

III^a Esperienza del Laboratorio di Fisica Generale II

Oscillazioni libere e risonanza di un circuito *RLC*-serie

(Trattazione analitica del circuito *RLC*-serie)

Con questa breve nota si vuole fornire la trattazione teorica del circuito *RLC*-serie sia in condizioni transitorie (oscillazioni libere) che in condizioni stazionarie di oscillazioni forzate. Nella nota vengono fornite le soluzioni complete delle equazioni differenziali del circuito nelle due condizioni menzionate.

1. Oscillazioni libere del circuito *RLC*-serie

Per studiare le oscillazioni libere del circuito consideriamo lo schema di Fig. 1. Negli istanti successivi a ogni spostamento dell'interruttore *I* da una posizione all'altra la corrente nel circuito segue un'andamento temporale di tipo oscillatorio smorzato o esponenziale dipendente dai valori delle capacità, induttanza e resistenza degli elementi circuitali.

Per analizzare tale comportamento consideriamo in dettaglio il caso in cui l'interruttore *I* passi dalla posizione 1 alla posizione 2 (vedi Fig. 1). In questo caso supporremo che $Q_0 = CE$ sia la carica sulle armature del condensatore prima del cambio di posizione dell'interruttore.

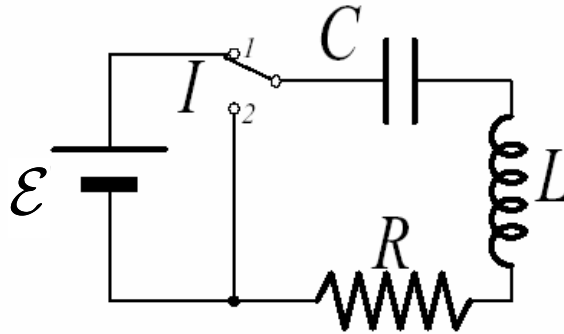


Figura 1. Schema del circuito per lo studio delle oscillazioni libere

Indicando con Q e i rispettivamente la carica sulle armature di C e la corrente che fluisce nel circuito, si noti che possiamo scrivere

$$\frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad (1)$$

Inoltre, dato che

$$i = -\frac{dQ}{dt}, \quad (2)$$

l'equazione (1) può essere riscritta nella forma seguente

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (3)$$

Questa è un'equazione differenziale del second'ordine le cui soluzioni sono del tipo $Ae^{-\alpha t}$. Inserendo tale soluzione nella (3) ed effettuando le ovvie semplificazioni otteniamo l'equazione di secondo grado che segue

$$L\alpha^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0,$$

che ha le soluzioni

$$\alpha_{\pm} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \frac{1}{\tau} \pm \frac{1}{\tau} \sqrt{1 - (\omega_0\tau)^2} \quad (4)$$

dove si è posto $\tau = 2L/R$ e $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Per comodità definiamo anche $\omega'_0 = (1/\tau)\sqrt{1 - (\omega_0\tau)^2}$. Questa quantità ci sarà utile successivamente.

I possibili casi sono tre:

Smorzamento semplice: $\omega_0\tau < 1$

Si hanno due soluzioni reali esponenziali e la soluzione generale della (3) è una combinazione di esse; cioè

$$Q(t) = A_+e^{-\alpha_+t} + A_-e^{-\alpha_-t} \quad (5)$$

Si noti che in questo caso $\alpha_+, \alpha_- > 0$ e che quindi entrambi gli esponenziali sono decrescenti. Imponendo che $Q(0) = Q_0$ e che $i(0) = [-dQ/dt]_{t=0} = 0$ (condizioni iniziali) si ottiene

$$A_+ = -\frac{\alpha_-}{\alpha_+ - \alpha_-}Q_0; \quad A_- = \frac{\alpha_+}{\alpha_+ - \alpha_-}Q_0 \quad (6)$$

Perciò

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\alpha_+ - \alpha_-} (\alpha_+e^{-\alpha_-t} - \alpha_-e^{-\alpha_+t}); \quad i(t) = \frac{Q_0\alpha_+\alpha_-}{\alpha_+ - \alpha_-} (e^{-\alpha_-t} - e^{-\alpha_+t}) \quad (7)$$

Smorzamento critico: $\omega_0\tau = 1$

Questo è un caso speciale; la soluzione generale della (3) invece di essere una combinazione di esponenziali è del tipo seguente

$$Q(t) = A_1e^{-t/\tau} + A_2te^{-t/\tau} \quad (8)$$

Le condizioni iniziali determinano

$$A_1 = Q_0; \quad A_2 = \frac{Q_0}{\tau}, \quad (9)$$

e quindi

$$Q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau}; \quad i(t) = \frac{Q_0}{\tau} te^{-t/\tau} \quad (10)$$

Oscillazioni smorzate: $\omega_0\tau > 1$

La (4) ha ora due soluzioni complesse e coniugate date da

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm j\omega'_0, \quad (11)$$

dove j è l'unità immaginaria. La soluzione della (3) assume quindi la forma

$$Q(t) = A_1e^{-(1/\tau + j\omega'_0)t} + A_2e^{-(1/\tau - j\omega'_0)t}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\omega'_0} e^{-t/\tau} \left[\omega'_0 \cos(\omega'_0 t) + \frac{1}{\tau} \sin(\omega'_0 t) \right] \quad (12)$$

e

$$i(t) = \frac{[1/\tau^2 + (\omega'_0)^2] Q_0}{\omega'_0} e^{-t/\tau} \sin(\omega'_0 t) \quad (13)$$

Queste relazioni mostrano che sia la carica che la corrente presentano delle oscillazioni smorzate (vedi il fattore $e^{-t/\tau}$) alla frequenza $\nu'_0 = \omega'_0/2\pi$.

In Fig. 2 è riportato l'andamento della corrente in funzione del tempo per un circuito RLC -serie come quello di Fig. 1, con $Q_0 = 10^{-4} \text{ C}$ e $\omega_0 = 6.2832 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$. Si noti che sono stati considerati i tre casi esaminati sopra.

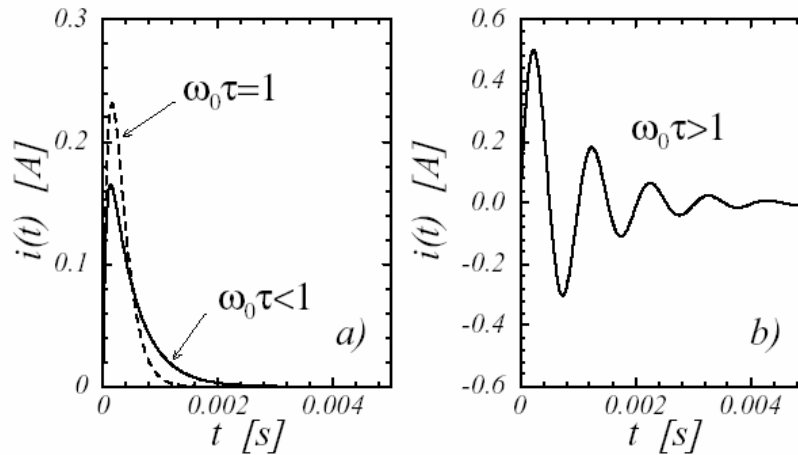


Fig. 2

2. Oscillazioni forzate del circuito RLC -serie e risonanza

Consideriamo ora il circuito di Fig. 3. A causa della presenza di un generatore di d.d.p. sinusoidale, dopo una fase transitoria, la corrente nel circuito è obbligata a oscillare sinusoidalmente.

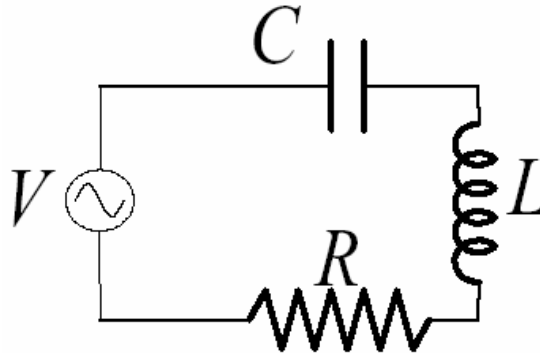


Fig. 3 Schema del circuito RLC -serie con generatore di tensione alternata

Nella presente situazione il comportamento del circuito è regolato dall'equazione seguente

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin(\omega t) \quad (14)$$

dove ω è la pulsazione della d.d.p. applicata.

Superato il transitorio, a cui non siamo interessati in questo caso, la carica sulle armature del condensatore avrà un andamento del tipo

$$Q(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (15)$$

dove la costante A e la fase α saranno funzione dei parametri del circuito (e cioè di R , L e C). Per valutarle si deve sostituire la (15) nella (14) e verificare l'equazione che ne consegue.

Dalla (15) abbiamo

$$\frac{dQ}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) \quad (16)$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

e sostituendo nella (14) si ricava

$$-LA^2 \sin(\omega t + \alpha) + AR\omega \cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{C} \sin(\omega t + \alpha) = V_0 \sin(\omega t). \quad (17)$$

Facendo uso delle formule di somma per i seni e i coseni, che nel nostro caso forniscono le seguenti

$$\begin{cases} \sin(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t) \cos \alpha + \cos(\omega t) \sin \alpha \\ \cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t) \cos \alpha - \sin(\omega t) \sin \alpha \end{cases}$$

la (17) può essere scritta nella forma

$$A \left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right) \cos \alpha - \omega R \sin \alpha \right] \sin(\omega t) + A \left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L \right) \sin \alpha + \omega R \cos \alpha \right] \cos(\omega t) = V_0 \sin(\omega t).$$

L'uguaglianza fra primo e secondo membro deve valere ad ogni istante e perché ciò sia possibile debbono coincidere (a primo e secondo membro) i coefficienti delle analoghe funzioni sinusoidali oscillanti. Ponendo $X = \omega L - 1/\omega C$, la condizione appena espressa corrisponde al sistema seguente

$$\begin{cases} \omega[-X \sin \alpha + R \cos \alpha] = 0 \\ -A\omega[X \cos \alpha + R \sin \alpha] = V_0 \end{cases}$$

La prima relazione ci permette di ricavare

$$R \cos \alpha = X \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = \frac{R}{X} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan \left(\frac{R}{X} \right)$$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$-A\omega[X \cos \alpha + X \tan \alpha \sin \alpha] = -\frac{AX\omega}{\cos \alpha} = V_0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{V_0}{\omega X} \cos \alpha$$

e quindi

$$Q(t) = -\frac{V_0}{\omega X} \cos \alpha \sin(\omega t + \alpha)$$

Analogamente, per l'intensità di corrente abbiamo

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{V_0 \cos \alpha}{X} \cos(\omega t + \alpha) \quad (18)$$

Infine, ponendo $\alpha = \phi + \pi/2$, si vede facilmente che l'intensità di corrente può essere scritta anche nella forma

$$i(t) = -\frac{V_0 \sin \phi}{X} \sin(\omega t + \phi), \quad (19)$$

e notando che

$$\tan \phi = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{X}{R} \quad \sin \phi = -\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

si ottiene

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (20)$$

Le quantità X e $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ sono anche dette **reattanza** e **impedenza** del circuito.

Si noti che la massima ampiezza dell'intensità di corrente segue la legge

$$i_M = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (21)$$

riportata (in forma normalizzata ad 1) nel grafico di Fig. 4.

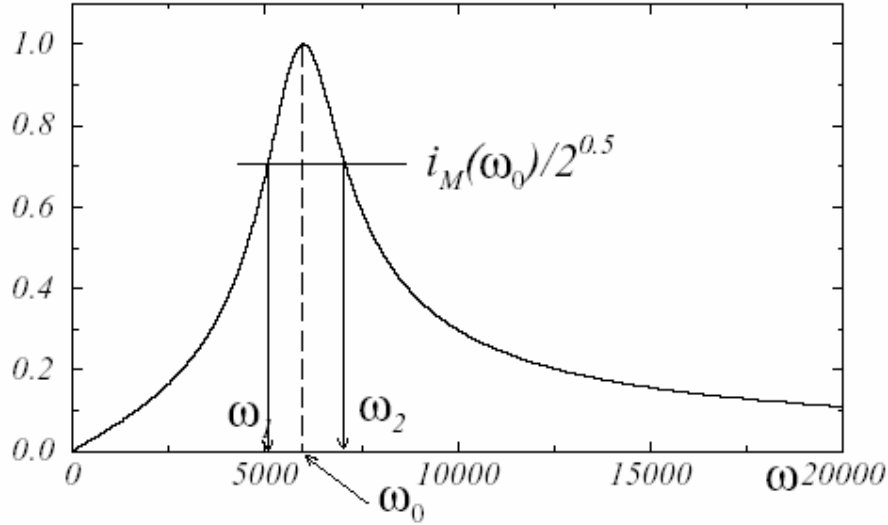


Fig. 4

Come si può notare dall'eq. (21), $i_M(\omega)$ è massima quando $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La frequenza $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ è detta **frequenza di risonanza** del circuito. Si noti che a tale frequenza, o equivalentemente per $\omega = \omega_0$, anche lo sfasamento ϕ tra l'intensità di corrente i e la tensione applicata $V(t)$, pari a

$$\phi(\omega) = \arctan\left(-\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right), \quad (22)$$

si annulla.

Viene definito **fattore di merito** o **fattore di qualità** del circuito, QF , la quantità che segue

$$QF = 2\pi \frac{\frac{1}{2}Li_M^2(\omega_0)}{W_R(\omega_0)} \quad (23)$$

dove il numeratore della frazione rappresenta la massima energia immagazzinata nell'induttanza e W_R è l'energia dissipata nella resistenza in un periodo, tutto calcolato alla frequenza di risonanza. Si vede immediatamente che (vedi la (21))

$$\frac{1}{2}Li_M^2(\omega_0) = \frac{LV_0^2}{2R^2}, \quad (24)$$

mentre

$$W_R(\omega_0) = \int_0^T Ri^2(t)dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin^2(\omega_0 t)dt = \frac{V_0^2}{\omega_0 R} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi V_0^2}{\omega_0 R} \quad (25)$$

Perciò

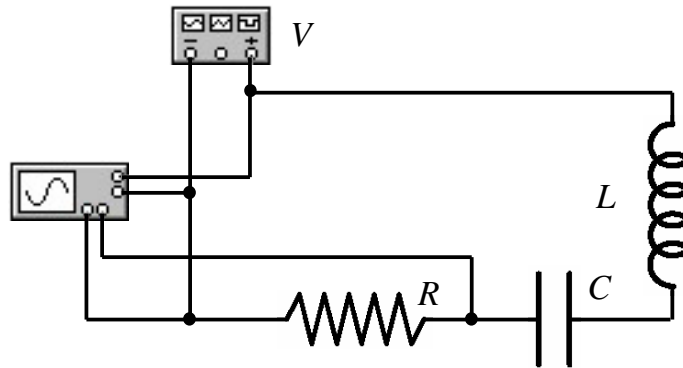
$$QF = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (26)$$

III^a Esperienza del Laboratorio di Fisica Generale II

Oscillazioni libere e forzate di un circuito *RLC*-serie

(Introduzione teorica)

Lo scopo di questa esperienza è quello di studiare le oscillazioni libere e forzate di un circuito *RLC*-serie. Il circuito è composto da un resistore, un condensatore e una induttanza collegati in serie fra loro e connessi a loro volta ad un generatore di tensione capace, a seconda dei casi, di fornire una d.d.p. costante a tratti (onda quadra) o alternata sinusoidale (vedi circuito schematizzato in figura).



L'unico strumento di misura è un *oscilloscopio*, attraverso cui si potrà rilevare, in contemporanea, la d.d.p. fornita dal generatore, V , e quella ai capi della resistenza, V_R . Essendo $V_R = Ri$, il confronto tra V e V_R permetterà anche la misura, nella seconda parte dell'esperienza, dello sfasamento φ tra tensione e corrente.

Con l'esperienza ci si propone di valutare il comportamento del circuito nelle due diverse condizioni di lavoro.

I^a fase: Smorzamento e Oscillazioni Smorzate

In tale fase il generatore dovrà fornire una d.d.p. con forma d'onda quadrata. I fronti ripidi di una tale forma d'onda hanno lo scopo, come nel caso del circuito *RC*, di rimpiazzare le chiusure e aperture dell'interruttore. Successivamente ad ogni fronte d'onda, a seconda del valore della resistenza circuitale, V_R mostrerà diversi andamenti associati ai regimi di *smorzamento semplice* o *oscillazioni smorzate* visti nella trattazione teorica del circuito.

Dopo aver determinato sperimentalmente la resistenza critica del circuito, la caratterizzazione delle oscillazioni del circuito dovrà essere effettuata rilevando l'andamento del cosiddetto decremento logaritmico in funzione di R stessa.

Tale quantità corrisponde a

$$\ln \left(\frac{i_1}{i_2} \right)$$

dove i_1 e i_2 sono le ampiezze dei primi due picchi positivi presentati dall'intensità di corrente quando il circuito è in regime di oscillazioni smorzate (vedi Fig. 2). Questo parametro può essere utilizzato per quantificare la velocità con cui le oscillazioni si smorzano.

Infatti utilizzando l'eq. (13), osserviamo che i due picchi sono posizionati a $t_1 = \pi/2\omega_0'$ e $t_2 = 5\pi/2\omega_0'$, rispettivamente, e perciò

$$\ln \left(\frac{i_1}{i_2} \right) = \ln \left[\frac{i(t_1)}{i(t_2)} \right] = \ln \left(e^{-\frac{2\pi}{\omega_0' \tau}} \right) = -\frac{2\pi}{\omega_0' \tau}$$

che, una volta sostituiti i valori di τ e ω_0 , diventa

$$\ln \left(\frac{i_1}{i_2} \right) = \frac{\pi R}{L \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}}$$

Da questa possiamo vedere che per $R/2L \ll \omega_0$ il decremento logaritmico diventa essenzialmente proporzionale ad R . In effetti, in queste condizioni potremmo scrivere

$$\ln \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \cong \frac{\pi R}{L \omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

II^a fase: Oscillazioni Forzate e Risonanza

In tale fase il generatore dovrà fornire una d.d.p. sinusoidale e la resistenza circuitale dovrà essere fissata ad un determinato valore. In tali condizioni, la d.d.p. V_R , anche se sempre sinusoidale, mostrerà un'ampiezza e una sfasamento (rispetto a V) dipendente dalla frequenza della tensione V fornita dal generatore stesso.

Dopo aver determinato la frequenza di risonanza (corrispondente allo sfasamento nullo), si dovrà determinare la cosiddetta curva di risonanza del circuito, e cioè si dovrà riportare in grafico di V_R/V in funzione della frequenza applicata ν .

Poi, per caratterizzare la qualità della risonanza si dovrà determinare il **fattore di qualità** del circuito QF . Il suo valore può essere valutato sperimentalmente attraverso un'analisi della curva di risonanza. Infatti, se si valutano i valori di ν (o ω) in cui $i_M(\nu)$ è pari ad $i_M(\nu_0)/\sqrt{2}$ (vedi ω_1 e ω_2 in Fig. 4) allora

$$QF \cong \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1}$$

Questa relazione è tanto più precisa quanto più la curva di risonanza è stretta intorno ad ν_0 e quindi si suggerisce di utilizzare una resistenza R non troppo elevata.