Soluzione del compito di fisica 2 del 16 febbraio 2015

Elettrodinamica

Un generatore di fem E è collegato ad una bobina di resistenza R e autoinduttanza L.
Nel caso la fem sia continua $E=E_0$

a) trovare la corrente circolante, ipotizzando che quando il circuito viene chiuso la corrente sia inizialmente nulla.
b) Esprimere il flusso, la fem e la corrente autoindotti come funzione del tempo.

Nel caso in cui la fem sia alternata $E=E_0 \sin\omega t$,

c) trovare la corrente.
d) Esprimere il flusso, la fem e la corrente autoindotti come funzione del tempo.

Soluzione

a) scriviamo la legge di Kirchhoff per il circuito $E_G + E_L + V_R = 0$

$$E_0 - L\frac{di}{dt} - Ri = 0 \qquad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}$$

da cui $i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\right)$

b) Il flusso autoindotto è $\Phi = Li(t) = L\frac{E_0}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\right)$, la fem autoindotta

$$E_L = -L\frac{di(t)}{dt} = -L\frac{E_0}{R}\frac{d}{dt}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\right) = -L\frac{E_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\frac{R}{L} = -E_0\exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)$$

e la corrente autoindotta

$$i_{ai} = \frac{E_L}{R} = -\frac{E_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)$$

c) La legge di Kirchhoff è ora $E_G + E_L = 0$

$$E_0\sin\omega t - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \frac{di}{dt} = \frac{E_0}{L}\sin\omega t$$

La soluzione generale è $i = Ae^{-t/\tau} + i_0\sin(\omega t + \phi)$ ove A si determina tramite le condizioni iniziali e i_0 e ϕ sono dati da

$$tg\phi = -\frac{\omega L}{R} \qquad i_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e quindi $i = Ae^{-t/\tau} + \frac{E_0}{Z}\sin(\omega t + \phi)$

d) Il flusso è $\Phi = Li(t) = LAe^{-t/\tau} + L\frac{E_0}{Z}\sin(\omega t + \phi)$ e la fem autoindotta

$$E_L = -L\frac{di(t)}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(Ae^{-t/\tau} + \frac{E_0}{Z}\sin(\omega t + \phi)\right) = -L\left(-\frac{R}{L}\right)Ae^{-t/\tau} - L\frac{E_0}{Z}\omega\cos(\omega t + \phi)$$

La corrente autoindotta è

$$i_{ai} = \frac{E_L}{R} = Ae^{-t/\tau} - \frac{E_0}{Z}\frac{\omega L}{R}\cos(\omega t + \phi)$$

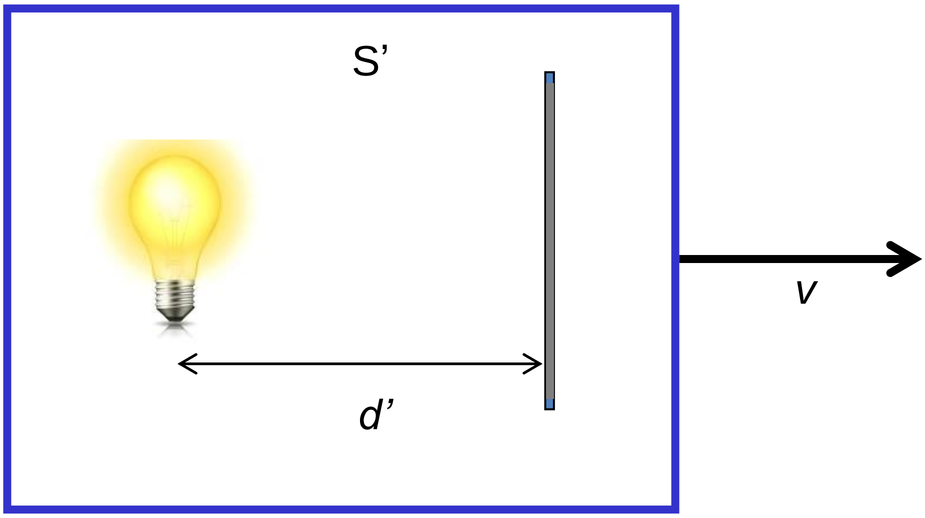
Introducendo la corrente del generatore $i_G = \frac{E_0}{R}\sin\omega t$ si verifica facilmente che $i = i_{ai} + i_G$, infatti

$$Ae^{-t/\tau} + \frac{E_0}{Z}\sin(\omega t + \phi) = Ae^{-t/\tau} - \frac{E_0}{Z}\frac{\omega L}{R}\cos(\omega t + \phi) + \frac{E_0}{R}\sin\omega t$$

(ricordare che $\sin\phi = -\frac{\omega L}{Z}$ e $\cos\phi = \frac{R}{Z}$).

Relatività

Su un’astronave S’ in moto rispetto al sistema S con velocità $v=\beta c=0.9999c$ si trova una sorgente di luce a distanza $d'=50\ cm$ da uno specchio.



La sorgente emette un impulso luminoso, trovare (in S’)

a) il tempo necessario affinché la luce arrivi allo specchio e torni alla sorgente.

Nel sistema S trovare:

b) la distanza tra la sorgente e lo specchio;
c) il tempo di andata dalla sorgente allo specchio;
d) il tempo di ritorno.

Stabilire se

e) il tempo di andata-ritorno corrisponde al tempo trovato nel sistema S’.

Soluzione

a) Il tempo di andata e ritorno in S’ è $t_{AR}'=\dfrac{2d'}{c}=\dfrac{2\cdot 0.5}{3\times 10^8}=3.33ns$

b) Determiniamo γ preliminarmente: $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-0.9999^2}}=70.7$;

la distanza in S è $d=\dfrac{d'}{\gamma}=\dfrac{0.5}{70.7}=7.07\times 10^{-3}m$

c) Il tempo di andata in S è $t_A=\dfrac{d}{c-v}=\dfrac{d}{c(1-\beta)}=\dfrac{7.07\times 10^{-3}}{3\times 10^8\cdot 0.0001}=236ns$

d) Il tempo di ritorno in S è $t_R=\dfrac{d}{c+v}=\dfrac{d}{c(1+\beta)}=\dfrac{7.07\times 10^{-3}}{3\times 10^8\cdot 1.9999}=0.012ns$

e) Il tempo totale in S è $t_{AR}=t_A+t_R=236ns+0.012ns=236ns$. C’è corrispondenza in quanto vale la relazione

$$t_{AR}=\gamma t_{AR}'=70.7\cdot 3.33=236ns$$

Alternativamente si può usare la legge di trasformazione inversa del tempo: .

Per andare dalla sorgente (1) allo specchio (2):

$$t_A=t_2-t_1=\gamma(t_2'-t_1')+\gamma\frac{\beta}{c}(x_2'-x_1')=\gamma\frac{d'}{c}+\gamma\frac{\beta}{c}d'=\gamma\frac{d'}{c}(1+\beta)$$

Per tornare dallo specchio (2) alla sorgente (3):

$$t_R = t_3 - t_2 = \gamma(t_3' - t_2') + \gamma \frac{\beta}{c}(x_3' - x_2') = \gamma \frac{d'}{c} - \gamma \frac{\beta}{c} d' = \gamma \frac{d'}{c}(1-\beta)$$

Per la trasformazione inversa dello spazio $d' = \gamma d$

che sostituita nelle due equazioni precedenti dà

$$t_A = \gamma \frac{d'}{c}(1+\beta) = \gamma^2 \frac{d}{c}(1+\beta) = \frac{d}{c(1-\beta)}$$

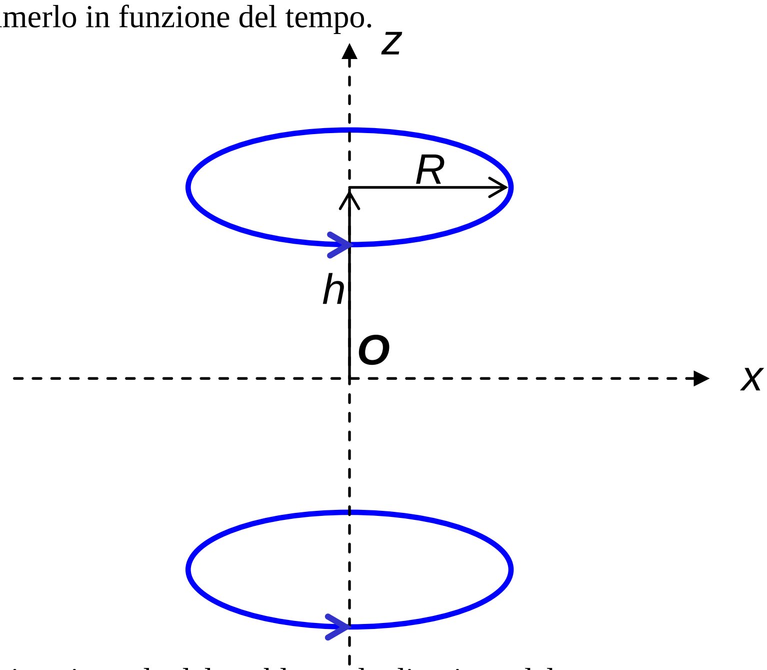
$$t_R = \gamma \frac{d'}{c}(1-\beta) = \gamma^2 \frac{d}{c}(1-\beta) = \frac{d}{c(1+\beta)}$$

Magnetismo

Due spire circolari uguali di raggio R e autoinduttanza trascurabile, hanno asse coincidente con l'asse z, e sono percorse da correnti uguali ed equiverse $i = i_0 \sin\omega t$.

Le spire sono disposte simmetricamente rispetto all'origine O delle coordinate, a distanza h da questa.

a) Calcolare il campo magnetico in O ed esprimerlo in funzione del tempo.



Soluzione

a) Per la regola della mano destra e la simmetria azimutale del problema, la direzione del campo è lungo z, verso positivo. Usando la prima formula di Laplace, calcoliamo il modulo del campo a distanza h dal centro di una spira

$$dB_z = \left|d\vec{B}\right|\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dlr}{r^3}\frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} dl$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} 2\pi R =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}$$

Il campo totale è la somma dei contributi delle due spire e quindi due volte tanto

$$B = \mu_0 i \frac{R^2}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \mu_0 \frac{R^2}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} i_0 \sin\omega t$$

Fisica dei quanti

Un fascio di elettroni di quantità di moto *p=30 keV/c* incide su un cristallo. Ricordando la relazione di de Broglie e la legge di Bragg, trovare

a) gli angoli per cui i piani interatomici che distano fra loro *d=140 pm* danno un massimo di diffrazione

Nota: usare il valore di *h* espresso in termini di eV: *h*=4.14 x 10^{-15} eVs; ricordare inoltre che 1 keV/c significa $\frac{1keV}{3\times10^{8}\, m/s}$

Soluzione

a) la relazione di Bragg è

$$\sin\theta_n = n\frac{h}{2dp} = n\frac{4.14\times10^{-15}\, eVs\cdot 3\times10^{-8}\, m/s}{2\cdot 1.4\times10^{-10}\, m\cdot 30\, keV} = n\cdot 0.15$$

affinché il seno sia minore di 1, occorre che *n*<7, quindi gli angoli possibili sono

$$\sin\theta_1 = 1\cdot 0.15 = 0.15 \qquad \theta_1 = 8.63^\circ$$
$$\sin\theta_2 = 2\cdot 0.15 = 0.30 \qquad \theta_2 = 17.46^\circ$$
$$\sin\theta_3 = 3\cdot 0.15 = 0.45 \qquad \theta_3 = 26.74^\circ$$
$$\sin\theta_4 = 4\cdot 0.15 = 0.60 \qquad \theta_4 = 36.87^\circ$$
$$\sin\theta_5 = 5\cdot 0.15 = 0.75 \qquad \theta_5 = 48.59^\circ$$
$$\sin\theta_6 = 6\cdot 0.15 = 0.90 \qquad \theta_6 = 64.16^\circ$$