

# Misura di lunghezze d'onda e indice di rifrazione mediante reticolo di diffrazione e prisma

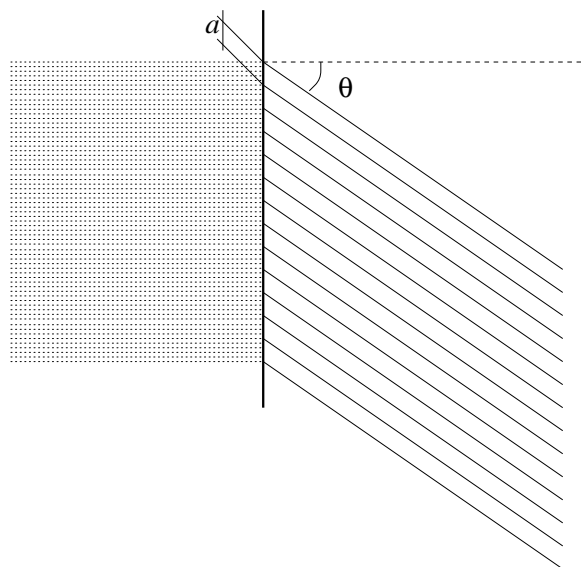
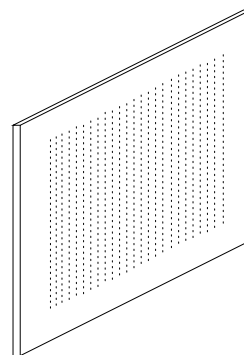
Lo scopo principale di questa esperienza é quello di effettuare delle semplici misure di ottica geometrica e ondulatoria attraverso le quali poter meglio capire le proprietà della propagazione della luce. Si affronteranno due tipi di misure nelle quali la lunghezza d'onda della luce gioca un ruolo centrale. Nella prima parte dell'esperienza si considererá la misura della lunghezza d'onda delle componenti della luce di una lampada mediante un reticolo di diffrazione. Nella seconda parte la conoscenza delle suddette lunghezze d'onda verrá utilizzata per il calcolo dei corrispondenti indici di rifrazione del vetro di un prisma.

## Introduzione teorica

In questa sezione daremo una breve introduzione teorica ai fenomeni che si affronteranno nell'esperienza allo scopo di giustificare l'applicazione delle formule attraverso le quali calcolare le diverse quantità di interesse

### Diffrazione della luce attraverso un reticolo

Un reticolo di diffrazione puó essere realizzato in diversi modi. Il reticolo a cui vogliamo far riferimento qui é l'equivalente di una serie di fenditure equispaziate fra loro e praticate su una lastra di piccolo spessore come schematicamente mostrato dalla figura. Se inviamo un fascio di luce su una delle facce della lastra, la presenza delle fenditure permetterà, ovviamente, il passaggio di una parte di essa. Ma il fenomeno non si esaurisce certamente qui.



Consideriamo un fascio di luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$  e supponiamo che la spaziatura fra le fenditure sia pari ad  $a$ . Supponiamo inoltre che i raggi di luce, paralleli fra loro, incidano sulla lastra perpendicolarmente ad essa. Consideriamo quindi la figura che segue e supponiamo di osservare la luce che attraversa il reticolo da molto lontano (il che equivale a dire che consideriamo solo i raggi che escono paralleli e secondo un certo angolo  $\theta$ ).

Supporremo, per semplicitá, che da ogni fenditura esca un solo raggio nella direzione individuata da  $\theta$ . Malgrado nella figura sembrino distanti fra loro, i raggi emergenti

dal reticolo sono molto vicini fra loro e possono interferire mutuamente. I raggi diffratti potranno esistere solo se i raggi interferiscono costruttivamente fra loro. Ciò si realizza solo se la differenza di cammino tra raggi diffratti contigui,  $\Delta l$ , è pari ad un multiplo intero della lunghezza d'onda  $\lambda$  e cioè

$$\Delta l = m\lambda \quad (1)$$

dove  $m$  è un numero intero. Osservando la figura, si vede facilmente che  $\Delta l$  è funzione dell'angolo  $\theta$  secondo la seguente

$$\Delta l = a \sin \theta \quad (2)$$

per mezzo della quale possiamo scrivere che si potranno osservare raggi diffratti solo per quei valori di  $\theta$  per i quali risulta valida l'uguaglianza

$$\sin \theta = \sin \theta_m = \frac{\lambda}{a} m \quad (3)$$

A seconda del valore di  $m$  (e cioè  $m = 1, 2, \dots$ ) si parla di diffrazione al prim'ordine, al second'ordine, etc. Per il fatto che nella situazione sperimentale che abbiamo utilizzato i vari ordini di diffrazioni si presentano, ovviamente, sia per angoli positivi che negativi, nella relazione precedente anche  $m = -1, -2, \dots$  sono permessi.

La relazione (3) è ora la base della determinazione della lunghezza d'onda  $\lambda$ . Infatti, possiamo scrivere

$$\lambda = \frac{a \sin \theta_m}{m} \quad (4)$$

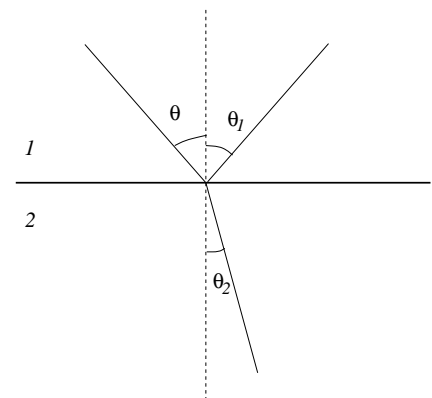
dalla quale segue che la conoscenza di  $a$  e la misura di  $\theta_m$  permette il calcolo di  $\lambda$

La relazione (3) è valida anche nel caso che la luce incidente sul reticolo sia non monocromatica. In questo caso, infatti, la validità del principio di sovrapposizione degli effetti fa sì che ogni componente della luce incidente venga diffratta secondo le modalità descritte indipendentemente dalle altre. Nella pratica, una luce non monocromatica è la sovrapposizione di diverse componenti di lunghezze d'onda diverse. Il passaggio attraverso il reticolo permette di scindere le diverse componenti perché gli angoli ai quali verranno diffratte (per esempio al prim'ordine) saranno diversi.

### Prisma e indice di rifrazione

Esiste una analogia tra quanto appena detto nel paragrafo precedente e quanto avviene quando una luce non monocromatica attraversa un prisma. Anche in questo caso tale luce viene scissa nelle sue componenti. Tuttavia le ragioni fisiche di tale fenomeno sono diverse da quelle alla base del fenomeno della diffrazione.

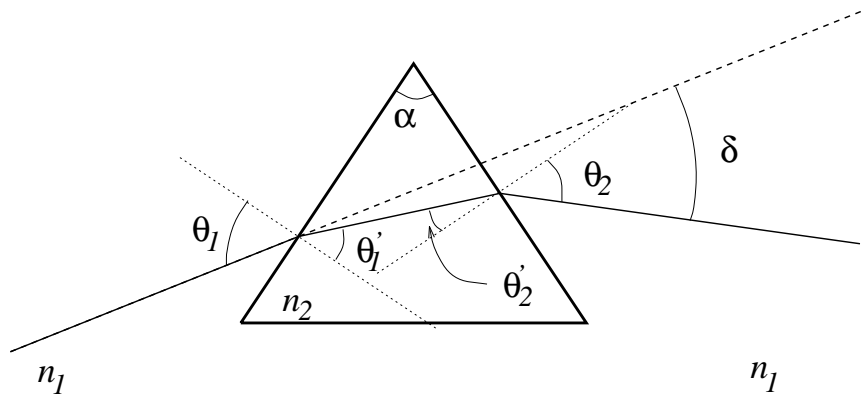
In questo caso, infatti, dobbiamo considerare il fenomeno della rifrazione. Come mostrato nella figura, un raggio di luce (monocromatico) che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi determina sia un



raggio rifleso che un raggio rifratto. Le relazioni che intercorrono tra gli angoli di incidenza,  $\theta$ , di riflessione,  $\theta_1$ , e di rifrazione,  $\theta_2$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \\ n_2 \sin \theta_2 &= n_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (5)$$

dove  $n_1$  e  $n_2$  sono gli indici di rifrazione dei due mezzi coinvolti nel fenomeno. L'indice di rifrazione di un mezzo é dato dal rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e quella nel mezzo stesso.



Consideriamo ora un prisma, e supponiamo che un raggio incida con un angolo di incidenza  $\theta_1$  su una delle sue facce (vedi figura). La rifrazione su questa faccia genera un raggio rifratto all'interno del prisma che a sua volta incontrando l'altra faccia sarà rifratto verso l'esterno. Ovviamente oltre ai raggi rifratti, ogni passaggio attraverso una superficie di separazione genererà anche il corrispondente raggio rifleso.

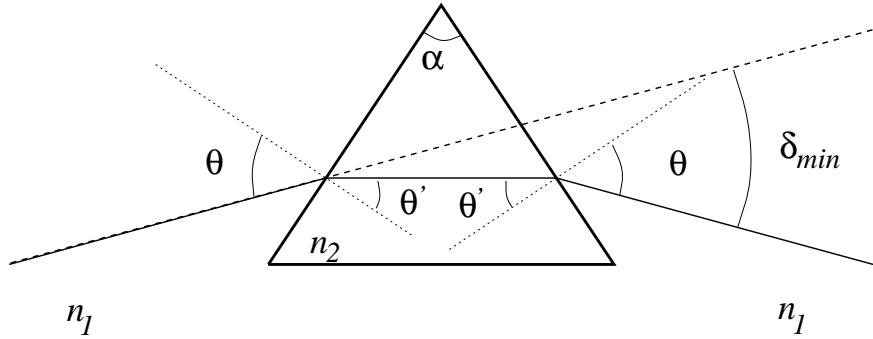
Cerchiamo ora di ricavare la direzione del raggio rifratto uscente dal prisma partendo dalla conoscenza dell'angolo di incidenza iniziale. Per le rifrazioni sulle due facce del prisma possiamo scrivere le seguenti

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta'_1 \\ n_2 \sin \theta'_2 &= n_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (6)$$

D'altra parte, per quanto riguarda gli angoli, abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha + (\pi/2 - \theta'_1) + (\pi/2 - \theta'_2) &= \pi \implies \theta'_1 + \theta'_2 = \alpha \\ \delta &= (\theta_1 - \theta'_1) + (\theta_2 - \theta'_2) = \theta_1 + \theta_2 - \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

dove  $\alpha$  é l'angolo al vertice del prisma e  $\delta$  é proprio l'angolo tra il raggio uscente e quello incidente. Le quattro relazioni sopra riportate (vedi eqs. (6) e (7)) possono essere considerate come un sistema di equazioni nelle variabili  $\theta'_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta'_2$  e  $n_2$  ( $n_1$  si suppone noto). La soluzione di questo sistema di equazioni darebbe quindi modo di calcolare l'indice di rifrazione  $n_2$  del materiale che compone il prisma (vetro). Da notare, però, che tale sistema di equazioni coinvolge funzioni trascendenti e quindi può essere risolto solo per via numerica.



Questa complicazione può essere eliminata se il prisma viene disposto in modo opportuno. Si osservi infatti che ruotando il prisma cambierà sia l'angolo  $\theta_1$  che l'angolo  $\delta$ . Si può dimostrare che al variare di  $\theta_1$  l'angolo  $\delta$  non può assumere valori inferiori a  $\delta_{min}$  corrispondente all'angolo di deflessione cercato nella situazione mostrata in figura. Tale situazione corrisponde al caso in cui il raggio rifratto all'interno del prisma è parallelo alla base del prisma stesso nella qual condizione le relazioni (7) si semplificano notevolmente

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_1 = \theta \\ \theta'_2 &= \theta'_1 = \theta'\end{aligned}\tag{8}$$

dalle quali otteniamo

$$\begin{aligned}2\theta' &= \alpha \\ 2\theta &= \alpha + \delta_{min}\end{aligned}\tag{9}$$

che danno

$$\theta = \frac{1}{2}(\alpha + \delta_{min})\tag{10}$$

Inoltre attraverso le (6) abbiamo

$$n_1 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_{min}) = n_2 \sin \left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

da cui otteniamo

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_{min})}{\sin \left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\tag{11}$$

Essendo  $n_1$  l'indice di rifrazione dell'aria che nella maggior parte dei casi può essere confuso con l'indice di rifrazione del vuoto, e cioè  $n_1 = 1$ , questa relazione permette, a tutti gli effetti, il calcolo dell'indice di rifrazione del prisma. La sua utilità sta nel fatto che  $n_2$  può essere determinato semplicemente dalla misura dell'angolo con cui un raggio viene deflesso passando attraverso il prisma. Inoltre, se viene utilizzata luce non monocromatica, le diverse componenti verranno deflesse secondo angoli diversi dato che l'indice di rifrazione del vetro dipende dalla lunghezza d'onda.

Combinando i risultati della prima parte dell'esperienza e di questa seconda parte è quindi possibile calcolare  $n_2(\lambda)$  in corrispondenza delle lunghezze d'onda precedentemente determinate.

# Strumentazione, esecuzione dell'esperienza, elaborazione dei dati e stesura della relazione

Qui di seguito é riportato un elenco degli strumenti e relativi accessori messi a disposizione per l'esecuzione dell'esperienza.

- **Lampada a scarica e relativo alimentatore**

Essa costituisce la sorgente della luce che dovrà essere analizzata attraverso il reticolo di diffrazione e il prisma. Per le sue caratteristiche essa produce una luce che é la sovrapposizione di varie componenti monocromatiche dovute alle transizioni elettroniche degli atomi nel gas della lampada indotte dalla scarica.

- **Goniometro ottico dotato di, fenditura, due sistemi ottici e supporto per reticolo e prisma**

Tale strumento permette la misura degli angoli corrispondenti sia ai diversi ordini di diffrazione dei diversi colori che ai rispettivi angoli di rifrazione del prisma. La luce prodotta dalla lampada entra nell'apparato attraverso una fenditura di larghezza regolabile. I due sistemi ottici servono a far si che a) i raggi raggiungano parallelamente il reticolo o il prisma e b) i raggi paralleli uscenti producano un'immagine a fuoco per l'osservatore.

- **Reticolo di diffrazione e prisma**

Attraverso di essi si studieranno i fenomeni della diffrazione e della rifrazione.

- **Panno nero**

Serve per coprire l'apparato durante le misure in modo da diminuire al massimo l'influenza della luce esterna.

## Motivazioni e scopi dell'esperienza

Le motivazioni principali sono legate all'osservazione e alla comprensione della natura della luce attraverso lo studio dei fenomeni della diffrazione e della rifrazione. Nell'esperienza vengono effettuate varie misure al fine di:

- a) **calcolare le lunghezze d'onda delle componenti monocromatiche della luce della lampada attraverso diffrazione da un reticolo;**
- b) **calcolo dell'indice di rifrazione del prisma per le lunghezze d'onda ottenute al punto a).**

## Esecuzione dell'esperienza

Sequenza logica delle operazioni

- 1) Predisposizione del goniometro ottico:
  - a) Prendendo in esame la parte mobile del goniometro mettere a fuoco l'immagine di un oggetto lontano;
  - b) Dopo aver acceso la lampada e averla posizionata di fronte alla fenditura, metterne a fuoco l'immagine (osservata sempre attraverso la parte mobile del goniometro) operando con la manopola del sistema fisso.

- 2) Posizionare il reticolo nell'apposito supporto perpendicolarmente al fascio proveniente dalla fenditura e osservare ai vari angoli i diversi ordini di diffrazione delle componenti della luce della lampada.
- 3) Selezionare almeno 4 diverse componenti (colori) fra le piú intense e in modo da spaziare su un'ampia porzione dello spettro visibile e quindi misurare gli angoli corrispondenti a tutti i rispettivi ordini di diffrazione visibili (sia a destra che a sinistra).
- 4) Sostituire il reticolo con il prisma. Ponendo il vertice verso il fascio rilevare le due riflessioni sulle due facce e misurato l'angolo tra di esse ricavare l'angolo al vertice  $\alpha$ . Se  $\varphi$  é l'angolo tra i raggi riflessi, si ha che  $\alpha = \varphi/2$ .
- 5) Posizionare il prisma in modo da poter osservare la rifrazione attraverso (se possibile anche ad occhio nudo) e quindi, osservando le righe attraverso la parte mobile del goniometro, ruotare il prisma fino a posizionarlo in modo da ottenere la deflessione minima.
- 6) Misurare le deflessioni ( $\delta_{min}$ ) relativi alle stesse componenti (colori) scelte al punto 3).

### Elaborazione dei dati

Mediante le misure di cui al punto 3) si ottengono una serie di angoli esperimenti, per ogni colore scelto, l'angolo di diffrazione relativo ai vari ordini e a destra o a sinistra. Considerato uno dei colori prescelti per distinguere fra le varie misure indicheremo con  $\theta_m^{(\gamma)}$  l'angolo corrispondente all'ordine di diffrazione  $m$ -esimo con  $\gamma = d$  o  $\gamma = s$  a seconda se la misura é stata fatta a destra o a sinistra, rispettivamente. Tramite la relazione (4) ad ognuno di questi angoli possiamo far corrispondere una lunghezza d'onda,  $\lambda_m^{(\gamma)}$ .

Osserviamo anche che, essendo gli angoli  $\theta$  misurati con una precisione finita, anche i corrispondenti valori di  $\lambda$  avranno una precisione finita. L'errore sulla lettura degli angoli puó essere assunto pari al minimo angolo che puó essere apprezzato dal goniometro ottico. Denominiamo tale quantitá con  $\Delta\theta$  e osserviamo che é costante su tutta la scala. La stima dell'errore sulle lunghezze d'onda puó essere fatto tramite le leggi della propagazione degli errori. Utilizzando la (4) e la convenzione sopra menzionata si ottiene che

$$\Delta\lambda_m^{(\gamma)} = \left| \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right|_{\theta=\theta_m^{(\gamma)}} \Delta\theta = \frac{a \cos \theta_m^{(\gamma)}}{m} \Delta\theta \quad (12)$$

Da questa espressione si osserva che l'errore su  $\lambda$  diminuisce all'aumentare dell'ordine di diffrazione  $m$  per il quale é stata effettuata la misura. Ció giustifica anche il perché misurare gli angoli di diffrazione anche agli ordini superiori quando gia il prim'ordine potrebbe essere sufficiente per valutare la lunghezza d'onda.

Ora si pone il problema di come, da tutti i valori di  $\lambda$  e dei rispettivi errori calcolare il valore piú attendibile da assegnare alla lunghezza d'onda del colore in esame. A questo riguardo la teoria degli errori ci viene in aiuto.

I valori di  $\lambda$  relativi allo stesso ordine ma relativi a misure a destra e a sinistra possono essere combinate in modo da ottenere un valore di lunghezza d'onda e relativo errore

per ogni ordine di diffrazione. Ciò si ottiene nel seguente modo:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_m^{(d)} + \lambda_m^{(s)}}{2}; \quad \frac{1}{\Delta\lambda_m^2} = \frac{1}{(\Delta_m^{(d)})^2} + \frac{1}{(\Delta_m^{(s)})^2} \quad (13)$$

Infine combinando i diversi ordini di diffrazione si ottiene

$$\lambda = \frac{\sum_m \lambda_m / \Delta\lambda_m^2}{\sum_m 1 / \Delta\lambda_m^2}; \quad \frac{1}{\Delta\lambda^2} = \sum_m \frac{1}{\Delta\lambda_m^2} \quad (14)$$

dove le somme si intendono effettuate su tutti gli ordini di diffrazione osservati. Ripetendo questo calcolo per tutti i colori prescelti si ottengono i rispettivi valori di lunghezza d'onda e relativo errore.

Per quanto riguarda le misure con il prisma ai punti 4) e 6) possiamo fare considerazioni analoghe alle precedenti. Indicando semplicemente con  $n$  l'indice di rifrazione ottenuto attraverso la (11) (cioè  $n = n_2/n_1$ ), attraverso le leggi della propagazione degli errori otteniamo che l'errore su  $n$  è dato da

$$(\Delta n)^2 = \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}\right)^2 \Delta\alpha^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \delta_{min}}\right)^2 \Delta\delta_{min}^2 \quad (15)$$

dove  $\delta\alpha$  e  $\Delta\delta_{min}$  sono gli errori di determinazione di  $\alpha$  e  $\delta_{min}$ . Analogamente al caso precedente attraverso le (11) e (15) per ogni colore si ottiene un valore per  $n$  e relativo errore.

### Indicazioni per la stesura della relazione

Premesso che ogni gruppo è libero di scegliere lo stile nel quale preparare la propria relazione scritta, si vogliono ricordare qui gli elementi essenziali da tenere presenti per la sua stesura.

- Sinteticamente descrivere le attrezzature utilizzate e gli scopi dell'esperienza.
- Non riportare tutta la trattazione teorica, ma solo, eventualmente, le formule da utilizzare per i calcoli.
- Riportare in tabelle i valori delle grandezze misurate e delle grandezze e relativi errori da queste calcolate.
- Riportare in grafico gli indici di rifrazione relativi ai diversi colori in funzione delle relative lunghezze d'onda.
- Commentare eventualmente i risultati e/o le osservazioni effettuate.

**Si ricorda che la relazione deve essere consegnata all'assistente (dott. G. Gagliardi) entro il termine stabilito dall'effettuazione dell'esperienza**