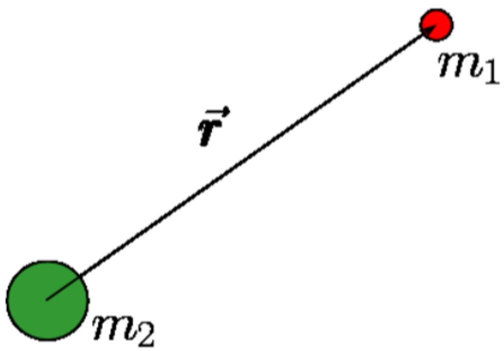
Forza gravitazionale

La forza gravitazionale è una delle quattro forze fondamentali della natura.



Due corpi puntiformi si attraggono secondo la *legge di gravitazione universale* (Newton, 1684). In particolare la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1 è pari a

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

dove $\hat{r}$ = versore del vettore $\vec{r}$, $G = 6.673 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 costante *universale*

La forza tra due corpi non puntiformi può essere calcolata per integrazione dei contributi infinitesimi. Si può dimostrare che l'attrazione gravitazionale esercitata da un corpo esteso di massa M e simmetria sferica su di un corpo puntiforme (o assimilabile a tale) di massa m è data da

$$\vec{F} = -\int \frac{Gm}{r^2}\hat{r}dM = -G\frac{mM}{R^2}\hat{R}$$

dove R è la distanza fra il centro della sfera di massa M e la particella di massa m (valida per $R > R_M$, raggio della sfera).

Campo gravitazionale

E' utile introdurre il concetto di *campo gravitazionale*: ad ogni punto dello spazio si associa un vettore $\vec{g}$. La forza gravitazionale agente su di una particella di massa m, infinitesima, è $\vec{F} = m\vec{g}$. Una sfera di massa M produce quindi un campo gravitazionale

$$\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\hat{R}$$

a distanza R dalla sua posizione.

L'integrale su di una superficie chiusa del *flusso* del campo $\vec{g}$ è una costante:

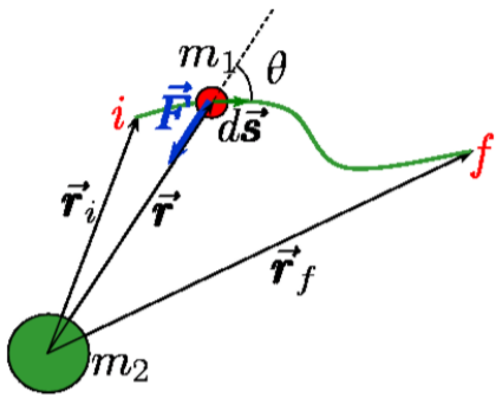
$$\int \vec{g} \cdot \hat{n} d\sigma = -4\pi GM, \qquad (\hat{n} = \text{direzione normale alla superficie})$$

dove M è la massa contenuta all'interno della superfice. Questo è il *teorema di Gauss*, valido per tutte le forze centrali dipendenti dall'inverso del quadrato della distanza.

La dimostrazione è ovvia per una superficie sferica con una massa puntiforme M al centro. Per una superficie generica, $\vec{g} \cdot \hat{n} d\sigma = R^2 g d\Omega$, dove Ω è l'angolo solido sotteso da $d\sigma$. Dato che $R^2 g = -GM$ e $\int d\Omega = 4\pi$, si ottiene il risultato cercato.

Con il teorema di Gauss è facile dimostrare il risultato della pagina precedente.

Energia potenziale gravitazionale



La forza gravitazionale è *conservativa*. Consideriamo il corpo 2 fermo, mentre il corpo 1 si sposta lungo un percorso qualsiasi tra i punti i ed f (vedi figura). Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale che agisce sul corpo 1 risulta essere indipendente dal percorso e sarà dato da

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Gm_1m_2 \int_i^f \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} = -Gm_1m_2 \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = -Gm_1m_2 \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]$$

da cui un'energia potenziale $\boxed{U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}}$ tale che $L = -U(r_f) + U(r_i)$.

L'energia potenziale gravitazionale non cambia scambiando i corpi fra loro, è sempre negativa e si annulla solo nel limite $r \to \infty$. L'energia potenziale gravitazionale di un corpo a quota h, $U(h) = mgh$, la si ottiene (a meno di una costante) ponendo $r = R_T + h$, dove R_T è il raggio della Terra, e sviluppando in serie per $h << R_T$:

$$U(h) = -G\frac{mM}{R_T + h} \simeq -G\frac{mM}{R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right) = U(0) + mgh, \qquad g = \frac{GM}{R_T^2}$$

Velocità di fuga

Consideriamo un corpo di massa m nel campo gravitazionale prodotto da un corpo di massa $M >> m$. L'energia meccanica E è conservata:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{cost.}$$

Notare che E può essere > 0 o < 0. Se $E < 0$, dato che $K \geq 0$, necessariamente

$$K = E - U \geq 0 \Rightarrow E + G\frac{mM}{r} \geq 0 \Rightarrow r \leq G\frac{mM}{|E|}$$

Il corpo di massa m è *intrappolato nel campo gravitazionale di M*: non può allontanarsi più di $r_{max} = GmM/|E|$. Se $E > 0$, il corpo può invece allontanarsi indefinitamente.

Si definisce *velocità di fuga* la minima velocità che un corpo che parte da una distanza r dal centro di M deve avere per sfuggire (completamente) alla sua azione gravitazionale.

Da $K_i + U_i = K_f + U_f$ con $U_f = 0$ e $K_f \geq 0$ si trova $\boxed{v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$.

La velocità necessaria per sfuggire all'attrazione della terra si ottiene ponendo $M = M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $r = R_T = 6.37 \times 10^6$ m, da cui $v_{fuga,T} = 1.12 \times 10^4$ m/s.

Orbita circolare di un satellite

Per un satellite che percorre un'orbita circolare, la forza centripeta necessaria è fornita dalla forza gravitazionale. Per un'orbita di raggio r percorsa a velocità v, vale

$$ma_c = m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow mv^2 = G\frac{Mm}{r} \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}U(r)$$

L'energia cinetica è quindi pari a metà dell'energia potenziale (in modulo). L'energia meccanica è sempre negativa e vale la metà dell'energia potenziale:

$$E = K + U(r) = \frac{1}{2}U(r) = -\frac{1}{2}mv^2,$$

mentre velocità e raggio dell'orbita sono legate da $rv^2 = GM$.

Il periodo dell'orbita è $T = 2\pi/\omega$ dove $\omega = v/r$ da cui

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

che è un caso particolare (per orbite circolari) della *terza legge di Keplero*.

Problema dei due corpi: energia meccanica

Consideriamo due corpi che interagiscono con forze gravitazionali. Prendiamo un sistema di riferimento con origine nel centro di massa ($m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$) e definiamo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \quad \mathrm{e} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r},$$
$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \quad \mathrm{e} \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v},$$

dove $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. L'energia cinetica del sistema diventa

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$$

La quantità $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ è detta *massa ridotta* del sistema (notare che $m_1 m_2 = \mu M$, con $M = m_1 + m_2$). L'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

è la stessa che per un corpo di massa μ in un campo gravitazionale *centrale*, ovvero *diretto verso un punto fisso*. In generale, il problema a due corpi può essere risolto come "problema di un corpo in un campo centrale" + "moto del centro di massa".

Problema dei due corpi: momento angolare

Il momento angolare sotto un campo gravitazionale centrale *è sempre conservato* in quanto la forza gravitazionale *ha momento nullo* rispetto al centro. Di conseguenza, il moto avviene *in un piano* ortogonale alla direzione del momento angolare.

Ciò vale in generale per qualunque forza centrale, per le quali il potenziale è funzione di r: $U = U(r)$ mentre la forza $\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{r}$ è sempre diretta lungo $\vec{r}$.

Indichiamo con ω la velocità angolare con cui i due corpi ruotano intorno all'asse passante per il loro centro di massa e perpendicolare al piano che li contiene. Il momento angolare totale è dato da

$$\ell = I_1\omega + I_2\omega = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega = \left[\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right] r^2\omega = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) r^2\omega = \mu r^2 \omega$$

come per il problema equivalente di un corpo di massa ridotta μ sotto l'effetto di un campo gravitazionale centrale.

Problema dei due corpi: traiettorie

Troviamo la traiettoria $r(\theta)$, con (r,θ) coordinate polari per il punto di massa μ. Dalle leggi di conservazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = E \\ \mu r^2 \omega = \ell \end{cases}$$

E, ℓ sono *costanti del moto*. Notiamo che $\vec{v} = d\vec{r}/dt = (dr/dt)\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ e che $\hat{r}$ e $\vec{\omega}$ sono perpendicolari, per cui $v^2 = (dr/dt)^2 + r^2\omega^2$. Esprimendo dr/dt come segue:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\omega^2,$$

si trova (dividendo per μ e ponendo $M = m_1 + m_2$):

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\omega^2 - \frac{GM}{r} = \frac{E}{\mu}, \qquad r^2\omega = \frac{\ell}{\mu}$$

Ricavando dalla seconda equazione $\omega = \ell/(\mu r^2)$ e sostituendo nella prima:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\frac{\ell^2}{\mu^2 r^4} - \frac{GM}{r} = \frac{E}{\mu}$$

Problema dei due corpi: soluzione

La soluzione generale della precedente equazione è nota ed ha la seguente forma

$$r(\theta) = \frac{k}{1 - e\cos\theta}$$

Sostituendo tale soluzione nell'equazione precedentemente trovata si trova che

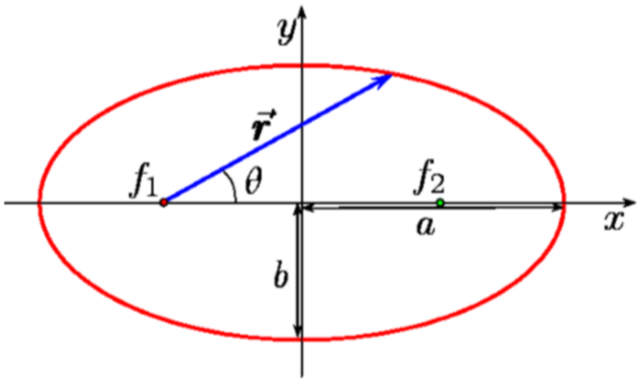
$$k = \frac{\ell^2}{\mu^2 GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu^3 G^2 M^2}}$$

Il parametro e è detto *eccentricità*. e può assumere valori tra 0 e ∞, a seconda del valore dell'energia:

- $E < 0$ (corpi legati): $0 \leq e < 1$
- $E > 0$ (corpi non legati): $e > 1$
- $E = 0$ (caso limite): $e = 1$

Orbite ellittiche

Per $0 \leq e < 1$ la nostra soluzione:



$$r(\theta) = \frac{k}{1 - e\cos\theta}$$

descrive un'*ellisse* con semi assi maggiore e minore pari a

$$a = \frac{k}{1 - e^2}, \qquad b = \frac{k}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 - e^2}$$

e con i *fuochi* f_1 e f_2 rispettivamente in $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, dove $c = ea$. Dai valori di k ed e in funzione di ℓ e E, troviamo

$$a = -\frac{\mu GM}{2E}, \qquad b = \frac{\ell}{\sqrt{-2\mu E}}$$

Con $e = 0$ l'ellisse degenera in una circonferenza.

Per $e = 1$ o $e > 1$ la curva diventa una parabola o un'iperbole, rispettivamente.

Leggi di Keplero

Le leggi di Keplero, ricavate in base alle osservazioni astronomiche, furono formulate ben prima che la *legge di gravitazione universale* di Newton le spiegasse:

1. i pianeti del sistema solare seguono delle orbite ellittiche con il Sole in uno dei due fuochi;

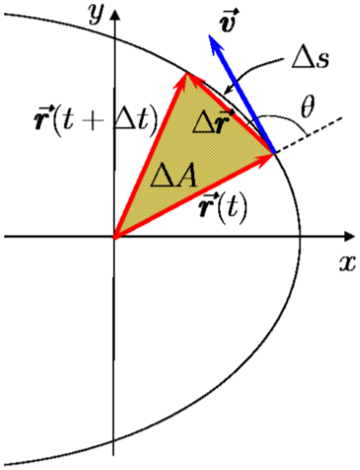
2. nel moto dei pianeti del sistema solare, aree uguali vengono spazzate in tempi uguali;

3. il quadrato del periodo di rivoluzione dei pianeti del sistema solare è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

La prima legge deriva dai risultati precedenti: il Sole ha massa molto superiore a quella dei pianeti e può quindi essere assunto come fisso.

La seconda legge si dimostra tramite la relazione fra *velocità areolare* e momento angolare. La terza legge si dimostra a partire dalla seconda legge.

Seconda legge di Keplero e velocità areolare



Consideriamo degli assi con origine nel punto fisso e indichiamo con $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+\Delta t)$ i raggi vettori che individuano la posizione del corpo lungo la traiettoria agli istanti t e $t+\Delta t$ (vedi figura). Nel tempo Δt il vettore $\vec{r}$ spazza l'area ΔA delimitata dai due lati di lunghezza $r(t)$ e $r(t+\Delta t)$ e l'arco di traiettoria di lunghezza Δs. Per piccoli Δt, $r(t+\Delta t) \simeq r(t)$ e $\Delta s \simeq \Delta r$, da cui

$$\Delta A \simeq \frac{1}{2} r \Delta r \sin(\pi - \theta) \simeq \frac{1}{2} r dr \sin\theta$$

che in termini infinitesimi diventa $dA = \frac{1}{2} r dr \sin\theta = \frac{1}{2} r dr \sin\theta dt$. La *velocità areolare* $\dot{A}$ è l'area spazzata per unità di tempo dal vettore $\vec{r}$:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin\theta,$$

e possiamo introdurre il vettore $\vec{\dot{A}}$ come

$$\vec{\dot{A}} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2\mu} \vec{\ell}.$$

Dalla conservazione del momento angolare segue la seconda legge di Keplero.

Terza legge di Keplero

Dato che la velocità areolare $\dot{A}$ è costante, possiamo scrivere $\dot{A}T = A$, dove T è il periodo e A l'area dell'ellisse.

Sappiamo che $\dot{A} = \ell/2\mu$, dalla slide precedente. L'area dell'ellisse è $A = \pi ab$, da cui, usando $b = \dfrac{\ell}{\sqrt{-2\mu E}}$:

$$T = \frac{2\mu}{\ell}\pi ab = \pi a\sqrt{\frac{-2\mu}{E}}.$$

Da $a = -\dfrac{\mu GM}{2E}$ si ricava $-E = \dfrac{\mu GM}{2a}$ e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}$$

che elevata al quadrato dà la terza legge di Keplero.