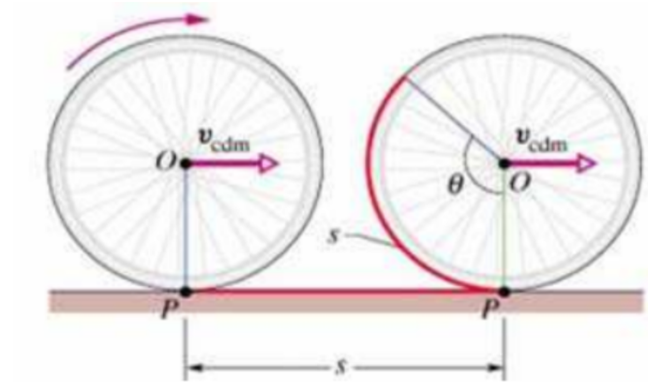
Moto di puro rotolamento

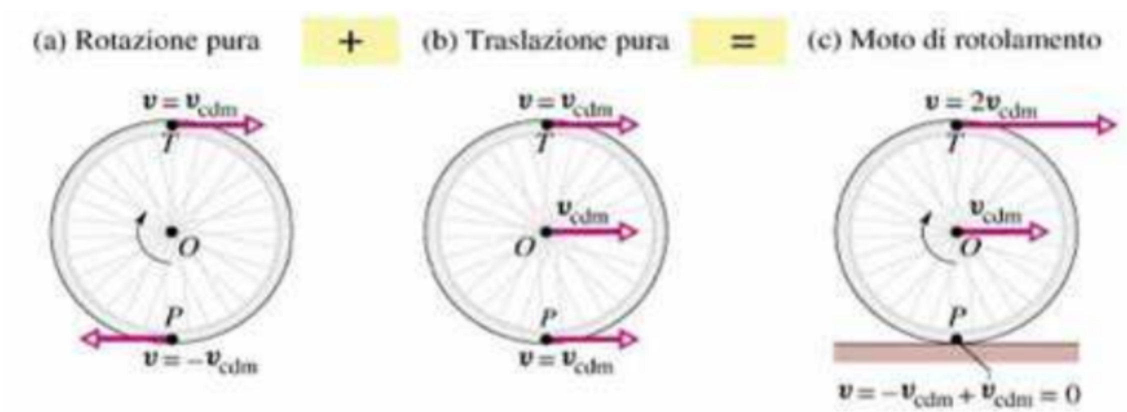
Si parla di *moto di puro rotolamento* quando un corpo rotola senza strisciare, ovvero la velocità del punto di contatto (P in figura) lungo il piano di contatto è *nulla*.



Le *condizioni di puro rotolamento* sono ($R =$ raggio della ruota):

$$s = R\theta; \quad v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega; \quad a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Il moto di puro rotolamento è descrivibile come un moto di traslazione

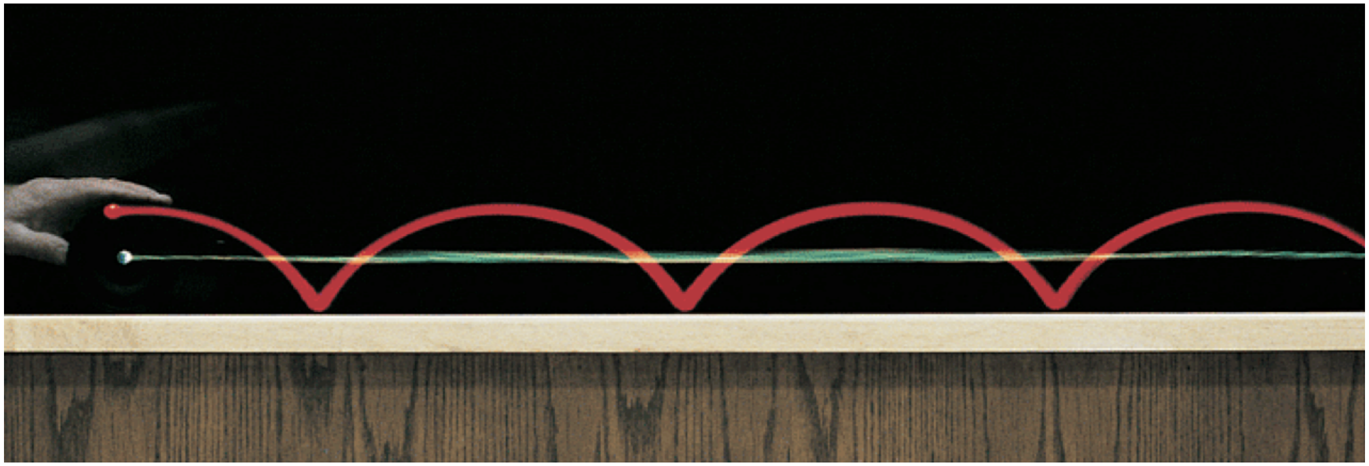


del centro di massa con velocità v_{cm}, più un moto rotatorio attorno al centro di massa con velocità angolare $\omega = v_{cm}/R$.

Moto di puro rotolamento II

E' immediato scrivere la legge oraria di un punto P sulla superficie esterna della ruota: assumendo $x(t=0)=0$, $y(t=0)=2R$,

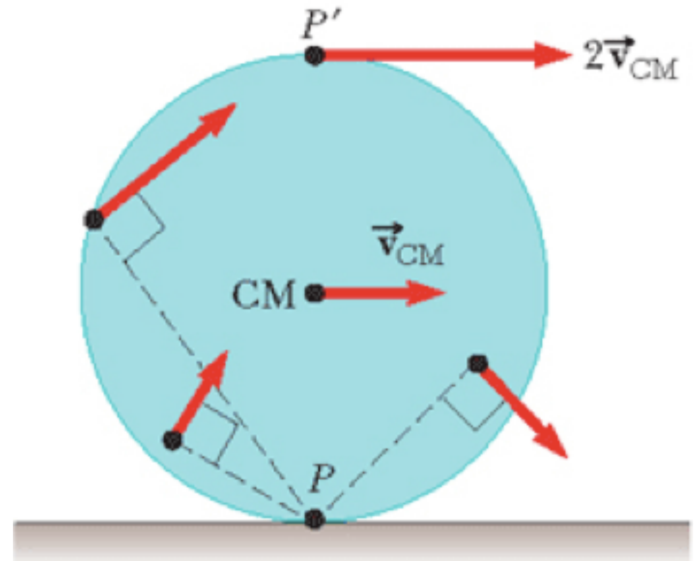
$$\begin{cases} x(t) &= R\sin(\omega t) + \omega R t \\ y(t) &= R\cos(\omega t) + R \end{cases}$$



In verde la traiettoria del centro di massa (che è anche il centro della ruota), in rosso la traiettoria del punto P, nota come *cicloide*

Moto di istantanea rotazione

Il moto di puro rotolamento può essere descritto alternativamente come un moto di rotazione attorno ad un asse *istantaneo* passante per il punto P, di velocità angolare ω. Il centro di massa ha velocità $v_{cm} = \omega R$, il punto P' ha velocità $2\omega R$, il punto P ha velocità nulla.



L'energia cinetica di un corpo che trasla e ruota è

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(MR^2 + I \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I' \omega^2, \quad I' = MR^2 + I$$

che coincide con l'energia cinetica, che è solo rotazionale, di un moto di istantanea rotazione: I' è il momento d'inerzia *attorno all'asse di istantanea rotazione* (teorema degli assi paralleli)

Forze e lavoro nel moto di puro rotolamento

Il moto di puro rotolamento richiede in generale la presenza di *attrito* nel punto di contatto. Tuttavia l'attrito *non fa lavoro*: $dW = \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = 0$ perché il punto P di contatto *è fermo*

Per convincersene, basta calcolare la velocità dall'equazione della cicloide

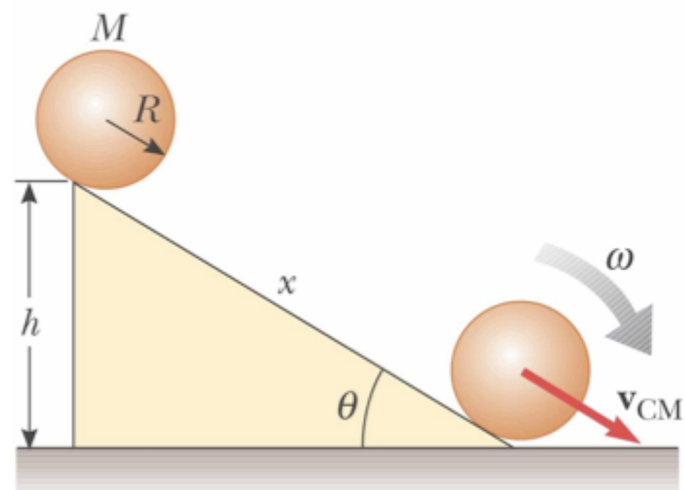
$$\begin{cases} v_x(t) & = & R\omega\cos(\omega t) + \omega R \\ v_y(t) & = & -R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

per $t = \pi/\omega$, ovvero quando $y(t) = 0$

Per lo stesso motivo, l'attrito è solo *statico*. Solo se il corpo oltre a ruotare *striscia* è presente attrito dinamico e dissipazione di energia.

Esempio: corpo che rotola su un piano inclinato

Consideriamo una sfera (o un cilindro) che rotola giù per un piano inclinato. Avremo $\boxed{v = \omega R}$, per la condizione di puro rotolamento. Possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità finale v.



Energia cinetica: $K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)$

($I =$ momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa)

Energia potenziale: $U = Mgy$, dove y è la quota del centro di massa.

Conservazione dell'energia ($v = 0$ all'istante iniziale):

$$E_i = Mg(h+R) = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) + MgR = E_f$$

Energia meccanica di un corpo che rotola

Si trova infine $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{2Mgh}{M + I/R^2}}}$.

Per una sfera: $I = \dfrac{2}{5}MR^2$, $v = \sqrt{\dfrac{10gh}{7}}$.

Per un cilindro: $I = \dfrac{MR^2}{2}$, $v = \sqrt{\dfrac{4gh}{3}}$.

Nota: tutto ciò è valido nell'ipotesi che il corpo rotoli senza strisciare

Nota: $v < \sqrt{2gh}$, velocità finale senza rotolamento, per qualunque I.
Perché?

Dinamica di un corpo che rotola

Risolviamo ora lo stesso problema con forze e momenti.

- Lungo il piano: $Ma = Mg\sin\theta - F_a$, dove F_a è la forza di attrito
- Ortogonale al piano: $N = Mg\cos\theta$, dove N è la reazione vincolare
- Rispetto al centro della sfera: $I\alpha = \tau = RF_a$, dove $\alpha = a/R$.

Sostituendo dall'ultima equazione $F_a = Ia/R^2$ nella prima, si ottiene $(M + I/R^2)a = Mg\sin\theta$ da cui:

$$a = \frac{Mg\sin\theta}{M + I/R^2}, \qquad \text{per una sfera:} \quad a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

ovvero un moto uniformemente accelerato, che può essere facilmente risolto e dà lo stesso risultato del calcolo precedente.

Forze in un corpo che rotola

Notare che

- l'attrito entra nelle equazioni del moto anche se non fa lavoro
- la forza di attrito vale $F_a = \frac{IF}{MR^2+I}$, dove $F = Mg\sin\theta$ è forza che spinge il corpo, ed è opposta a questa
- deve valere la condizione $F_a \leq \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta$ o altrimenti il corpo inizia a scivolare!

Risolviamo ora il problema come *moto di rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto istantaneo*. L'equazione del moto è

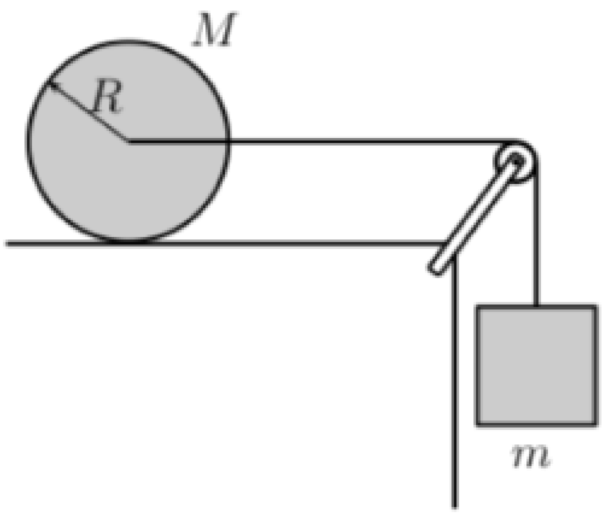
$$I'\alpha = \tau = RMg\sin\theta \qquad \text{dove} \qquad I' = I + MR^2$$

(teorema degli assi paralleli) da cui si ritrova il risultato precedente. Notare come la soluzione sia più semplice e l'attrito non compaia più.

Esercizio: Condizione di puro rotolamento

Un corpo di massa m trascina il centro di massa di un cilindro di massa M e raggio R. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono μ_s e μ_d. Qual è il massimo m per cui il moto del cilindro è di puro rotolamento?

Equazioni del moto:



$$\begin{cases} ma = mg - T \\ MA = T - F_a \\ I\alpha = RF_a \qquad (I = \frac{MR^2}{2}) \end{cases}$$

condizioni: $a = R\alpha$, $A = a$, $F_a \leq \mu_s Mg$

Sommando prima e seconda equazione: $(m + M)a = mg - F_a$

Dalla terza equazione: $\frac{M}{2}a = F_a$ (da cui $\alpha = \frac{F_a}{I}$)

Combinando con la precedente: $(m + \frac{3M}{2})a = mg$.

Condizione di rotolamento: $\frac{M}{2}a = F_a \leq \mu_s Mg$, da cui $\frac{m}{2m+3M} \leq \mu_s$

Notare che è sempre vera se $\mu_s \geq \frac{1}{2}$

Rotolamento con strisciamento

Cosa succede nel caso precedente se la condizione di puro rotolamento non è rispettata? Le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} ma &= mg - T \\ MA &= T - F_a \qquad (F_a = \mu_d M g) \\ I\alpha &= RF_a \qquad (I = \frac{MR^2}{2}) \end{cases}$$

dove $A = a$ e non c'è relazione fra $R\alpha$ e a. Sommando prima e seconda equazione si determina il moto del centro di massa del cilindro:

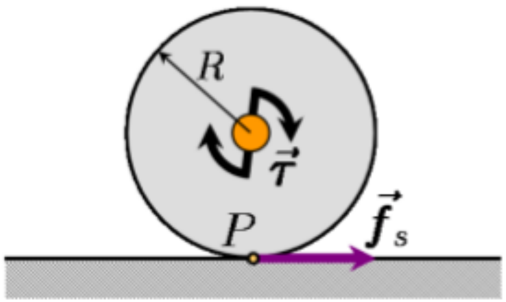
$$(m + M)a = mg - \mu_d M g \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{mg - \mu_d M g}{m + M}$$

La terza equazione determina il moto rotatorio del cilindro:

$$\alpha = \frac{\mu_d M g}{I}$$

Esempio: Moto causato da momento torcente

Nei casi precedenti è una forza esterna applicata al corpo che causa il rotolamento. In altri casi (esempio: ruota di automobile) è un *momento torcente* che causa il moto di rotazione



Dalle equazioni:

$$\begin{cases} Ma &= F_a \\ I\alpha &= \tau - RF_a \end{cases}$$

con la condizione $a = \alpha R$ di puro rotolamento otteniamo

$$\boxed{a = \frac{R\tau}{I + MR^2}, \qquad F_a = \frac{MR\tau}{I + MR^2}.}$$

Da notare che è la forza di attrito che spinge la ruota in avanti!
Deve ovviamente valere la condizione $F_a \le \mu_s N$, dove N è la reazione vincolare agente sulla ruota ($N = Mg$ in questo caso)

Moto causato da momento torcente e da forza, confronto

A parità di accelerazione, la forza di attrito è maggiore se il corpo è spinto da una forza esterna o da un momento torcente?

Per il caso del momento torcente:

$$a = \frac{R\tau}{I + MR^2}, \qquad F_a^{(1)} = \frac{MR\tau}{I + MR^2} = Ma$$

Per il caso di una forza esterna, possiamo usare i risultati ottenuti per il corpo che rotola da un piano inclinato:

$$a = \frac{FR^2}{I + MR^2}, \qquad F_a^{(2)} = \frac{IF}{I + MR^2} = \frac{Ia}{R^2},$$

dove $F = Mg\sin\theta$ è la forza che spinge il corpo. Si trova che $\boxed{F_a^{(1)} \geq F_a^{(2)}}$ perché $\dfrac{I}{R^2} \leq M$.