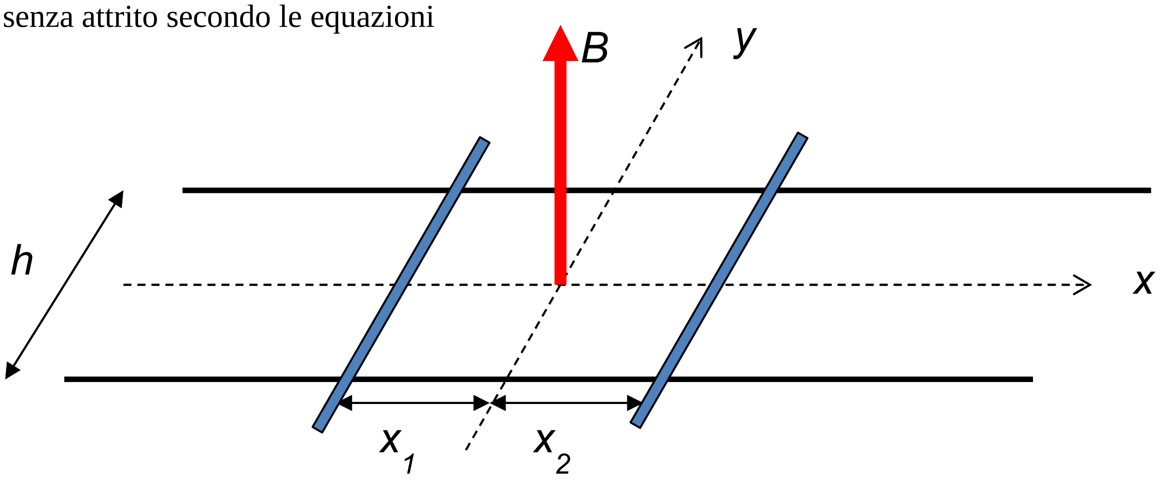
Soluzione del compito di Fisica 2 del 30 gennaio 2015

Elettrodinamica

Due sbarre, poste parallelamente all'asse *y* su due rotaie conduttrici, si muovono di moto armonico e senza attrito secondo le equazioni



$$x_2 = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sin\omega t \qquad\qquad x_1 = -\frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sin\omega t$$

Il sistema è immerso in un campo magnetico $B(t) = B_0 \sin\Omega t$ diretto lungo *z*, uniforme ma variabile nel tempo. Trovare

a) l'espressione del flusso del campo magnetico nel circuito formato dalle sbarre e dai segmenti delle rotaie compresi tra le sbarre;
b) la *fem* indotta nel circuito;
c) nel caso paricolare $\Omega = \omega$, gli istanti di tempo in cui la *fem* è nulla.

Soluzione

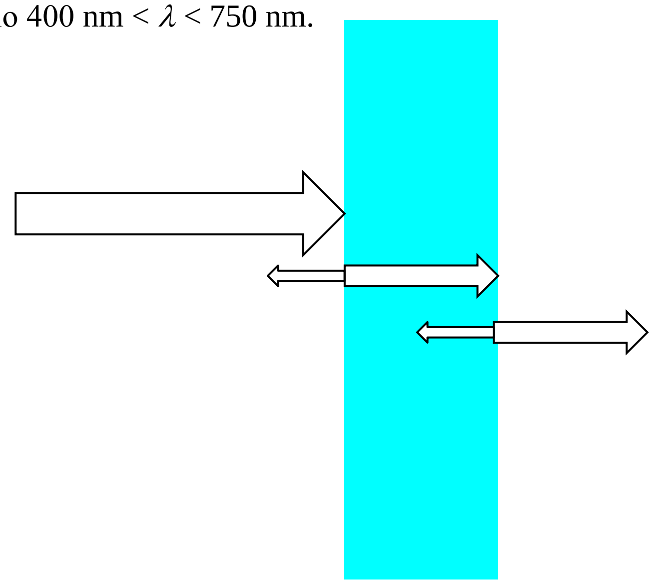
a) Poiché il campo magnetico è uniforme e perpendicolare alla superficie del circuito, il flusso sarà semplicemente
$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{A} = Bh(x_2 - x_1) = Bhb(1+\sin\omega t)$$

b) La fem è
$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[Bhb(1+\sin\omega t)\right] = -\frac{dB}{dt}hb(1+\sin\omega t) - Bhb\frac{d\sin\omega t}{dt} =$$
$$= -B_0 hb(\Omega\cos\Omega t(1+\sin\omega t) + \omega\sin\Omega t\cos\omega t)$$

c) La fem si annulla quando
$$\cos\omega t(1+\sin\omega t) + \sin\omega t\cos\omega t = \cos\omega t(1+2\sin\omega t) = 0$$
ovvero quando
$$\cos\omega t = 0 \qquad\qquad \sin\omega t = -\frac{1}{2}$$
la prima equazione è soddisfatta per $t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e la seconda per $t = \frac{1}{\omega}\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ oppure
$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)$$
ove *k* è un numero intero.

Ottica fisica

Un fascio di luce bianca incide perpendicolarmente su una lamina immersa in aria di spessore *d*=250 nm e indice di rifrazione *n*=1.3. La luce bianca contine radiazione di lunghezza d'onda compresa nell'intervallo 400 nm < λ < 750 nm.



Il fascio viene riflesso una prima volta sulla prima faccia della lamina e una seconda volta sulla seconda faccia e i due fasci riflessi interferiscono nel semispazio a sinistra della lamina.

Trovare

a) per la generica radiazione di lunghezza d'onda in aria λ, la lunghezza d'onda λ' nella lamina;
b) usando il risultato del punto (a), lo sfasamento tra i due fasci riflessi nel semispazio a sinistra della lamina;
c) la lunghezza d'onda per cui si ha un massimo di riflessione;
d) la lunghezza d'onda per cui si ha un minimo di riflessione;
e) ripetere i punti (c) e (d) per i fasci trasmessi nel semispazio a destra della lamina.

Soluzione

a) la lunghezza d'onda nella lamina si trova ricordando l'espressione della velocità della luce in un mezzo di indice *n* e il fatto che la frequenza *f* dell'onda non cambia cambiando mezzo di propagazione
$$v = \frac{c}{n} \qquad\qquad v = \lambda' f$$
da cui $\lambda' = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda}{n}$

b) Lo sfasamento è proporzionale alla differenza di cammino delle onde, misurata in termini di lunghezza d'onda (relativa al mezzo attraversato)
$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta l}{\lambda'} = 2\pi\frac{\Delta l}{\lambda}n$$
Poiché la differenza di cammino è $\Delta l = 2d$, lo sfasamento vale $\Delta\phi = 4\pi\frac{d}{\lambda}n$

c) Il massimo di interferenza si ha quando lo sfasamento è un multiplo pari di π: $2m\pi = 4\pi\frac{d}{\lambda}n$ ove *m* è un numero intero. Da qui segue
$$\lambda = 2\frac{d}{m}n = 2\frac{250}{m}1.3 = \frac{650}{m}nm$$
l'unico valore di *m* che dà una lunghezza d'onda presente nel fascio incidente è 1, quindi il massimo di interferenza si ha per $\lambda = 650 nm$

d) Il minimo si ottiene quando lo sfasamento è un multiplo dispari di π: $(2m+1)\pi = 4\pi \frac{d}{\lambda} n$

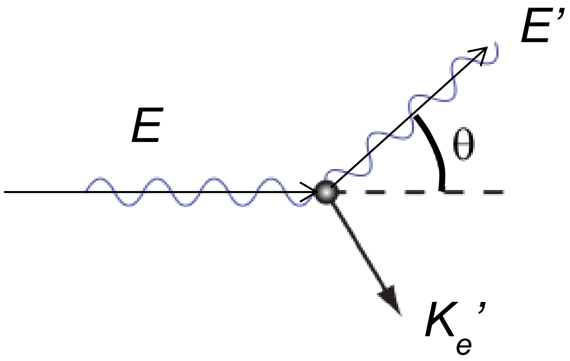
da cui segue $\lambda = 4\frac{d}{2m+1} n = 2\frac{250}{m+1/2} 1.3 = \frac{650}{m+1/2}$

l'unico valore di *m* che dà una lunghezza d'onda presente nel fascio incidente è 1, quindi il minimo di interferenza si ha per $\lambda = 433nm$

e) Lo sfasamento dei fasci trasmessi è identico a quello dei fasci riflessi, quindi le lunghezze d'onda di massima e minima interferenza sono uguali al caso della riflessione.

Relatività

Un fotone interagisce con un elettrone (supposto inizialmente fermo) e viene diffuso ad un angolo θ.



Secondo la formula di Compton, la lunghezza d'onda del fotone nello stato finale λ' è

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

ove λ è la lunghezza d'onda nello stato iniziale e m la massa dell'elettrone.
Ricordando la relazione tra energia e lunghezza d'onda del fotone $E = \frac{hc}{\lambda}$,

a) dimostrare che l'espressione dell'energia del fotone nello stato finale E', è

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

Calcolare:

b) l'espressione della perdita di energia del fotone $\Delta E = E - E'$ per la diffusione all'angolo θ=90°.

Calcolare

c) la perdita di energia del punto (b) nei seguenti due casi: E=1 keV, E=1000 keV;
d) usando la conservazione dell'energia relativistica, l'energia cinetica finale dell'elettrone K_e' nei due casi del punto (c);
e) la frazione di energia del fotone trasferita all'elettrone K_e'/E nei due casi del punto (d).

NOTA: l'energia a riposo dell'elettrone è 511 keV.

Soluzione

a) l'energia finale del fotone è $E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)} = \frac{hc/\lambda}{1 + \frac{hc/\lambda}{mc^2}(1-\cos\theta)} = \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}(1-\cos\theta)}$

b) la perdita di energia per θ=90° è

$$\Delta E = E - \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}}$$

c) Quando E=1 keV (raggi X), $\Delta E = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{511}} = 0.002 keV$

quando E=1000 keV (raggi γ), $\Delta E = 1000 - \frac{1000}{1 + \frac{1000}{511}} = 662 keV$

d) Per la conservazione dell'energia relativistica $E_e + E = E_e' + E'$ ed introducendo l'energia cinetica

$$mc^2 + E = \left(mc^2 + K_e'\right) + E'$$

da cui segue $K_e' = E - E'$. Nei due casi l'elettrone avrà quindi acquistato l'energia cinetica rispettivamente di 0.002 keV e di 662 keV.

e) La frazione di energia del fotone trasferita all'elettrone sarà rispettivamente

$$\frac{K_e'}{E} = \frac{0.002}{1} = 0.2\% \qquad \frac{K_e'}{E} = \frac{667}{1000} = 66.7\%$$

Magnetostatica

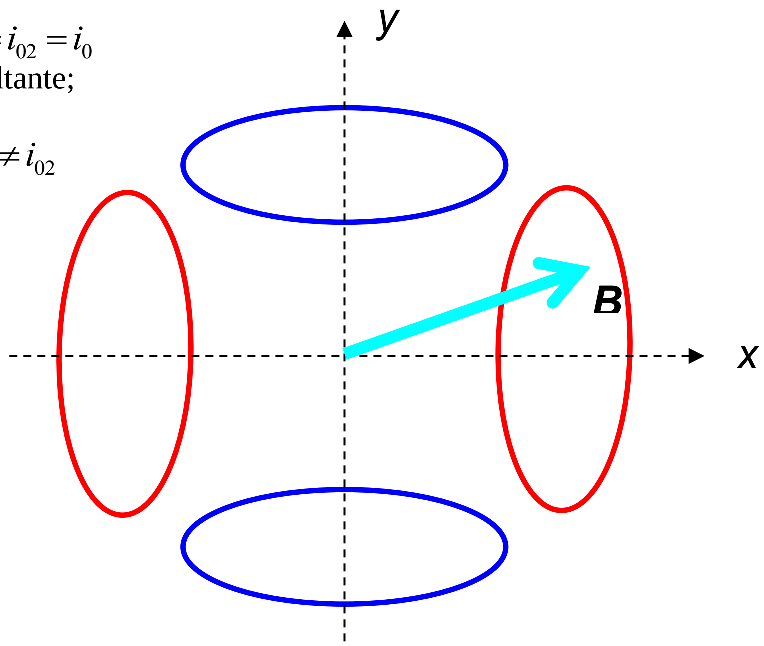
Una coppia di spire circolari con asse lungo y è percorsa da una corrente $i_1 = i_{01} \sin\omega t$.
Una seconda coppia di spire, uguale alla prima, con asse lungo x è percorsa da una corrente $i_2 = i_{02} \cos\omega t$.
Nell'origine delle cordinate i campi magnetici generati dalle due coppie sono rispettivamente:

$$B_y = Gi_1 \qquad\qquad B_x = Gi_2$$

ove G è l'integrale che compare nella prima formula di Laplace.

Trovare per un tempo t arbitrario e per $i_{01} = i_{02} = i_0$

a) il modulo del campo magnetico risultante;
b) la sua direzione θ rispetto all'asse x;
c) ripetere i punti (a) e (b) nel caso $i_{01} \neq i_{02}$



Soluzione

a) Il campo magnetico risultante è $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$ il suo modulo è

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2}} = |G|\sqrt{i_2^{\ 2} + i_1^{\ 2}} = |G|\sqrt{i_0^{\ 2}\cos^2\omega t + i_0^{\ 2}\sin^2\omega t} = |G| i_0$$

b) La direzione è data da $tg\theta = \dfrac{B_y}{B_x} = \dfrac{Gi_0 \sin\omega t}{Gi_0 \cos\omega t} = tg\omega t$ ovvero $\theta = \omega t$

Questo significa che il campo magnetico ha modulo costante e ruota con velocità angolare uniforme ω attorno all'asse z.

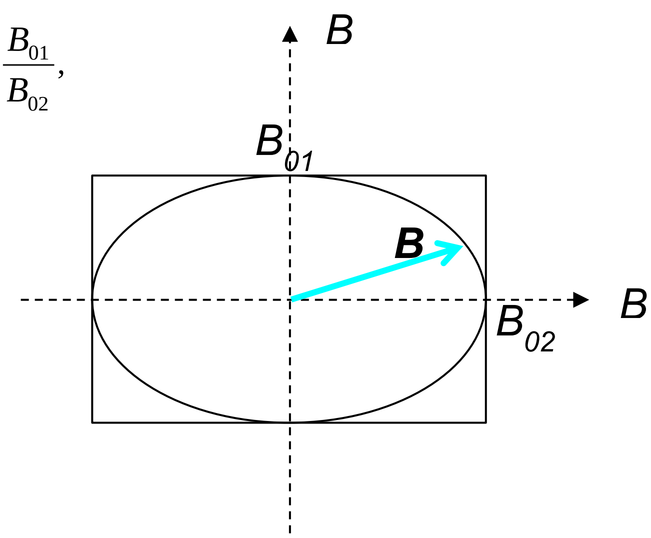
c) Diciamo $B_{01} = Gi_{01}$, $B_{02} = Gi_{02}$ e $tg\Theta = \dfrac{B_{01}}{B_{02}}$, abbiamo

$$B_y = B_{01} \sin\omega t$$
$$B_x = B_{02} \sin\omega t$$

e quindi

$$\left(\frac{B_y}{B_{01}}\right)^2 + \left(\frac{B_x}{B_{02}}\right)^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

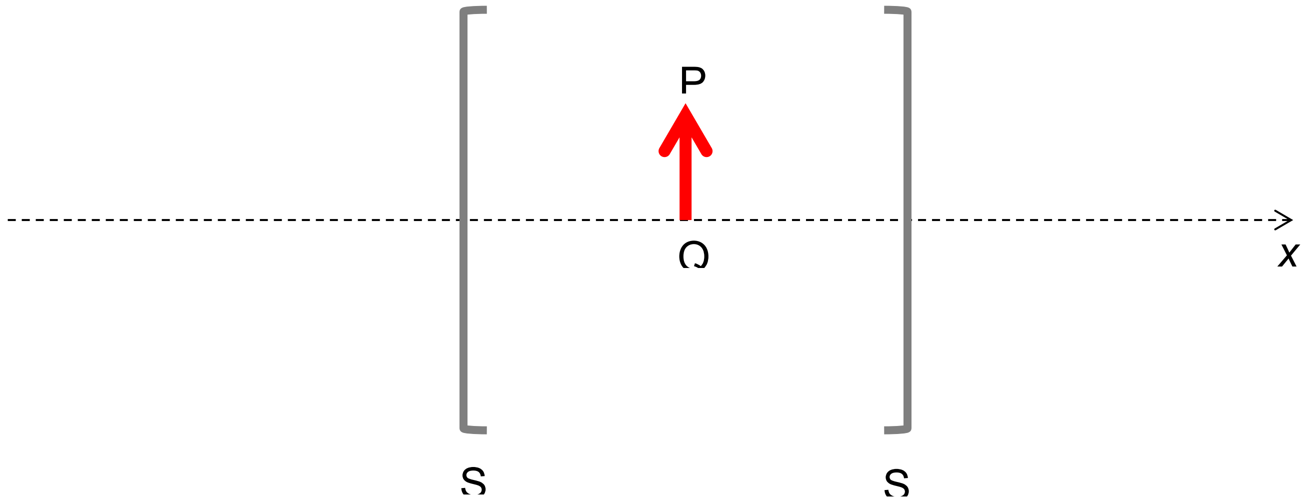
ovvero l'equazione di un'ellisse.



Ora $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_{02}{}^2 \cos^2 \omega t + B_{01}{}^2 \sin^2 \omega t}$ e $tg\theta = \frac{B_{01} \sin\omega t}{B_{02} \cos\omega t} = \frac{B_{01}}{B_{02}} tg\omega t = tg\Theta tg\omega t$

In questo caso il modulo del campo non è costante, inoltre il campo ruota ancora, ma con velocità angolare non uniforme.

Ottica geometrica
Due specchi concavi S1 e S2 di ugual focale f sono posti uno di fronte all'altro a distanza $d=f$. Un oggetto PQ è posto in $x=0$ simmetricamente rispetto agli specchi.



Ciascuno specchio forma un'immagine dell'oggetto, che a sua volta diviene oggetto per l'altro specchio e così via indefinitamente. Vista la simmetria del sistema basterà considerare i raggi emessi dall'oggetto verso S2. Dimostrare con i due metodi, algebrico e geometrico, che dopo tre riflessioni (S2-S1-S2) l'immagine si trova in $x=0$ ed è ribaltata rispetto all'oggetto (e quindi c'è un numero finito di immagini distinte).
Calcolare le distanze oggetto o e immagine i e l'ingrandimento G, (dettagliando le caratteristiche dell'immagine) per

a) la prima riflessione;
b) la seconda riflessione;
c) la terza riflessione.

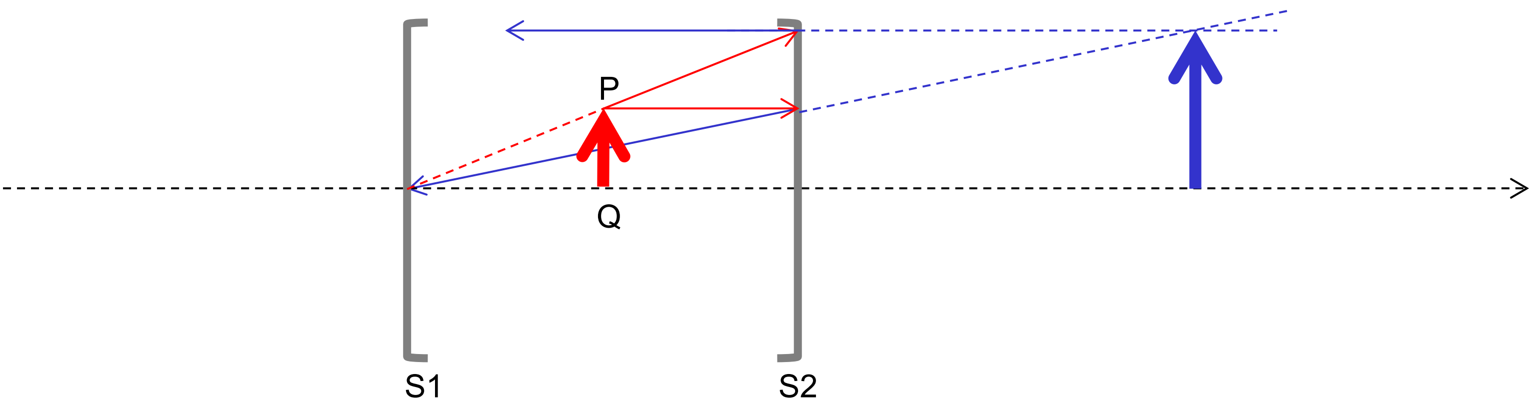
Suggerimento: fare un disegno distinto per ciascuna riflessione.

Soluzione

a) Distanza oggetto da S2: $o_1 = \frac{f}{2}$, dalla legge degli specchi si ricava la distanza immagine:

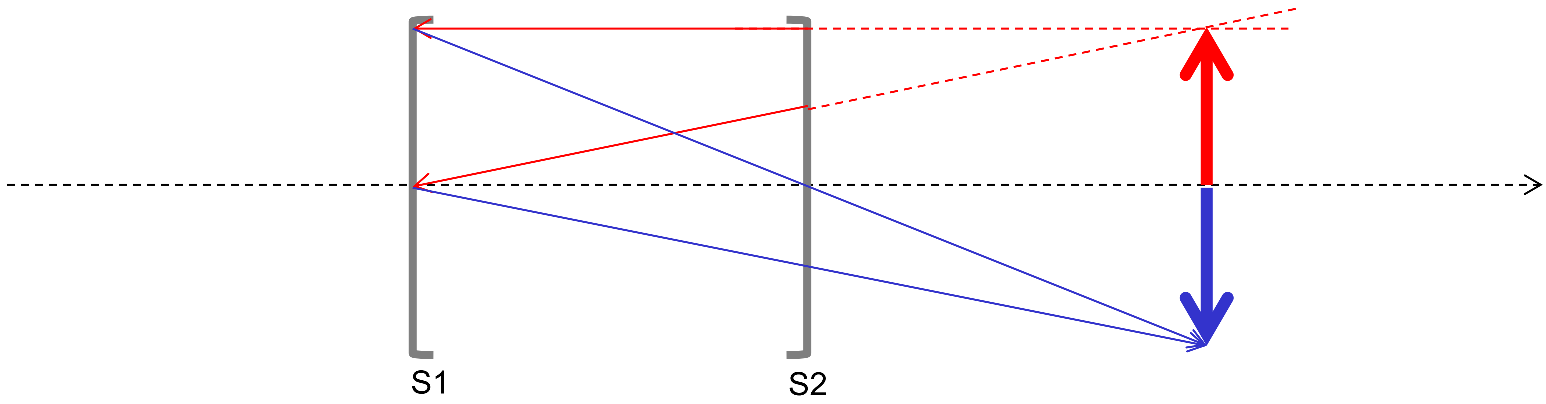
$i_1 = -f$ (immagine virtuale). Questa immagine diviene oggetto per S1; l'ingrandimento è

$G_1 = -\frac{i_1}{o_1} = 2$, l'immagine è virtuale, dritta e ingrandita.

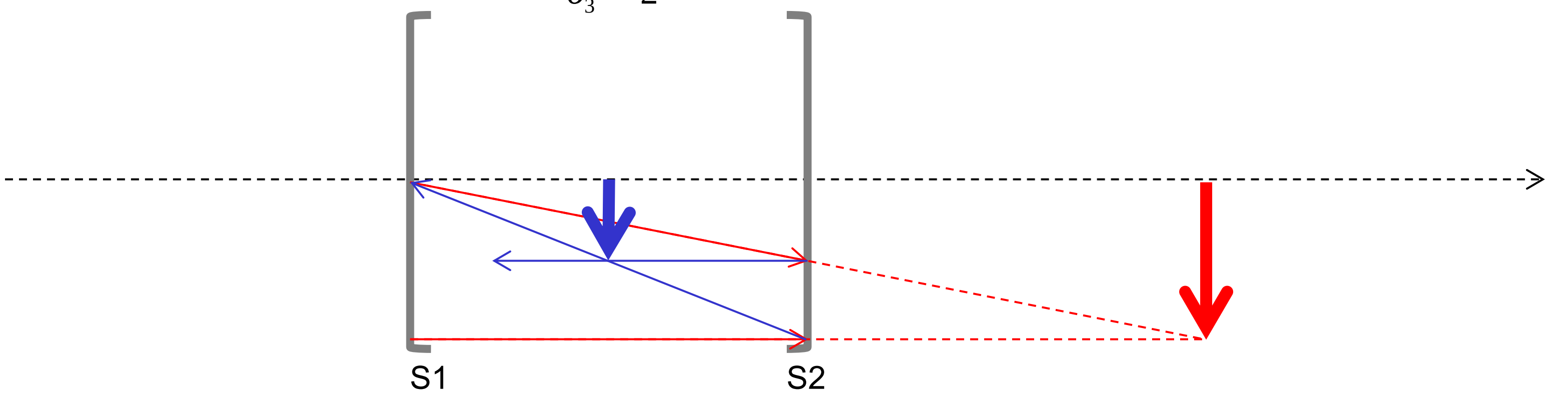


b) Distanza oggetto da S1: $o_2 = 2f$, la distanza immagine è $i_2 = 2f$.

Questa immagine diviene oggetto per S2; l'ingrandimento è $G_2 = -\frac{i_2}{o_2} = -1$, l'immagine è reale e capovolta.



c) Distanza oggetto da S2: $o_3 = -f$ (oggetto virtuale), la distanza immagine è $i_3 = \frac{f}{2}$; l'ingrandimento è $G_3 = -\frac{i_3}{o_3} = \frac{1}{2}$, l'immagine è reale, dritta e rimpicciolita.



Le successive tre riflessioni formano un'immagine che coincide con l'oggetto.