SECONDA ESPERIENZA DI LABORATORIO
(21 ottobre 2004)

1 - IL SISTEMA MASSA-MOLLA

La seconda esperienza riguarda lo studio del sistema massa-molla ed è **finalizzata sia all'apprendimento dei concetti relativi alle misure dirette, indirette e alla propagazione degli errori, che al richiamo dei concetti relativi al moto armonico.**
Considerando la figura seguente, introduciamo un sistema di riferimento 0x, rivolto verso il basso:

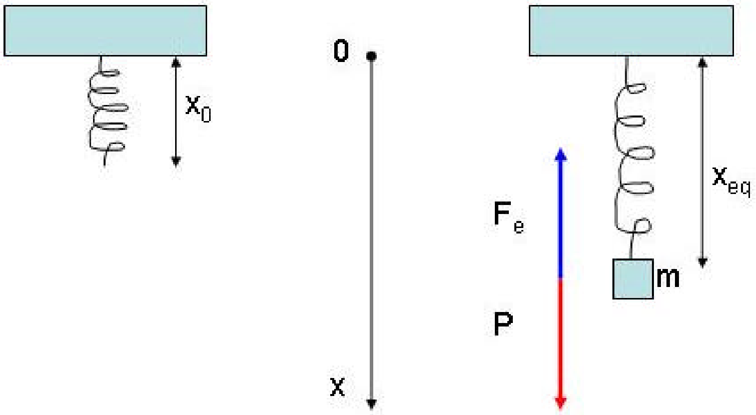

Figura 1

Le forze agenti sull'oggetto di massa *m* sono la forza elastica della molla, rivolta verso l'alto e la forza peso, rivolta verso il basso:

$$F_e = k(x - x_0)\text{............}(1)$$

$$P = mg\text{......................}(2)$$

Il significato delle costanti è il seguente: x_0 e k rappresentano rispettivamente la lunghezza a riposo e la costante elastica della molla, m rappresenta la massa dell'oggetto, g l'accelerazione di gravità.
In condizioni di equilibrio le due forze si bilanciano:

$$k(x_{eq} - x_0) = mg\text{............}(3)$$

Questa equazione permette di determinare la posizione di equilibrio del sistema:

$$x_{eq} = x_0 + \frac{mg}{k}\text{............}(4)$$

In condizioni dinamiche l'equazione del moto è:

$$P - F_e = ma\text{............}(5)$$

ovvero, introducendo la notazione $a = \frac{d^2x}{dt^2}$:

$$mg - k(x - x_0) = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{...........(6)}$$

trasformando opportunamente i termini e ricordando la definizione della posizione di equilibrio, otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - x_{eq}) \text{...........(7)}$$

(che ricorda l'equazione del moto armonico, non fosse per il termine noto x_{eq} sottratto entro parentesi). Con una semplicissima sostituzione di variabile:

$$z = x - x_{eq} \text{...........(8)}$$

possiamo però ottenere l'equazione canonica del moto armonico:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z = -w^2 z \text{ ....(9)}$$

Ove si è introdotta la pulsazione $w^2 = k/m$, legata al periodo di oscillazione T dalla relazione:

$$T = \frac{2p}{w} \text{...........(10)}$$

La soluzione di tale equazione è notoriamente:

$$z(t) = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt \text{.............(11)}$$

Ritornando alla variabile x, possiamo riscrivere la soluzione così:

$$x(t) = x_{eq} + C_1 \cos wt + C_2 \sin wt \text{.............(12)}$$

scegliamo le seguenti condizioni iniziali (cioè i valori che la posizione e la velocità assumono per $t=0$):

$$x(0) = x_{eq} + A \text{............(13)}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \text{..................(14)}$$

il cui significato è il seguente: la massa parte da una posizione distante $+A$ dall'equilibrio (ricordiamo che il sistema di riferimento è rivolto verso il basso), con velocità nulla. La (13) impone che $A=C_1$, mentre la (14) impone che $C_2=0$. La soluzione sarà dunque:

$$x(t) = x_{eq} + A \cos wt \text{.............(15)}$$

In conclusione la massa oscillerà di moto armonico attorno alla posizione di equilibrio x_{eq}, con un'ampiezza A e un periodo T dato da:

$$T = 2p\sqrt{\frac{m}{k}} \text{............(16)}$$

Nella figura 2 è riprodotto il sistema di acquisizione che verrà usato: un PC comanda tramite un software opportuno e un'interfaccia, un sensore di posizione ad ultrasuoni. Il sensore determina la distanza y di un oggetto facendo la misura del tempo che trascorre tra l'invio di un impulso e il ritorno dell'impulso riflesso, moltiplicando per la velocità del suono e dividendo per due.
Attenzione che le formule scritte contengono la distanza x, mentre il sistema misura la distanza y: basta tener conto che la somma delle due è una costante, la distanza tra il sensore e il punto di sostegno della molla: $x+y=L$.
Partendo dai valori della posizione, il software calcola anche, tramite un algoritmo alle differenze finite, la velocità e l'accelerazione e ne permette la visualizzazione su grafico, in tempo reale. E' anche possibile definire altre grandezze, funzioni delle precedenti, come l'energia cinetica e potenziale e farne un grafico in tempo reale. Le funzioni statistiche permettono infine di trovare la media, lo sqm, i valori massimi e minimi dell'insieme di dati raccolto per ciascuna grandezza.

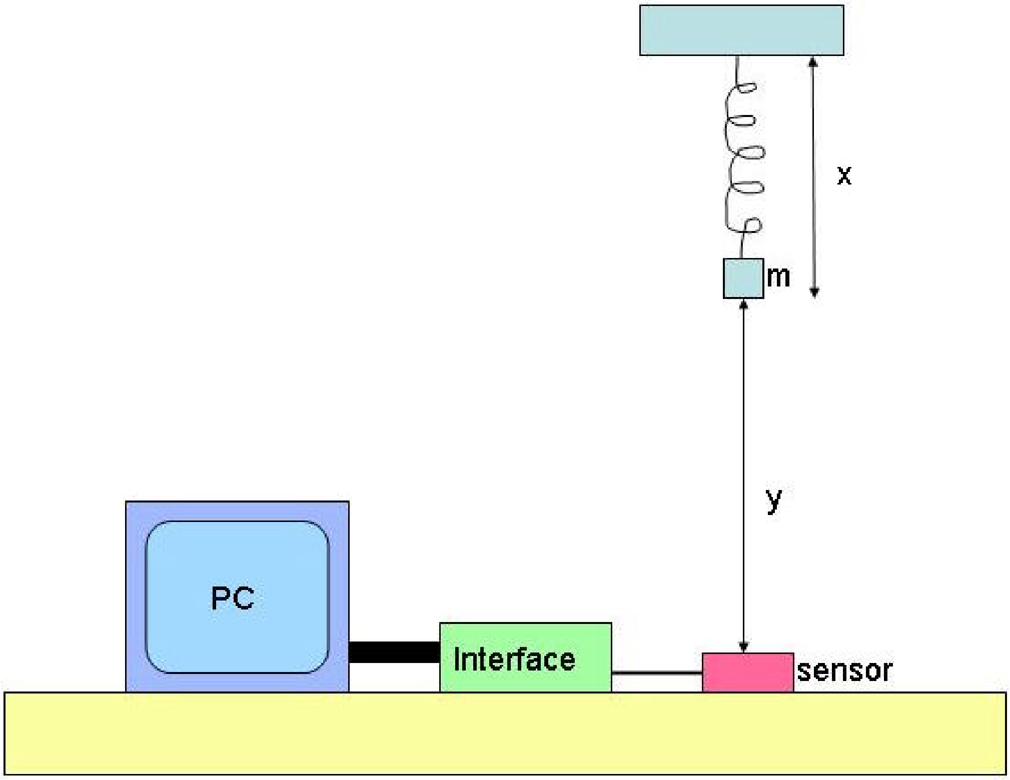

Figura 2

STUDIO DELL'ENERGIA

Vogliamo ora studiare l'energia del sistema massa-molla. L'energia meccanica totale è la somma di tre termini: l'energia cinetica della massa, l'energia potenziale gravitazionale della massa, l'energia potenziale elastica della molla:

$$E = K + P_e + P_g \text{...........}(17)$$

(**avendo supposto la molla priva di massa**, essa non contribuirà né all'energia cinetica né a quella potenziale gravitazionale).
Ricordando la soluzione dell'equazione del moto e la sua derivata, possiamo esplicitare la forma delle energie in gioco:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2w^2\sin^2 wt \text{.............................}(18)$$

$$P_e = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}k(A\cos wt + \frac{m}{k}g)^2 \text{...........}(19)$$

$$P_g = -mgx = -mg(A\cos wt + x_{eq}) \text{...........}(20)$$

Avvalendoci del fatto che l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria, possiamo definire l'energia potenziale totale come segue:

$$P_{tot} = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - mgx + C = \frac{1}{2}k(x-x_{eq})^2 \text{...........}(21)$$

$$C = mgx_{eq} - \frac{m^2g^2}{2k} \text{...........}(22)$$

Con questa scelta, per l'energia totale otteniamo:

$$E = \frac{1}{2} A^2 (mw^2 \sin^2 wt + k \cos^2 wt) \text{...........(23)}$$

Sull'equazione (23) possiamo fare due considerazioni:

1) nella nostra schematizzazione del sistema, la relazione $mw^2=k$ è teoricamente vera, in questo caso l'energia assume la forma:

$$E = \frac{1}{2} A^2 mw^2 \text{...........(24)}$$

ed è, come dev'essere, costante nel tempo. Se accadesse che, a causa degli errori di misura su m, w e k, $mw^2=k$ risultasse accidentalmente falsa, la condotta che ci converrebbe seguire sarebbe di assumere come comunque vera la relazione e ricavare una delle tre costanti (quella con l'errore più grande) in funzione delle restanti due. Questo garantirebbe la costanza dell'energia totale, che altrimenti, a norma della (23), parrebbe variare periodicamente nel tempo.

2) Se la schematizzazione del sistema fosse inadeguata, perché non si può trascurare la massa della molla, allora sarebbero false sia $mw^2=k$ che la (23). Per avere un'espressione corretta dell'energia meccanica bisognerebbe aggiungere i termini di energia cinetica e gravitazionale della molla. L'uso della (23) porterebbe ad una apparente variazione dell'energia nel tempo.

Fino a qui si è fatto un discorso ideale, in cui si è trascurato l'attrito. Nel caso reale le equazioni per K, P_e, P_g vanno corrette moltiplicando i termini dipendenti periodicamente dal tempo per un esponenziale decrescente, di modo che l'energia totale decresce nel tempo e tende a zero, cioè alla somma delle energie potenziali nella posizione di equilibrio.

2 - MISURA DIRETTA DI UNA LUNGHEZZA, DI UNA MASSA E DI UN TEMPO CON UNO STRUMENTO DI MISURA

Lunghezza.
Immaginiamo di segnare su un foglio di carta le posizioni l_1 e l_2 occupate dall'estremo di una molla quando vi sono appese, alternativamente, due masse. Con un metro si misura poi la distanza tra i due segni, cui si associa un errore (a priori) pari alla sensibilità dello strumento o di apprezzamento dello sperimentatore. Si puo` ripetere la misura un certo numero di volte e farne la media, mantenedo per l'errore il valore appena definito.
Massa.
Si misura con una bilancia: attribuiamo a m il valore letto sul visore, cui associamo un errore (a priori) pari alla sensibilità dello strumento. In questo caso non è necessario ripetere la misura. Se provassimo a farlo, otterremmo probabilmente sempre lo stesso risultato. Questo è dovuto al fatto che la sensibilità dello strumento è abbastanza grossolana da mascherare gli errori casuali di misura.
Tempo.
Si misura con un cronometro: al valore letto sul visore, si associa un errore (a priori) pari alla sensibilità dello strumento. Si puo` ripetere la misura più volte e farne la media. Il periodo di oscillazione T di un sistema massa-molla, può essere **misurato** in questo modo. Alternativamente può essere **calcolato** con la formula ricavata precedentemente, se conosciamo il valore della massa e della costante elastica della molla.

MISURA DELLA COSTANTE ELASTICA DI UNA MOLLA

La costante elastica si determina come segue: si appende un'estremità della molla ad un gancio, si carica l'altra estremità con una massa e si determina l'allungamento che ne consegue. In condizioni statiche vale la seguente relazione:

$$k(l_1 - l_0) = m_1 g \text{.............}(1)$$

ove l_0 è la lunghezza a riposo della molla e l_1 l'allungamento dovuto alla massa m_1.
Ripetiamo l'operazione usando una massa diversa:

$$k(l_2 - l_0) = m_2 g \text{.............}(2)$$

sottraendo le due equazioni troviamo:

$$k(l_2 - l_1) = (m_2 - m_1) g \text{.............}(3)$$

da cui il valore di k risulta:

$$k = \frac{m_2 - m_1}{l_2 - l_1} g \text{.............}(4)$$

Il procedimento si può ripetere per altre coppie di masse, ottenendo altri allungamenti e altre misure della stessa quantità k.

MISURE DIRETTE E INDIRETTE

Quanto detto nei due paragrafi precedenti esemplifica un fatto generale, cioè che esistono due tipi di misure:

1) Misura diretta: il valore della grandezza viene determinata con uno strumento;
2) Misura indiretta: il valore della grandezza viene calcolato tramite una formula in cui la grandezza da determinare è funzione di altre grandezze, i cui valori si suppongono noti da precedenti misure dirette (o anche indirette).

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Consideriamo una grandezza *z*, funzione di altre grandezze *x*, *y*, …:

$$z = F(x, y, ...)............(5)$$

Nel seguito ci limiteremo al caso di due sole variabili *x* e *y*, essendo immediata l'estensione al caso generale. Dalla conoscenza dei valori misurati e degli errori di *x* e *y*, vogliamo determinare il valore di *z* e il suo errore.

Il valore di una grandezza misurata indirettamente.
Definiamo come misura di *z*, il valore che l'espressione (5) assume in $\bar{x}, \bar{y}$:

$$\bar{z} = F(\bar{x}, \bar{y})............(6)$$

L'errore di una grandezza misurata indirettamente.
Sviluppiamo la funzione *F* in serie di Taylor, limitandoci ai primi due ordini e scegliendo come punto base dello sviluppo quello dei valori misurati $\bar{x}, \bar{y}$ delle variabili indipendenti:

$$F(x, y) \approx F(\bar{x}, \bar{y}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} (x - \bar{x}) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} (y - \bar{y})............(7)$$

Portiamo il primo addendo del secondo membro a primo membro e facciamo il valore assoluto di entrambi i membri:

$$\left|F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y})\right| \approx \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}} (x - \bar{x}) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}} (y - \bar{y})\right| \le \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\right| \left|x - \bar{x}\right| + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\right| \left|y - \bar{y}\right|............(8)$$

L'interpretazione della formula scritta e` la seguente: non tutte le misure ci daranno lo stesso valore $\bar{x}$ per la prima variabile e $\bar{y}$ per la seconda, a causa degli errori che entrano nel processo di misura. Se facessimo un gran numero di misure, potremmo analizzarle con metodi statistici e trovare il valore attorno a cui queste misure si raggruppano (valor medio) e la larghezza di questo raggruppamento (scarto quadratico medio). Molto spesso non e` pero`conveniente o sensato raccogliere un gran numero di misure, per cui si preferisce prenderne poche (o addirittura una sola) e stimare l'errore tipico $e(x)$ e $e(y)$ che si commette. Questa stima si ottiene analizzando lo strumento e il metodo impiegati nel processo. Tali valori stimati vengono quindi attribuiti al valore assoluto degli scarti:

$$\left|x - \bar{x}\right| = e(x)$$

$$\left|y - \bar{y}\right| = e(y)$$

Volendo significare con questo che la variazione dei valori delle variabili indipendenti e` dell'ordine dell'errore tipico. Siccome non si puo` sapere se questi errori contribuiscono sommandosi o sottraendosi a $\bar{x}$ e $\bar{y}$, si prende il valore assoluto dello scarto.
Il primo membro della (8) rappresenta a sua volta una stima dell'errore sulla grandezza in misura:

$$e(z) = \left|F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y})\right|$$

La formula (8) ci permette quindi di **calcolare** una limitazione superiore dell'errore su *z*, in funzione degli errori **stimati** su *x* e *y* e della forma della funzione *F*:

$$e(z) \le e_m(z) = \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\right| e(x) + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\right| e(y)............(9)$$

E' anche possibile considerare l'errore relativo:

$$\left|\frac{e(z)}{z}\right| \le \left|\frac{1}{z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\right| e(x) + \left|\frac{1}{z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x},\bar{y}}\right| e(y)............(10)$$

Nelle formule appena scritte e nelle seguenti si fa un uso forse eccessivo dei simboli di valore assoluto: questo per essere sicuri di poter applicare correttamente il segno di disuguaglianza. Il valore assoluto potra` essere tolto, con guadagno in leggibilita` delle formule, ogniqualvolta si abbiano quantita` positive.
La forma (10) è particolarmente utile (perché semplice) quando la funzione *F* è del tipo prodotto di potenze:

$$F = Cx^a y^b \text{.............(11)}$$

ove *C* è una costante. Infatti la derivata parziale rispetto a *x*, divisa per *F*, risulta:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{a}{x} \text{.............(12)}$$

e similmente per il pezzo relativo a *y*.
Calcolando entrambi nei valori misurati di *x* e *y* e inserendoli nella formula (10), otteniamo:

$$\left|\frac{e(z)}{\bar{z}}\right| \le \left|a\frac{e(x)}{\bar{x}}\right| + \left|b\frac{e(y)}{\bar{y}}\right| \text{.............(13)}$$

MISURA ‘DIRETTA’ DEL PERIODO

Non è conveniente fare una misura diretta, in senso stretto, del periodo, cioè cronometrare la singola oscillazione. E’ più conveniente cronometrare un tempo multiplo (intero) del periodo:

$$t = NT \text{.............(15)}$$

da cui ricavare *T* indirettamente:

$$T = \frac{t}{N} \text{.............(16)}$$

La convenienza deriva dal fatto che applicando le formule della propagazione degli errori, troviamo:

$$e(T) = \frac{\partial T}{\partial t} e(t) = \frac{1}{N} e(t) \text{.............(17)}$$

cioè l’errore da attribuire alla misura indiretta di *T* è *N* volte minore dell’errore di misura di *t*, che è a sua volta paragonabile all’errore di misura diretta di *T*.

MISURA INDIRETTA DEL PERIODO

Applichiamo le formule di propagazione degli errori alla determinazione del periodo *T*, che ricordiamo è dato da:

$$T = 2p\sqrt{\frac{m}{k}} \text{.............(18)}$$

la misura di *T* sarà semplicemente:

$$\bar{T} = 2p\sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}} \text{.............(19)}$$

considerato poi che la funzione *T* è del tipo prodotto di potenze:

$$T = Cm^{1/2}k^{-1/2} \text{.............(20)}$$

l’errore relativo è:

$$\frac{e(T)}{\bar{T}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{e(m)}{\bar{m}} + \frac{e(k)}{\bar{k}}\right) \text{.............(21)}$$

Abbiamo già visto precedentemente come determinare, con una misura diretta, il valore della massa e del suo errore.
Per quanto riguarda la costante elastica, usiamo una misura indiretta, riassunta nella formula:

$$k = \frac{m_2 - m_1}{l_2 - l_1} g = \frac{\Delta m}{\Delta l} g \text{.............(22)}$$

che a sua volta richiede la misura (diretta) delle masse e degli allungamenti. Applichiamo quindi la propagazione degli errori a *Dm*:

$$\langle \Delta m \rangle = \langle m_2 - m_1 \rangle = \overline{m}_2 - \overline{m}_1 \text{.............(23)}$$

dove per praticita` di scrittura si e` usata la parentesi angolata per indicare il valore misurato. Per l'errore otteniamo poi:

$$e(\Delta m) \leq \left| \left(\frac{\partial(\Delta m)}{\partial m_2} \right) \right| e(m_2) + \left| \left(\frac{\partial(\Delta m)}{\partial m_1} \right) \right| e(m_1) = |(+1)| e(m_2) + |(-1)| e(m_1) = e(m_1) + e(m2) \text{.............(24)}$$

con le solite considerazioni relative alla misura di ciascuna delle due masse.
Per *Dl* applichiamo le considerazioni fatte inizialmente sulla misura di una lunghezza.
Siccome anche l'espressione di *k* è del tipo prodotto di potenze:

$$k = C(\Delta m)^1 (\Delta l)^{-1} \text{.............(25)}$$

possiamo usare la formula dell'errore relativo:

$$\frac{e(k)}{\bar{k}} \leq \left| (+1) \frac{e(\Delta m)}{\langle \Delta m \rangle} \right| + \left| (-1) \frac{e(\Delta l)}{\langle \Delta l \rangle} \right| = \frac{e(\Delta m)}{\langle \Delta m \rangle} + \frac{e(\Delta l)}{\langle \Delta l \rangle} \text{.............(26)}$$

con il che abbiamo tutti gli ingredienti per il calcolo dell'errore relativo di *T*.

3 - CIFRE SIGNIFICATIVE

L'uso della calcolatrice semplifica molto il compito di ottenere risultati numerici precisi, ma comporta il pericolo di introdurre più cifre di quanto sia effettivamente giustificabile. Queste considerazioni sono particolarmente importanti quando si calcola la propagazione degli errori. Assumeremo che la variabile *x* abbia come valor medio e deviazione standard i seguenti valori:

$$\bar{x} = 5{,}378 \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1)$$

$$e(x) = 0{,}006 \ldots\ldots\ldots (1.2)$$

Nell'espressione decimale di un numero, la posizione di una cifra è tanto più significativa quanto più sta a sinistra, così il 5 rappresenta le unità che sono più significative dei decimi, rappresentate qui dal 3, che a sua volta sono più significativi dei centesimi, rappresentati dal 7, e così via.
Iniziamo dall'errore: **è buona regola specificarlo con una sola cifra diversa da zero** (talvolta due). Questo significa che se trovassimo per l'errore un valore di 0,00638, dovremmo riscriverlo come 0,006, poiché non ha molto senso mantenere l'8 che rappresenta i centomillesimi, o il 3 che rappresenta i decimillesimi, poiché sono frazioni della posizione più significativa, quella dei millesimi.
Il numero di cifre significative di *x* è il numero di cifre con significatività maggiore o uguale a quella dell'errore su *x*. Nel nostro caso *x* ha quattro cifre significative. Dal computo vanno esclusi gli zeri che occupano posti più significativi della prima cifra non nulla, ad esempio se x fosse 0,003564, i primi tre zeri non sarebbero significativi. Se il valore di *x* fosse 5,378947, le cifre 947 che seguono l'8 sarebbero non significative ed andrebbero eliminate, poiché non ha evidentemente senso mantenere cifre meno significative di quella dell'errore. Se *x* fosse 3,150, tutte le cifre sarebbe significative: anche lo zero può dunque essere una cifra significativa.
Le equazioni per il valore misurato, l'errore e l'errore relativo, nel caso la funzione dipenda da una sola variabile, assumono la forma:

$$\bar{F} = F(\bar{x}) \ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

$$e(F) = \left|\frac{dF}{dx}\right|_{\bar{x}} e(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

$$\left|\frac{e(F)}{\bar{F}}\right| = \left|\frac{1}{\bar{F}}\left(\frac{dF}{dx}\right)_{\bar{x}}\right| e(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

Facciamo alcuni semplici esempi:

1) *F(x)=nx* ove *n* è una costante moltiplicativa (intera o reale):

$$e(F) = ne(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

supposto ad esempio *n*=13, otteniamo:

$$\bar{F} = 69{,}91 \ldots\ldots\ldots\ldots (5.1)$$

$$e(F) = 0{,}08 \ldots\ldots\ldots\ldots (5.2)$$

La calcolatrice ci darebbe per l'errore 0,078, che abbiamo arrotondato a 0,08, e per *F* 69,914, che abbiamo arrotondato ai centesimi, perché l'errore è su questa posizione.

2) $F(x)=x^a$ ove *a* può assumere valori interi o reali:

$$\left|\frac{e(F)}{\bar{F}}\right| = \left|a\,\frac{e(x)}{\bar{x}}\right| \ldots\ldots\ldots (6)$$

supposto ad esempio *a*=7, otteniamo:

$$\bar{F} = 130.000 \ldots\ldots\ldots\ldots (7.1)$$

$$e(F) = 1000 \ldots\ldots\ldots\ldots (7.2)$$

Qui la calcolatrice ci darebbe 1016 per l'errore, che abbiamo arrotondato a 1000 e 130.120 per *F*, che abbiamo arrotondato alle migliaia. Osserviamo che in questo caso *F* ha un numero di cifre significative (tre) minore di *x* (quattro).
Per *a*=1/8, otteniamo:

$$\overline{F} = 1{,}2340 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.1)$$

$$e(F) = 0{,}0002 \ldots\ldots\ldots (8.2)$$

Invitiamo lo studente a fare i calcoli analogamente ai casi precedenti, per verificare i risultati. Osserviamo anche che ora *F* ha un numero di cifre significative (cinque) maggiore di *x* (l'ultima cifra di *F*, lo 0, è una cifra significativa): è quindi possibile che come risultato di un calcolo, il numero di cifre significative aumenti.

Usiamo ora le equazioni del valore misurato, errore ed errore relativo per il caso di due o più variabili. Accanto ai valori scelti per *x*, scegliamo per *y* i seguenti valori:

$$\overline{y} = 4{,}855 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9.1)$$

$$e(y) = 0{,}003 \ldots\ldots\ldots (9.2)$$

Facciamo alcuni esempi:

1) *F=x+y* :

$$\overline{F} = \overline{x} + \overline{y} = 10{,}233 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10.1)$$

$$e(F) \le e(x) + e(y) = 0{,}009 \ldots\ldots\ldots (10.2)$$

Lo studente verifichi che anche per *F=x-y* si ottiene la stessa espressione dell'errore.

2) *F=xy* :

$$\overline{F} = \overline{xy} = 26{,}11 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11.1)$$

$$\left|\frac{e(F)}{\overline{F}}\right| \le \left|\frac{e(x)}{\overline{x}}\right| + \left|\frac{e(y)}{\overline{y}}\right| = 0{,}002 \ldots\ldots\ldots\ldots (11.2)$$

$$e(F) = \left|\left(\frac{e(F)}{\overline{F}}\right)\overline{F}\right| = 0{,}04 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11.3)$$

Lo studente verifichi che anche per *F=x/y* si ottiene la stessa espressione dell'errore relativo.