Soluzione del compito di fisica 2 del 15 settembre 2015

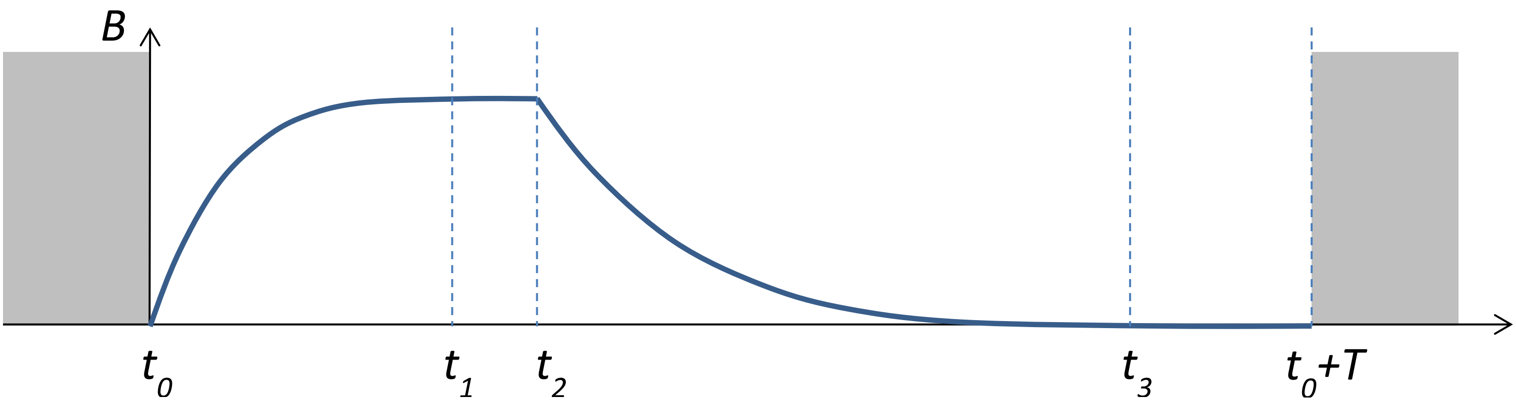
Elettrodinamica

In una regione di spazio S, un circuito opportuno genera un campo magnetico *B* uniforme ma variabile periodicamente nel tempo, con periodo *T*, secondo la funzione (esplicitata in un periodo):

$$B(t)=\begin{cases} B_0\left(1-\exp\left(-\dfrac{t-t_0}{\tau_1}\right)\right) \ldots\ldots\ldots t_0\le t\le t_1 \\ B_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_1\le t\le t_2 \\ B_0\exp\left(-\dfrac{t-t_2}{\tau_2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots t_2\le t\le t_3 \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_3\le t\le t_0+T \end{cases}$$

Con $t_1-t_0=8\tau_1$, $t_3-t_2=8\tau_2$ e $\tau_2=2\tau_1$.

Nota: la seconda e la quarta riga della formula esprimono il fatto che, all'interno di un periodo, per $t>t_1$ e $t>t_3$, la prima e rispettivamente la seconda funzione esponenziale sono nulle con buona approssimazione.



Un secondo circuito, C, costituito da un pacchetto di *N* spire piane di area *A*, è posto in S, perpendicolarmente alle linee di campo *B*. Trovare in funzione del tempo, nell'intervallo $[t_0, t_0+T]$:

a) Il flusso di *B* attraverso C;
b) La fem *E* indotta in C dalla variazione di *B*;
c) Il valore massimo e minimo della fem.

Disegnare

d) il grafico della fem nell'intervallo di tempo $[t_0-T, t_0+2T]$.

Soluzione

a) Il flusso è dato da

$$\Phi(t)=NAB(t)=NAB_0\begin{cases} 1-\exp\left(-\dfrac{t-t_0}{\tau_1}\right)\ldots\ldots\ldots t_0\le t\le t_1 \\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_1\le t\le t_2 \\ \exp\left(-\dfrac{t-t_2}{\tau_2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots t_2\le t\le t_3 \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_3\le t\le t_0+T \end{cases}$$

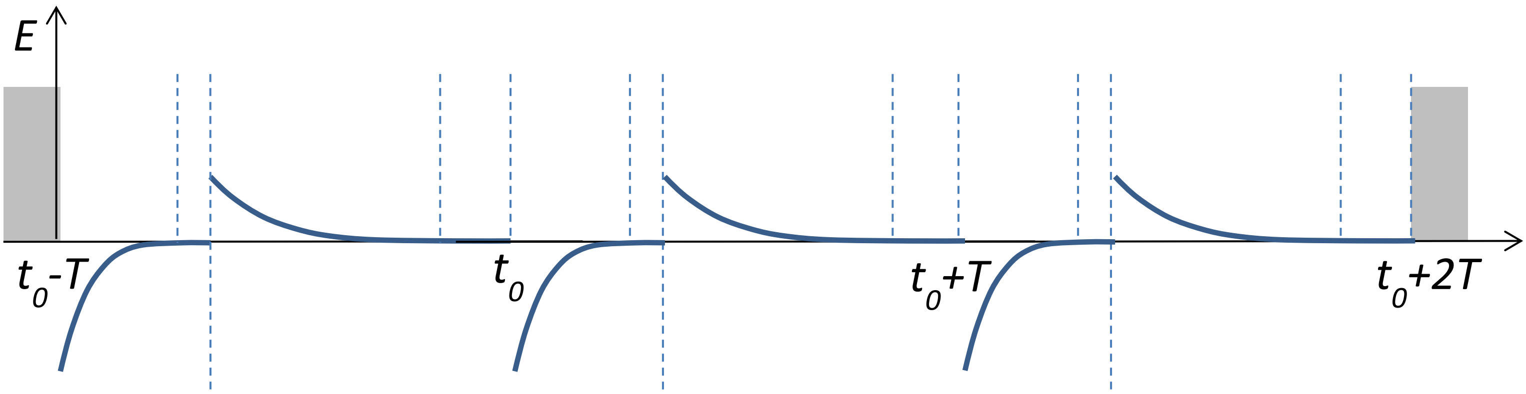
b) La fem è

$$E(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = NAB_0 \begin{cases} -\frac{1}{\tau_1}\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots t_0 \le t \le t_1 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_1 \le t \le t_2 \\ \frac{1}{\tau_2}\exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots t_2 \le t \le t_3 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_3 \le t \le t_0 + T \end{cases}$$

c) I valori massimo e minimo della fem sono

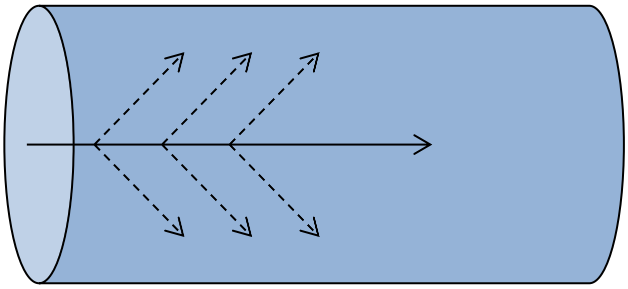
$$E_{\min} = E(t_0) = -\frac{NAB_0}{\tau_1} \qquad E_{\max} = E(t_2) = \frac{NAB_0}{\tau_2}$$

d) Il grafico è



Ottica

Un elettrone di energia E=700 keV incide su un dielettrico di indice di rifrazione n=1.8 immerso in aria. Il materiale ha forma di cilindro e l'elettrone incide al centro della base di sinistra, con direzione lungo l'asse.



Si può dimostrare che tra la velocità dell'elettrone, la sua massa e la sua energia sussiste la relazione

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$$

Entro il dielettrico l'elettrone emette radiazione Cherenkov. Detto χ l'angolo di emissione Cherenkov, cioè l'angolo tra la direzione di moto dell'elettrone e quella del fotone,

a) trovare il valore numerico dell'angolo di riflessione totale;
b) trovare il valore numerico di β e dell'angolo di emissione Cherenkov;
c) verificare se la radiazione emessa esce oppure no dalla superficie laterale, calcolando gli opportuni angoli;
d) verificare se esce dalla base di destra, sempre calcolando gli opportuni angoli.
e) Ripetere i punti (b), (c), (d) per un'energia E=650 keV.

Note: l'energia a riposo dell'elettrone è 511 keV.
Sfruttare la simmetria azimutale del sistema.

Soluzione

a) L'angolo critico è $\sin\theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.8} = 0.556$ ovvero $\theta_c = 33.7°$.

b) β vale: $\beta = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{511}{700}\right)^2} = 0.683$. L'angolo di emissione è

$$\cos\chi = \frac{1}{\beta n} = \frac{1}{0.683 \cdot 1.8} = 0.813 \quad \text{ovvero} \quad \chi = 35.6°$$

c) L'angolo di incidenza sulla supeficie laterale è $i = \frac{\pi}{2} - \chi = 54.5° > 33.7° = \theta_c$ e quindi il raggio è riflesso totalmente dentro il cristallo.

d) L'angolo di incidenza è ora $i = \chi = 35.6° > 33.7° = \theta_c$ e di nuovo il raggio è riflesso totalmente dentro il cristallo.

e) In questo caso $\beta = 0.618$; $\chi = 26.0°$; $i = 64.0° > 33.7° = \theta_c$ e il raggio è riflesso totalmente sulla superficie laterale; $i = 26.0° < 33.7° = \theta_c$ e il raggio esce dalla base di destra.