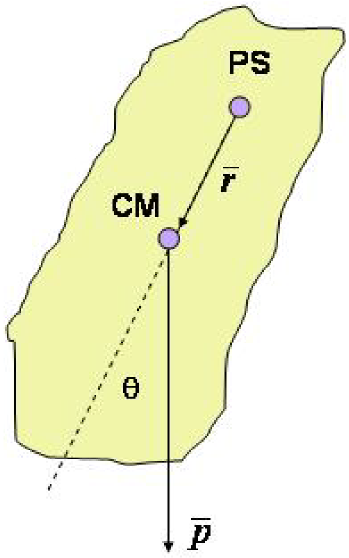
Determinazione del momento d'inerzia di un pendolo
(23 febbraio 2005)

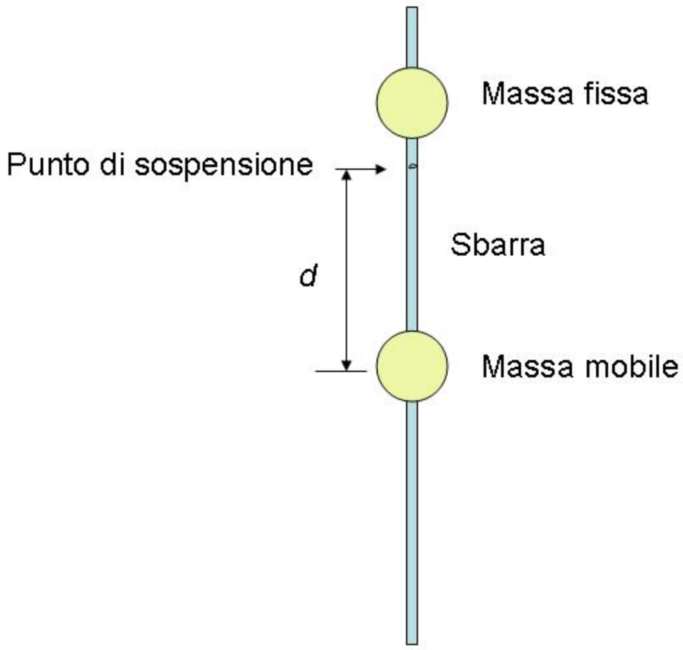
Consideriamo un corpo esteso (vedi figura seguente) che possa ruotare attorno ad un asse fisso passante per il punto di sospensione PS; si immagini tale asse perpendicolare al foglio. Possiamo considerare corpi anche di forma irregolare e con densità variabile da punto a punto. Sia *m* la massa del corpo e CM la posizione del centro di massa, introduciamo il vettore $\bar{r}$, distanza tra PS e CM, il vettore $\bar{p}$, peso del corpo e l'angolo θ definito dalla direzione dei due vettori.



Scelto come polo PS, possiamo scrivere la seconda equazione cardinale della meccanica, che descrive il moto del nostro corpo (sia il momento delle forze esterne che il momento della quantità di moto sono calcolati rispetto a questo polo): $-rp\sin\theta = I\dfrac{d\omega}{dt}$, ove ω è la velocità angolare dell'oscillazione e I è il momento d'inerzia del corpo **rispetto all'asse passante per PS**. Ricordiamo che la velocità angolare è la derivata dell'angolo rispetto al tempo, esplicitiamo *p* come prodotto di massa *m* e accelerazione di gravità *g* e dividiamo entrambi i membri per *I*. Otteniamo: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{rmg}{I}\sin\theta$. Il segno meno deriva dal fatto che, comunque si scelga il verso di θ, il verso del momento ha segno opposto. Notiamo che il fattore che moltiplica $\sin\theta$ a secondo membro, ha le dimensioni del quadrato di una frequenza (o meglio, pulsazione), denotiamolo quindi con $\Omega^2 = \dfrac{rmg}{I}$. Come usuale, consideriamo oscillazioni di piccola ampiezza, per cui sia possibile confondere il seno di un angolo con l'angolo stesso, ottenendo infine: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\Omega^2\theta$, che è la nota equazione del moto armonico. Presenteremo due metodi di misura, entrambi indiretti, del momento.

Misura del momento d’inerzia. I metodo.

Partiamo dalla relazione che lega Ω e il periodo di oscillazione T: $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ e risolviamo per il momento d’inerzia: $I = \frac{T^2}{4\pi^2} mgr$. Questa relazione ci permette di determinare I partendo da tre quantità misurabili: T, m, r. Il valore di g si suppone invece noto (ad esempio da misure precedenti). In pratica useremo come corpo esteso un pendolo di Kater. Esso è costituito (vedi figura seguente) da una sbarra su cui sono montate due masse a forma di disco che possono scorrere lungo la sbarra e da due coltelli che fungono da punti di sospensione. Nel nostro esperimento verrà utilizzato uno solo dei due coltelli per sospendere il pendolo, mentre l’altro rimarrà inutilizzato. Una delle due masse sarà considerata come fissa e la sua posizione rimarrà sempre la stessa. L’altra massa verrà invece spostata: in pratica per ogni posizione della massa mobile otteniamo un diverso ‘corpo esteso’ con un diverso valore del momento d’inerzia rispetto all’asse di sospensione. Questo ci permetterà di studiare come varia il momento d’inerzia del corpo in funzione della posizione della massa mobile.

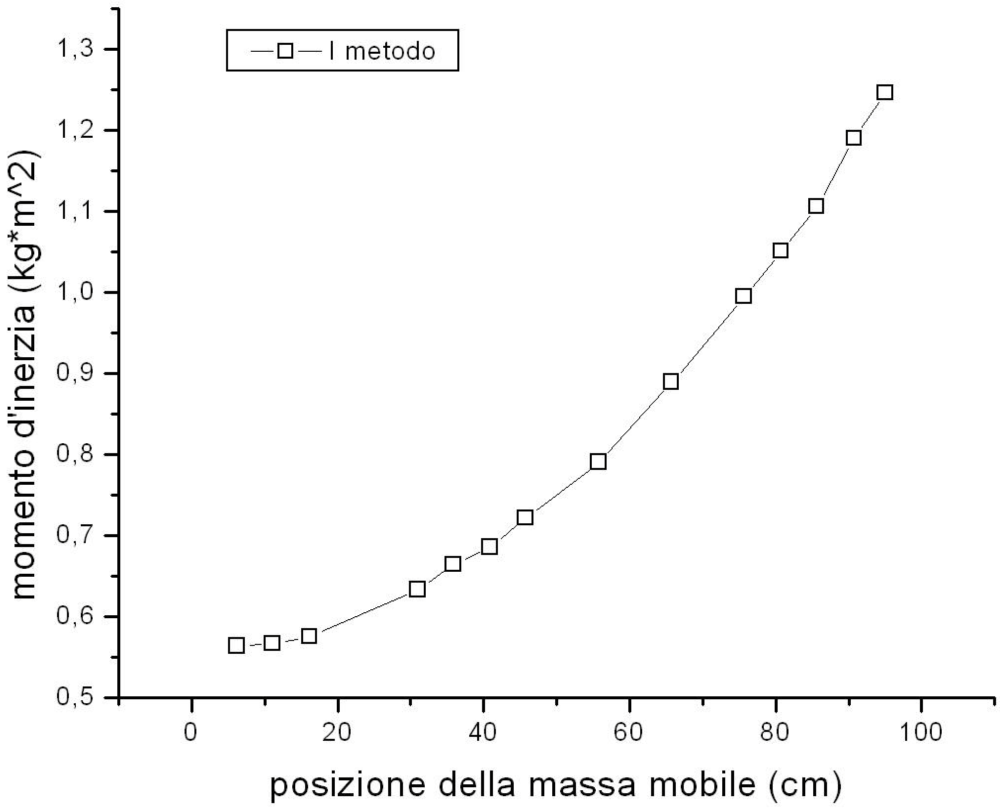


Chiamiamo d la distanza del centro del disco mobile dal punto di sospensione. Sia T che r sono funzioni di d, mentre m è indipendente da essa. Possiamo quindi scrivere: $I(d) = \frac{g}{4\pi^2} \cdot m \cdot T^2(d) \cdot r(d)$.

m sarà misurata una volta per tutte con una bilancia; T e r di volta in volta al cambiare di d (T con un cronometro, r con un metro). L’accelerazione di gravità g sarà invece considerata nota e pari a 9.81 m/s^2. La posizione r del centro di massa del pendolo si trova come segue: si pone la sbarra del pendolo su di un tondino e la si sposta fino a raggiungere l’equilibrio (instabile) con la sbarra in posizione orizzontale. Con un pennarello si segna il punto di contatto tra la sbarra e il tondino e si misura la sua distanza dal punto di sospensione. La posizione d del centro del disco mobile si ottiene come segue: si misura con un metro la distanza tra il punto di sospensione e il bordo più vicino del disco (anche qui risulta comodo segnare questa posizione con il pennarello), e le si somma metà del diametro del disco, misurata con un calibro. Si procederà quindi al riempimento di una tabella del tipo seguente:

d	*T*	*r*	*I*

In realtà non servirebbe misurare *d* per determinare *I*, ma è preferibile farlo, perché questo ci permette di confrontare le misure con quelle ottenute con il secondo metodo e avere così una conferma indipendente della loro bontà.
Riportiamo un grafico di alcune misure effettuate:



Determinazione dell'errore

Usiamo la formula dell'errore relativo massimo:

$$\frac{\varepsilon(I)}{I} \leq \frac{\varepsilon(m)}{m} + 2\frac{\varepsilon(T)}{T} + \frac{\varepsilon(r)}{r}$$

Dati i valori delle grandezze in gioco e le stime degli errori delle grandezze misurate direttamente, otteniamo per l'errore relativo sul momento d'inerzia un valore inferiore al 2%. Questo corrisponde sul grafico ad una differenza di valori minore od uguale alle dimensioni del quadratino che rappresenta i dati.

Misura del momento d'inerzia. II metodo.

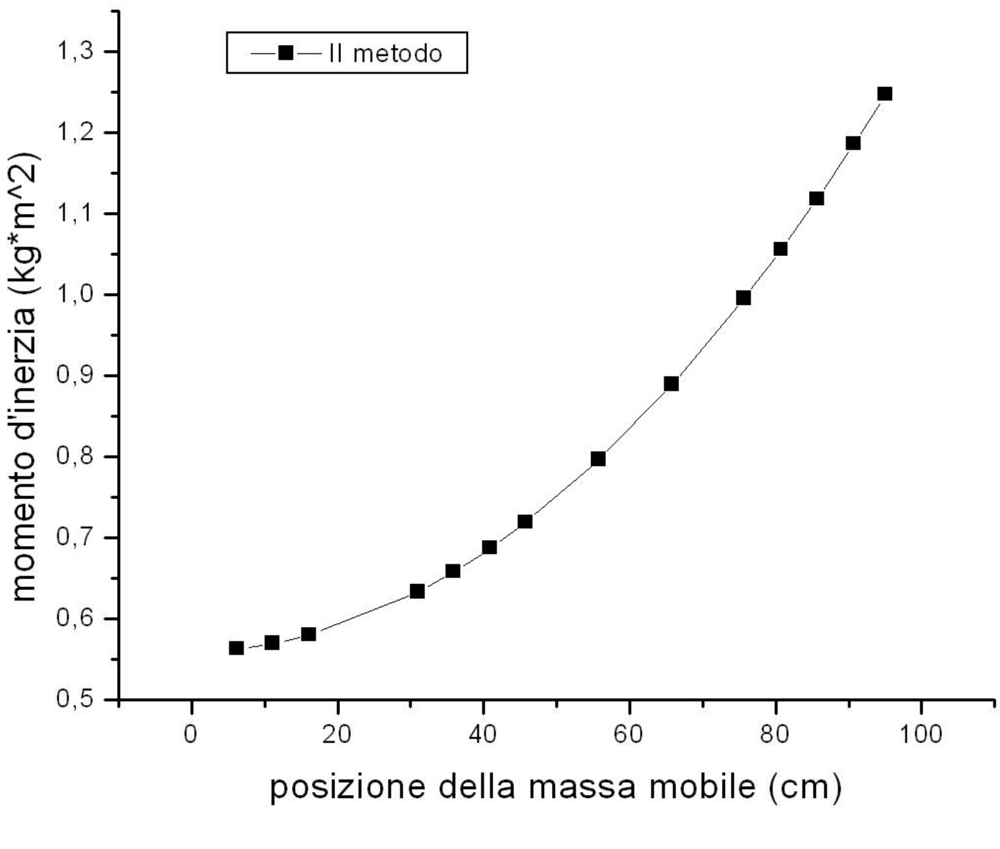
In questo metodo si parte dalla definizione del momento d'inerzia. Per un corpo composto come il pendolo si fa la somma dei momenti della sbarra e dei due dischi calcolati rispetto all'asse di rotazione. Nel far questo dobbiamo ricordare il teorema di Steiner che permette di determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse non baricentrico, purché sia noto il momento rispetto all'asse baricentrico parallelo al primo asse, la distanza d tra i due assi e la massa m del corpo: $I(d) = I_{CM} + md^2$. Detta d_s la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa della sbarra (non del pendolo) e m_s la massa della sbarra, avremo: $I^{(s)}(d_s) = I_{CM}^{(s)} + m_s d_s^2$. Similmente per il disco fisso e il disco mobile otteniamo: $I^{(df)}(d_{df}) = I_{CM}^{(df)} + m_{df} d_{df}^2$ e $I^{(dm)}(d) = I_{CM}^{(dm)} + m_{dm} d_{dm}^2$ rispettivamente, con significato corrispondente dei simboli. Di nuovo è il centro di massa dei dischi, e non del pendolo, che stiamo considerando. Si noti che $d_{dm} = d$. In prima approssimazione supporremo trascurabili i momenti di inerzia dei dischi rispetto al baricentro, riservandoci di dimostrarlo in un secondo momento. Detta L_s la lunghezza della sbarra, è noto che $I_{CM}^{(s)} = \frac{1}{12} m_s L_s^2$.

Le masse dei due dischi non possono essere misurate senza smontare il pendolo, ma il loro valore è stato misurato una volta per tutte e impresso sui dischi stessi prima del montaggio, si suppone quindi noto il loro valore (pari a 0.76 kg per entrambi). E' allora sufficiente misurare la lunghezza della sbarra e la sua massa (per differenza tra la massa totale del pendolo e le masse dei dischi) e le distanze dei centri della sbarra e dei dischi dal punto di sospensione. In definitiva otteniamo:

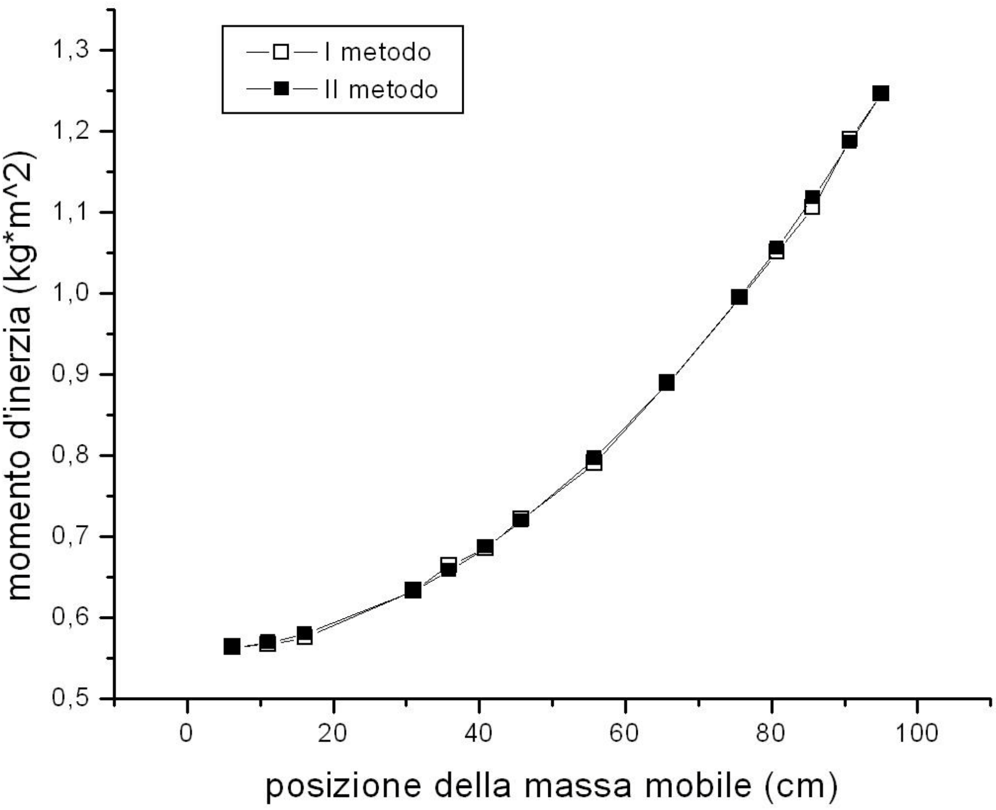
$$I_{tot}(d) = I_{CM}^{(s)} + m_s d_s^2 + m_{df} d_{df}^2 + m_{dm} d^2 = \left(\frac{1}{12} m_s L_s^2 + m_s d_s^2 + m_{df} d_{df}^2 \right) + m_{dm} d^2$$

ovvero $I_{tot}(d) = A + Bd^2$ ove A e B sono due costanti caratteristiche del pendolo. Ci aspettiamo dunque che il momento d'inerzia sia una funzione quadratica della distanza d.

Riportiamo un grafico di alcune misure effettuate con il secondo metodo:



Possiamo a questo punto paragonare sullo stesso grafico i valori del momento d'inerzia calcolati con la formula $I(d) = \frac{g}{4\pi^2} \cdot m \cdot T^2(d) \cdot r(d)$, con quelli calcolati con la formula $I(d) = A + Bd^2$:



Notiamo che l'accordo fra i due metodi è molto buono.
Il secondo metodo parte anche da quantità misurabili: le masse e le dimensioni geometriche delle parti che compongono il pendolo, **ma ipotizza inoltre** che questi corpi siano omogenei, perché è solo sotto questa ipotesi che è possibile calcolare i momenti d'inerzia nel modo semplice che abbiamo seguito. Il primo metodo invece usa quantità misurabili (T, m, r) senza fare ulteriori ipotesi sulla struttura del corpo e quindi risulta di applicabilità più generale. Per intenderci il primo metodo è applicabile anche ad un corpo di forma complessa come quello rappresentato nella prima figura, mentre, in questo caso, sarebbe praticamente impossibile (o comunque assai difficile) usare il secondo metodo.

Nota sull'approssimazione fatta

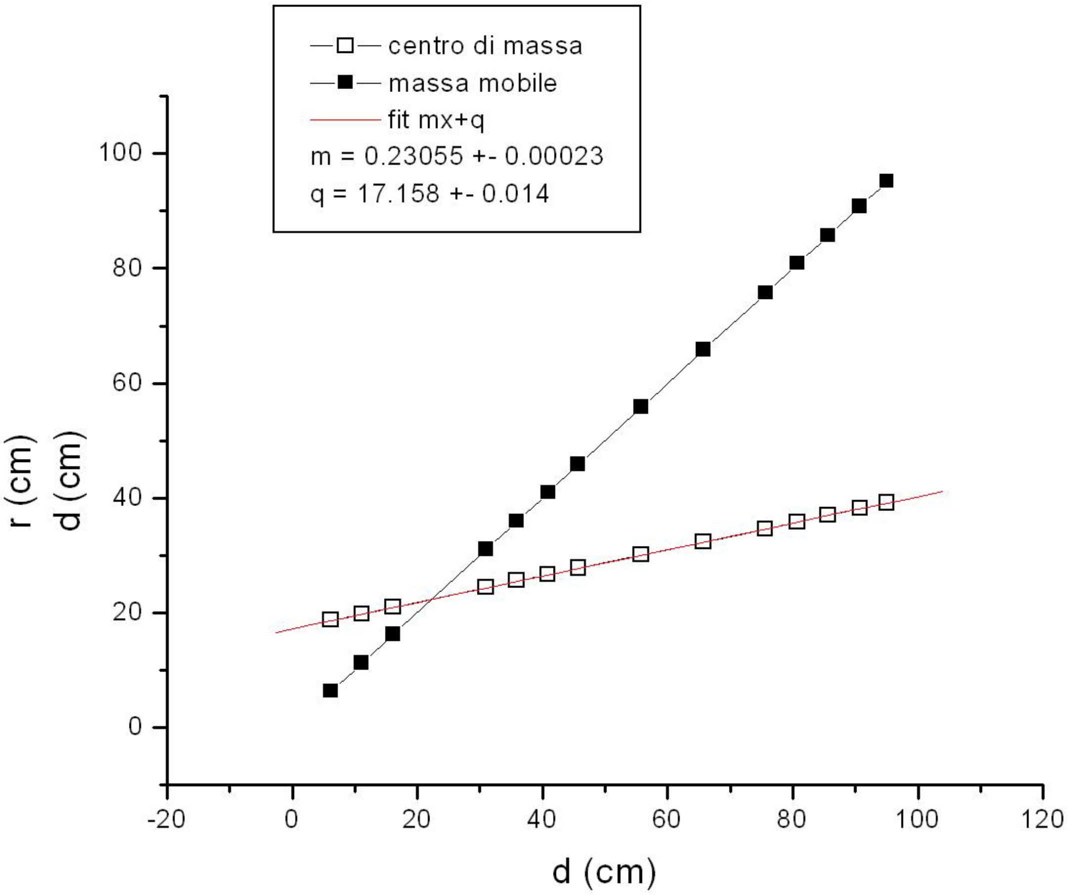
Giustifichiamo ora l'approssimazione fatta nel calcolo del momento d'inerzia. Abbiamo trascurato il momento d'inerzia dei due dischi rispetto al proprio baricentro, che in prima approssimazione, possiamo esprimere come: $2\frac{1}{2}m_d R_d^2$ ove R_d è il raggio dei dischi; questo momento va confrontato con quello calcolato precedentemente (la costante A). Tenendo conto dei valori dei parametri del pendolo che stiamo usando, il rapporto tra il momento d'inerzia dei due dischi e la costante A è dell'ordine dello 0.2%. Anche un calcolo più dettagliato, che tenga conto del fatto che il disco è forato per poter scorrere lungo l'asta, non cambia sostanzialmente la conclusione.

Posizione del centro di massa del pendolo

Scriviamo l'espressione del centro di massa del pendolo:

$$r = \frac{m_s d_s + m_{df} d_{df} + m_{dm} d}{m} = C + Dd$$

(ove, ricordiamo, *m* è la massa totale). Questa equazione ci dice che *r* dipende linearmente da *d*; esaminiamo il grafico di tale funzione:



Nel grafico è stato riportato anche l'andamento di *d* in funzione di *d*, che ovviamente, è la retta passante per l'origine di coefficiente angolare uguale ad 1. Questo è stato fatto per evidenziare che *r* dipende da *d* con un coefficiente angolare minore di 1, infatti esso vale $D = \frac{m_{dm}}{m}$, come si ricava dall'equazione precedente. E' possibile, attraverso una procedura di fit, estrarre i valori migliori dei parametri *C* e *D* della retta. Otteniamo in tal modo per il coefficiente angolare un valore di 0.2305. Questo parametro è importante perché ci permette una verifica indipendente del valore nominale della massa del disco mobile. Dalla definizione di D ricaviamo infatti: $m_{dm} = D \cdot m = 0.7545 kg$, cioè un valore che differisce da quello nominale (pari a 0.76 *kg*). Tale differenza è però abbastanza piccola (circa lo 0.7%) da non cambiare sostanzialmente i valori del momento d'inerzia che abbiamo calcolato col secondo metodo.