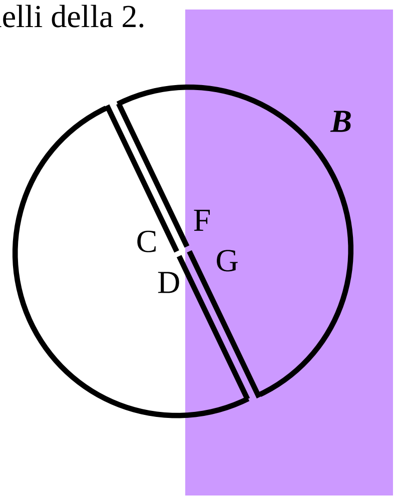
Soluzione del compito di fisica 2 del 15 giugno 2015

Elettrodinamica

Due spire semicircolari di raggio *R*, CD e FG sono poste su un piano orizzontale, affacciate lungo il diametro. L'insieme ruota in senso antiorario con velocità angolare ω attorno ad un asse verticale passante per il centro del sistema e parallelo al campo magnetico uniforme presente nel semipazio destro (e nullo altrove). Siano C, D gli estremi della spira 1 e F, G quelli della 2.



Trovare

a) le fem E_1, E_2 indotte nelle due spire;

b) si colleghino gli estremi F e D e si determini la fem risultante lungo la spira risultante GFDC;

c) si colleghino gli estremi F e C e si determini la fem risultante lungo la spira risultante GFCD.

Soluzione

a) Scelto come positivo il verso di percorrenza antiorario, la variazione di flusso per le due spire è $d\Phi_1 = BdA_1 = \frac{1}{2}BR^2 d\phi \qquad d\Phi_2 = BdA_2 = -\frac{1}{2}BR^2 d\phi$

Ove $d\phi$ è la variazione dell'angolo del settore circolare immerso nel campo *B*. Le fem sono quindi $E_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{2}BR^2\omega \qquad E_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\omega$

ove il segno indica il verso di percorrenza: negativo per E_1 e positivo per E_2.

b) Le spire sono poste in serie e il collegamento aumenta la fem totale

$$E_{tot} = BR^2\omega$$

c) Le spire sono poste in serie ma il collegamento ora annulla la fem totale

$$E_{tot} = 0$$

Relatività

Un aereo si muove con velocità V=1000 km/h rispetto al suolo lungo una rotta che segue il parallelo di latitudine λ=45°. Si supponga per semplicità che la Terra non ruoti e si trascurino gli effetti gravitazionali sul ritmo degli orologi, di modo che la Terra si possa considerare un sistema inerziale. Trovare

a) il tempo impiegato dall'aereo a fare il giro del mondo lungo la rotta, misurato da un orologio solidale con la Terra;
b) il ritmo dell'orologio solidale con l'aereo rispetto a quello di Terra (vedi nota);
c) il ritardo di tempo dell'orologio solidale con l'aereo rispetto a quello di Terra alla fine del giro del mondo.

Nota: l'orologio sull'aereo, rispetto a quello sulla Terra, assume lo stesso ritmo di un orologio solidale con un sistema inerziale in moto con velocità V (uguale a quella dell'aereo) rispetto alla Terra.

Nota: i calcoli dei punti (b) e (c) vanno approssimati al primo ordine in $\left(\frac{v}{c}\right)^2$.

Dato: raggio terrestre, R=6371 km.

Soluzione

a) Detta L la lunghezza della rotta (uguale a quella del parallelo), il tempo impiegato è dato da

$$T = \frac{L}{v} = \frac{2\pi R\cos\lambda}{v} = 1.02\times 10^5\, s$$

b) Il ritmo τ' dell'orologio sull'aereo è rallentato rispetto a quello τ a terra del fattore

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-4.29\times 10^{-13}$$

c) Detto T' il tempo segnato dall'orologio sull'aereo e T quello dell'orologio a terra, abbiamo che $T' = \frac{\tau'}{\tau}T$. Il ritardo del primo orologio sul secondo alla fine del giro completo è

$$T'-T = \frac{\tau'}{\tau}T - T \approx T\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right] = T\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = -43.7ns$$

Onde

Una corda di lunghezza L è sollecitata ad un capo ($x=0$) con una oscillazione trasversale armonica la cui legge è $y(t) = 2\cos\omega t$, mentre il secondo capo è mantenuto fisso. L'onda progressiva $F_p(x,t)$ si propaga con velocità v, supposta nota, fino al secondo capo, dove si riflette all'indietro come onda regressiva $F_r(x,t)$. Supposto che l'ampiezza dell'onda regressiva sia uguale a quella dell'onda progressiva, scrivere

a) l'espressione dell'onda progressiva e regressiva;
b) l'espressione dell'onda risultante $F_{tot}(x,t)$; imporre la condizione al contorno in $x=0$ per trovare l'ampiezza dell'onda;
c) imporre la condizione al contorno in $x=L$ affinché l'onda risultante sia stazionaria e trovare le possibili lunghezze d'onda;
d) trovare la frequenza fondamentale e le prime due armoniche.

Soluzione

a) Le due onde si possono esprimere come

$$F_p(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad\qquad F_r(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

b) L'onda risultante è

$$F_{tot}(x,t) = F_p + F_r = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\cos kx \cos\omega t$$

Imponendo la condizione al contorno in $x=0$, $F_{tot}(0,t) = 2A\cos\omega t \equiv 2\cos\omega t$, si ricava l'ampiezza dell'onda: $A=1$.

c) Imponendo la condizione al contorno in $x=L$, $F_{tot}(L,t) = 2\cos kL \cos\omega t \equiv 0$, che impone l'annullamento di $\cos kL$. Questo avviene quando $kL = \frac{\pi}{2} + m\pi$, da cui si ricava la lunghezza d'onda delle possibili soluzioni stazionarie: $\lambda_m = \frac{4}{2m+1}L$.

d) Le frequenze associate sono $f_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{2m+1}{4L}v$. La frequenza fondamentale è $f_o = \frac{1}{4}\frac{v}{L}$ e le prime due armoniche sono $f_1 = \frac{3}{4}\frac{v}{L}$, $f_2 = \frac{5}{4}\frac{v}{L}$.