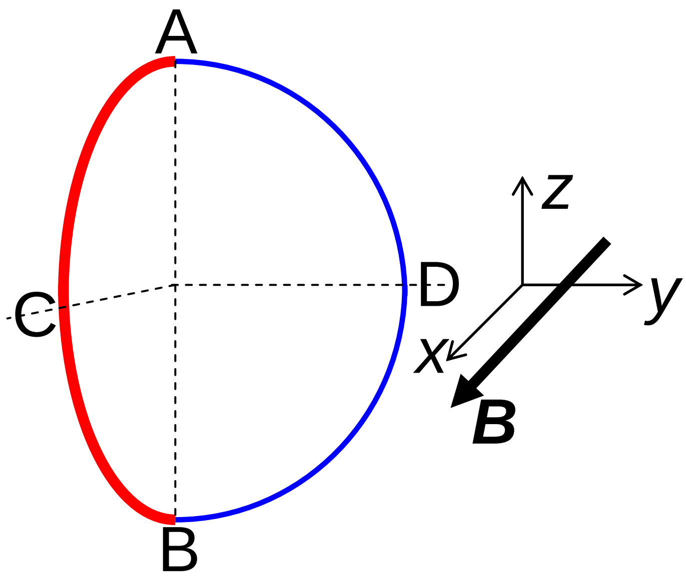
Soluzione del compito di fisica 2 del 29 giugno 2015

Elettrodinamica

Una spira è composta da due semicirconferenze ACB e ADB di raggio *R*, giacenti su piani verticali. Si scelga BDAC come verso positivo di orientazione della spira. La spira è immersa in un campo magnetico *B* uniforme e statico, parallelo alla direzione *x* positiva.
All'istante di tempo iniziale l'angolo tra i due piani è nullo. L'arco ADB rimane fermo mentre l'arco ACB ruota in verso antiorario attorno al diametro comune (verticale) AB con velocità angolare $\vec{\omega}=\omega\hat{k}$. Trovare, all'istante di tempo generico *t* :



a) il flusso del campo B concatenato con la spira;
b) la fem *E* indotta nella spira.
c) Trovare la fem indotta nella spira nel caso in cui anche l'arco ADB ruoti con velocità angolare $\vec{\omega}=-\omega\hat{k}$.

Soluzione

a) Scegliamo come superficie su cui calcolare il flusso i due semicerchi ACB e ADB. Il flusso è allora $\Phi=\Phi_{ACB}+\Phi_{ADB}$. Dette A_1, A_2 le aree dei semicerchi e detto θ l'angolo compreso tra il versore associato al semicerchio ACB e il campo magnetico in un istante arbitrario di tempo, il flusso è dato da $\Phi=A_1 B\cos\theta+A_2 B=A_1 B\cos\omega t+A_2 B$
b) Poiché l'arco ADB rimane fermo, il flusso relativo non cambia nel tempo e quindi non contribuisce alla fem della spira. La fem è $E=-\frac{d\Phi}{dt}=\omega A_1 B\sin\omega t$
c) In questo caso anche l'arco ADB contribuisce e la fem è
$$E=\omega A_1 B\sin\omega t+(-\omega)A_2 B\sin(-\omega t)=\omega A_1 B\sin\omega t+\omega A_2 B\sin\omega t=\omega(A_1+A_2)B\sin\omega t$$

Relatività

L'intensità della radiazione elettromagnetica emessa dal Sole che giunge sulla Terra è $K = 1.361 kW/m^2$. Nota la distanza della Terra dal Sole $d = 1.496 \times 10^{11} m$,

a) calcolare la potenza *P* emessa dal Sole.
b) calcolare la variazione della massa solare nell'unità di tempo *dM/dt*.

Nel Sole la reazione nucleare che genera energia è la fusione di 4 protoni in un nucleo di elio-4 $4p + 2e^- \rightarrow {}^4He + 6\gamma + 2\nu$. La differenza di massa tra i 4 protoni, i due elettroni e l'elio si trasforma in energia disponibile per i raggi gamma e i neutrini (si trascurino le energie cinetiche di protoni, elettroni e elio). Note le masse del protone $m(p) = 1.6726 \times 10^{-27} kg$, dell'elettrone $m(e^-) = 9.109 \times 10^{-31} kg$ e dell'elio-4 $m({}^4He) = 6.6463 \times 10^{-27} kg$,

c) calcolare tale energia, esprimendola in elettronvolt.

Usando il risultato del punto (b),

d) calcolare il numero di reazioni di fusione nell'unità di tempo.

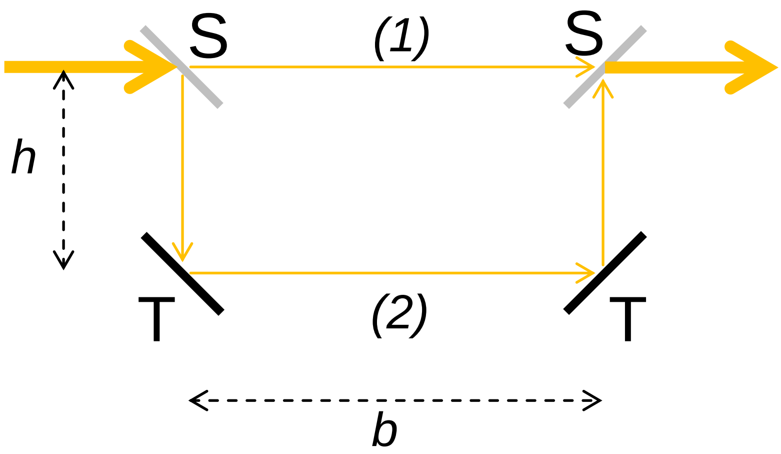
Nota: si è trascurato il contributo dei neutrini.
Dato: $1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$

Soluzione

a) l'intensità della radiazione si distribuisce su una sfera di raggio pari a *d*, quindi la potenza emessa è data da $P = 4\pi d^2 K = 4\pi \times \left(1.496 \times 10^{11}\right)^2 \times 1361 W = 3.828 \times 10^{26} W$
b) possiamo scrivere la potenza come segue: $P = \frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt} c^2$, da cui
$$\frac{dM}{dt} = \frac{P}{c^2} = \frac{3.828 \times 10^{26}}{\left(3 \times 10^8\right)^2} = 4.253 \times 10^9 kg/s$$
c) Troviamo dapprima la differenza di massa
$$\Delta m = 4m(p) + 2m(e^-) - m({}^4He) = 4 \times 1.6726 \times 10^{-27} + 2 \times 9.109 \times 10^{-31} - 6.6463 \times 10^{-27} =$$
$$= 4.59 \times 10^{-29} kg$$
e quindi l'energia $E = \Delta mc^2 = 4.59 \times 10^{-29} \times \left(3 \times 10^8\right)^2 = 4.131 \times 10^{-12} J = 25.8 MeV$
d) Il numero di fusioni nell'unità di tempo è dato dalla variazione di massa nell'unità di tempo diviso la massa trasformata nella singola fusione
$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\Delta m}\frac{dM}{dt} = \frac{4.253 \times 10^9 kg/s}{4.59 \times 10^{-29} kg} = 9.27 \times 10^{37}\ fusioni/s.$$

Onde

Un interferometro è costruito come in figura:



"S" sono due specchi semitrasparenti e "T" due specchi totalmente riflettenti. Un fascio di luce di lunghezza d'onda λ incide sul primo specchio S e si scinde in due rami: (1), trasmesso, e (2), riflesso. Sul secondo specchio S il fascio (1) subisce una seconda trasmissione e il fascio (2) una seconda riflessione (supponiamo che le riflessioni sugli specchi T non siano rilevanti per il nostro problema). Al di là del secondo specchio S i due fasci si sovrappongono dando luogo a interferenza.

Supposto che i due fasci interferenti siano onde piane:

$$f_1 = A_1 \cos(kx - \omega t) \qquad\qquad f_2 = A_2 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

con A_1 e A_2 le ampiezze (differenti) dei due fasci,

a) si determini lo sfasamento ϕ tra i fasci in funzione del parametro h, distanza tra gli specchi S e T.

L'onda risultante dalla sovrapposizione dei due fasci $f_1 + f_2$ si può scrivere come

$$A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi) = D(\phi)\sin(kx - \omega t + \chi)$$

b) si determini la funzione $D(\phi)$, ampiezza dell'onda risultante.

Ricordando che l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza $I = KA^2$, ove K è una costante supposta nota,

c) si trovi l'espressione dell'intensità dell'onda risultante in funzione delle intensità dei due fasci e del loro sfasamento ϕ, in particolare si determini il valore massimo e minimo dell'intensità;

d) si tracci il grafico dell'intensità in funzione di ϕ.

Soluzione

a) Troviamo dapprima la differenza di cammino: $\Delta l = 2h$, da cui lo sfasamento $\phi = 4\pi \frac{h}{\lambda}$.

b) Sviluppando il secondo coseno a primo membro e il seno a secondo membro,

$$A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \cos(kx - \omega t)\cos\phi - A_2 \sin(kx - \omega t)\sin\phi =$$
$$= D(\phi)\sin(kx - \omega t)\cos\chi + D(\phi)\cos(kx - \omega t)\sin\chi$$

Raccogliendo i termini in coseno e in seno:

$$\cos(kx - \omega t)(A_1 + A_2\cos\phi - D(\phi)\sin\chi) - \sin(kx - \omega t)(A_2 \sin\phi + D(\phi)\cos\chi) = 0$$

Affinché l'equazione sia soddisfatta occorre che i coefficienti si annullino, ovvero:

$$D(\phi)\sin\chi = A_1 + A_2\cos\phi$$
$$D(\phi)\cos\chi = -A_2 \sin\phi$$

Sommando membro a membro i termini al quadrato otteniamo

$$D(\phi)^2 = (A_1 + A_2\cos\phi)^2 + (A_2\sin\phi)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi$$

Da cui si ricava $D(\phi)$ estraendo la radice.

c) L'intensità risultante è $I = KD(\phi)^2 = KA_1^2 + KA_2^2 + 2KA_1A_2\cos\phi = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\phi$.

Il massimo si ottiene quando lo sfasamento è un multiplo di 2π:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(2\pi m) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2,$$

e il minimo quando è un multiplo dispari di π:

$$I_{\min} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\pi + 2\pi m) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

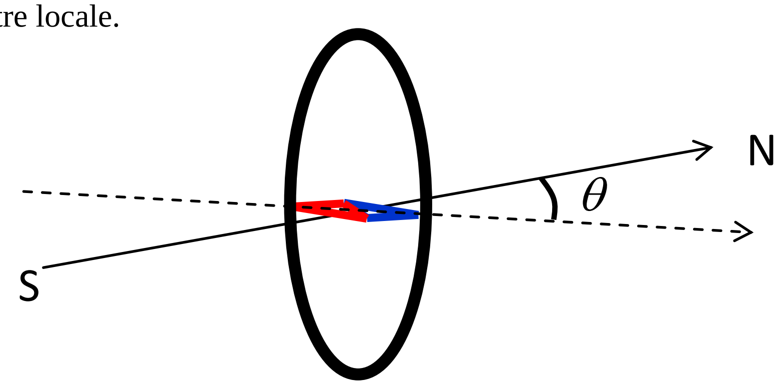
d) Il grafico è una funzione cosinusoidale con minimo I_{min} e massimo I_{max}.

Magnetismo

Un pacchetto compatto di N=10 spire circolari di raggio R=10 cm è orientato con asse orizzontale in direzione del Nord magnetico. Sia B_{Th}=50 μT il valore della componente orizzontale del campo magnetico terrestre locale.

a) Trovare l'espressione del campo B_s generato dalle spire nel loro centro, quando siano percorse da una corrente i;

b) Qual è il verso di scorrimento della corrente affinché il campo della spira sia opposto a quello terrestre?



Un ago magnetico, libero di ruotare in un piano orizzontale, sia posto al centro delle spire.

c) Detto m il momento magnetico dell'ago e θ l'angolo che forma con la direzione Nord magetica, scrivere l'espressione dell'energia magnetica dell'ago nel campo magnetico esterno risultante e trovare i valori di θ per cui si ha equilibrio.

d) Trovare qual è il valore della corrente circolante nelle spire, i_c, al di sopra del quale l'equilibrio stabile dell'ago cessa di essere stabile.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m / A$

Soluzione

a) Il campo al centro delle spire è $B_s = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}N$.

b) Il verso di scorrimento è dato da un versore che punta al Sud magnetico.

c) L'energia magnetica è $U = -\vec{m} \cdot \left(\vec{B}_{Th} + \vec{B}_s\right) = -m\left(B_{Th} - B_s\right)\cos\theta$. I punti di equilibrio sono θ=0 e $\theta = \pi$.

d) L'equilibrio cessa di essere stabile al di sopra del valore di corrente i_c che genera un campo uguale e opposto alla componente orizzontale terrestre: $B_s \geq B_{Th}$, ovvero

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}N \geq B_{Th}, \; i \geq i_c = \frac{2RB_{Th}}{\mu_0 N} = \frac{0.1 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10} = \frac{5}{2\pi} = 0.796A$$

Per correnti inferiori a i_c abbiamo $B_s < B_{Th}$ e $U < 0$ e quindi un equilibrio stabile. Per correnti maggiori $B_s > B_{Th}$ e $U > 0$ e quindi un equilibrio instabile.