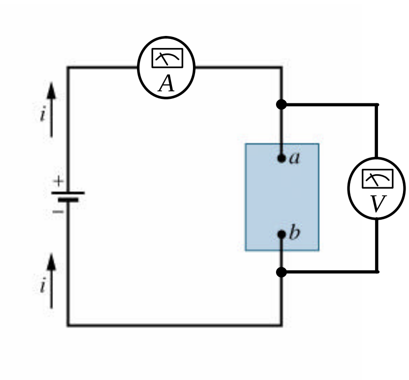
CARATTERISTICHE *V-I* DI UN ELEMENTO OHMICO E DEL FILAMENTO DI UNA LAMPADINA

Lo scopo principale dell'esperienza è quello di rilevare le caratteristiche *V-I* di due componenti circuitali.



In particolare la misura si basa sul metodo volt-amperometrico riassunto dal circuito schematizzato qui a fianco.
A seconda che tra i morsetti *a* e *b* venga inserito l'elemento ohmico o la lampadina, si tratta di effettuare una serie di misure di intensità di corrente e di d.d.p. tramite l'amperometro (*A*) e il voltmetro (*V*) indicati nello schema.

Riportando in grafico i dati così raccolti si otterrà una valutazione della caratteristica *V–I* dei due elementi circuitali.

Nel caso dell'elemento resistivo la caratteristica *V-I* (*V* in funzione di *I*) corrisponde ad una retta passante per l'origine la cui pendenza (coefficiente angolare) non è altro che la resistenza *R* dell'elemento.

Elaborazione dati

Relativamente alla prima parte dell'esperienza, i dati ottenuti tramite le misure richiedono una ulteriore elaborazione. In effetti, per ottenere una valutazione accurata della resistenza si deve procedere ad analizzare i dati sperimentali attraverso il ***metodo dei minimi quadrati***.
In generale, tale metodo permette di interpolare i dati sperimentali con una funzione teorica (lineare o no) dipendente da vari parametri (derivanti dal modello teorico utilizzato). Il metodo si basa sulla minimizzazione, rispetto ai parametri suddetti, della quantità c^2 corrispondente alla somma degli scarti quadrati tra i valori sperimentali e teorici delle quantita` misurate. A seconda dei casi gli scarti vengono pesati tramite i rispettivi errori sperimentali.
Nel nostro caso, la supposizione che i dati sperimentali si debbano allineare su una retta passante per l'origine, ci porta a scegliere la funzione teorica $y(x) = mx$, dove m (che costituisce il nostro unico parametro) è il coefficiente angolare della retta stessa. Quindi, se indichiamo con x_j, y_j le N coppie di misure (e.g. $x_j \equiv I_j$ e $y_j \equiv V_j$ o viceversa), il corrispondente c^2 sarà dato dalla sommatoria

$$c^2(m) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(y_j - m x_j\right)^2}{s_{y_j}^2}$$

dove s_{y_j} corrispondente all'errore sulla misura della quantità di y_j (supponiamo che gli errori sulle misure x_j siano trascurabili).

La minimizzazione del c^2, come per ogni altra funzione, viene effettuata imponendo che la sua derivata rispetto al parametro m si annulli. Cioé

$$\frac{dc^2}{dm} = -2\sum_{j=1}^{N} \frac{\left(y_j - m x_j\right) x_j}{s_{y_j}^2} = -2\left[\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j y_j}{s_{y_j}^2} - m \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{s_{y_j}^2}\right] = 0,$$

dalla quale otteniamo

$$m = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j y_j}{s_{y_j}^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{s_{y_j}^2}}.$$

Corrispondentemente, l'errore sulla stima del parametro m può essere calcolato attraverso la propagazione degli errori, secondo la seguente

$$s_m^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial m}{\partial y_j}\right]^2 s_{y_j}^2 = \frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{s_{y_j}^2}\right)^2} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{x_j}{s_{y_j}^2}\right]^2 s_{y_j}^2 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{s_{y_j}^2}},$$

che ci dà

$$s_m = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{s_{y_j}^2}}\right)^{-1}.$$

È importante notare che nel caso in cui si sia scelto $(x_j, y_j) \equiv (I_j, V_j)$ e $s_{y_j} \equiv s_{V_j}$ (le misure di tensione risultano più imprecise di quelle di corrente), il parametro m appena ottenuto costituisce la migliore stima della resistenza R. Perciò, il risultato della misura sarà

$$R = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{I_j V_j}{s_{V_j}^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{I_j^2}{s_{V_j}^2}}; \qquad s_R = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{I_j^2}{s_{V_j}^2}}\right)^{-1}.$$

Nel caso opposto, si è scelto $(x_j, y_j) \equiv (V_j, I_j)$ e $s_{y_j} \equiv s_{I_j}$ (le misure di corrente risultano più imprecise di quelle di tensione), il valore stimato per m corrisponde alla miglior stima di $1/R$. In tal caso, il risultato della misura sarà

$$R = \frac{1}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{V_j^2}{s_{I_j}^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{V_j I_j}{s_{I_j}^2}}. \qquad s_R = \left|\frac{\partial R}{\partial m}\right| s_m = R^2 s_m = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{V_j^2}{s_{I_j}^2}\right)^{3/2}}{\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{V_j I_j}{s_{I_j}^2}\right)^2}.$$

La scelta di uno dei due modi di lavoro dovrà essere fatta una volta controllato quale delle due grandezze (tensione o corrente) risulta misurata con maggior precisione.