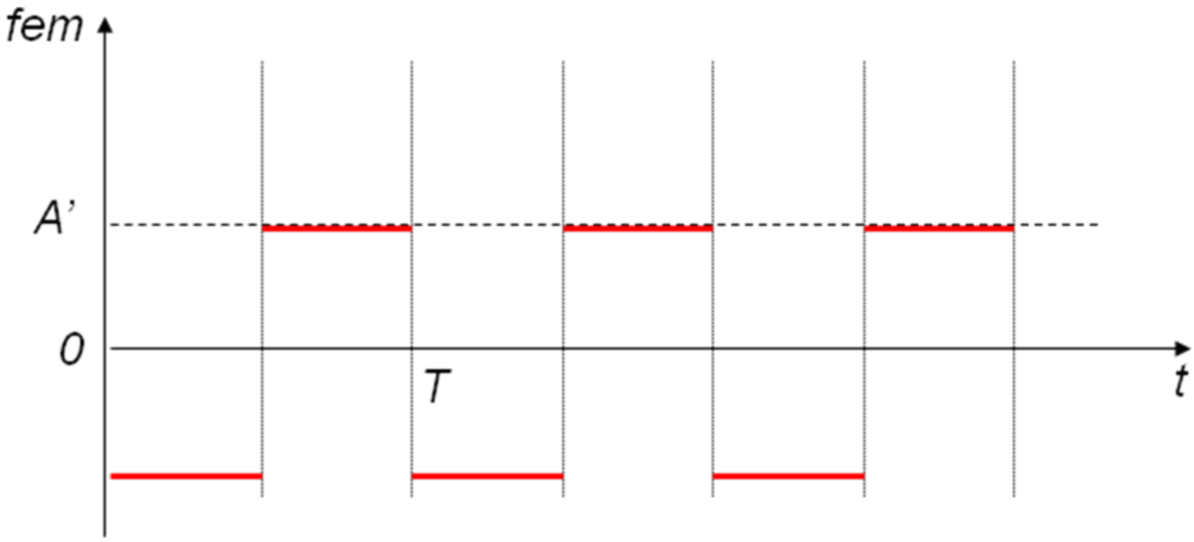
a) Trovare la *fem* indotta nel secondo circuito (in particolare l'ampiezza e il periodo), nel caso in cui *i* sia un'onda triangolare di ampiezza *A* e periodo *T*, come in figura



b) Cosa cambierebbe se fosse *M<0*?

Soluzione

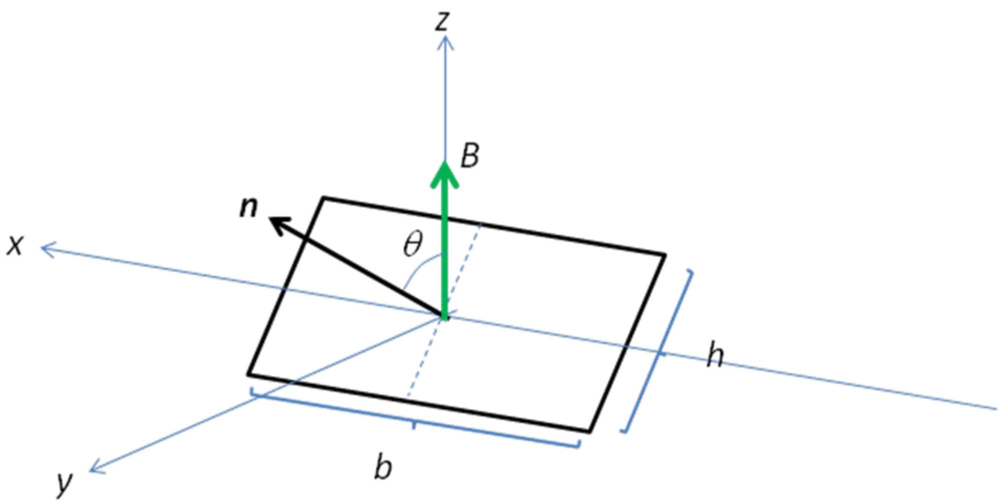
a) La *fem* cercata è data dalla relazione $fem = -M\frac{di}{dt}$, dobbiamo quindi derivare l'onda triangolare. La derivata è un'onda quadra di valor medio nullo, ampiezza $\frac{A}{T/2} = \frac{2A}{T}$ e periodo *T*. La *fem* avrà ampiezza $A' = M\frac{2A}{T}$ e periodo *T*.



b) In tal caso l'onda quadra avrebbe la polarita` inversa.

Elettrodinamica

Una bobina di N spire rettangolari di dimensioni h, b, resistenza totale R e autoinduttanza trascurabile, e\` immersa in un campo magnetico uniforme $B$ diretto lungo l'asse $z$. Alla bobina e\` collegato un generatore di fem E_G (non rappresentata in figura). La bobina e\` libera di ruotare attorno all'asse x. Il versore $\boldsymbol{n}$ rappresenta la normale alla superficie piana della bobina.



Si determini:

a) la corrente I dovuta al generatore;
b) la forza F dovuta all'interazione tra questa corrente e il campo magnetico esterno;
c) il momento meccanico τ di tale forza;

Tale momento mette in rotazione la bobina. Trovare inoltre:

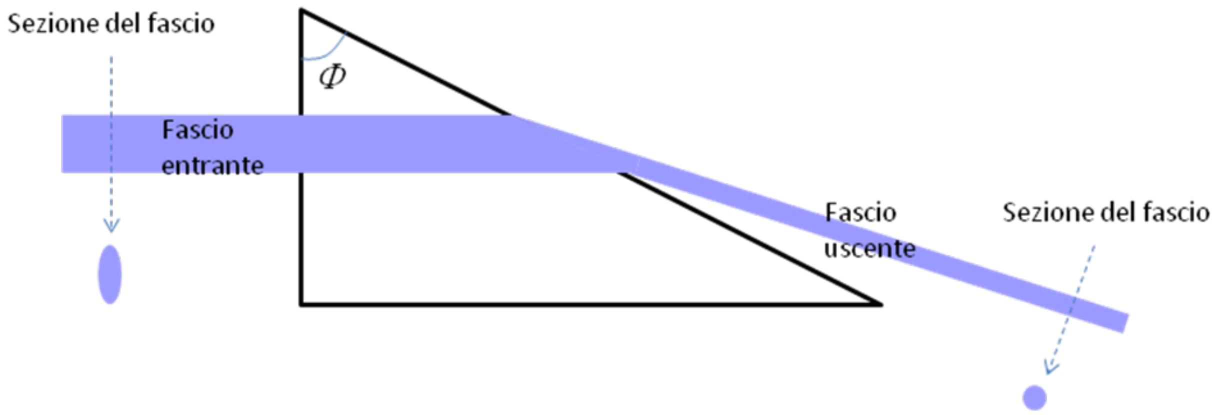
d) la fem E_i dovuta al moto della bobina nel campo magnetico esterno;
e) il verso di questa fem relativamente a E_G.

Soluzione

a) La corrente e\`: $I = \dfrac{E_G}{R}$;
b) le forze sui due lati $\boldsymbol{h}$ si annullano, quelle sui lati $\boldsymbol{b}$ hanno modulo $F = IbB$ e formano una coppia;
c) il momento e\` diretto lungo x e ha modulo
$$\tau = NhF\sin\theta = NIhbB\sin\theta = NIAB\sin\theta;$$
d) la fem si trova derivando il flusso del campo magnetico:
$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(NAB\cos\theta\right) = NAB\omega\sin\theta;$$
e) assume il valore opposto.

Ottica geometrica

Una sorgente laser emette un fascio di luce monocromatica a sezione ellittica di semiasse maggiore *a* e semiasse minore *b*. Volendo rendere il fascio a sezione circolare, lo si fa passare attraverso un prisma rettangolo di indice di rifrazione *n*, come schematizzato in figura:

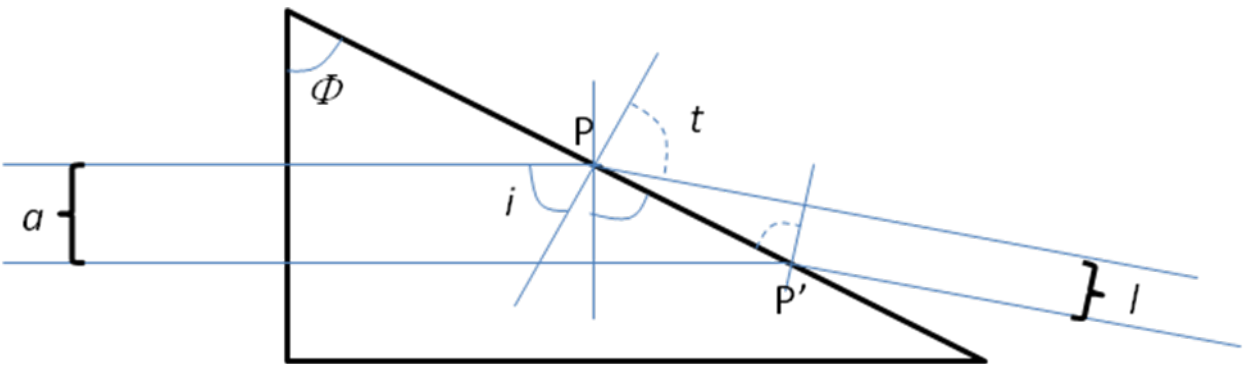


Usando i seguenti valori: n=1.5, $r=b/a$=0.25,

a) trovare il valore dell'angolo Φ del prisma affinche' il semiasse *a* si riduca al semiasse *b*.
b) Verificare che Φ e`minore dell'angolo critico (o di riflessione totale).

Soluzione

a) Siano *a* e *l* le dimensioni del fascio rispettivamente entrante e uscente. Premettiamo che la dimensione dei fasci perpendicolare alla sezione rappresentata in figura non e` influenzata dal prisma.



Valgono le seguenti relazioni: $a = PP'\cos i$, $l = PP'\cos t$. Dobbiamo scegliere l'angolo Φ in modo che $l=b$. Notiamo innanzi tutto che $\Phi = i$. Eliminando PP' dalle due eqq., abbiamo $\frac{b}{a} = \frac{\cos t}{\cos i}$ e introducendo la legge di Snell in P, $n \sin i = \sin t$ otteniamo:

$$r = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 - n^2 \sin^2 i}{1 - \sin^2 i}}.$$

Risolvendo per $\sin i = \sin\Phi$, abbiamo: $\sin\Phi = \sqrt{\frac{1-r^2}{n^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{1-0.25^2}{1.5^2 - 0.25^2}} = 0.655$, da cui

$$\Phi = 40.9°.$$

b) L’angolo critico e` dato dalla relazione $n \sin i_c = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, cioe`

$$i_c = \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin \frac{1}{1.5} = 41.8°$$, quindi effettivamente $\Phi < i_c$.