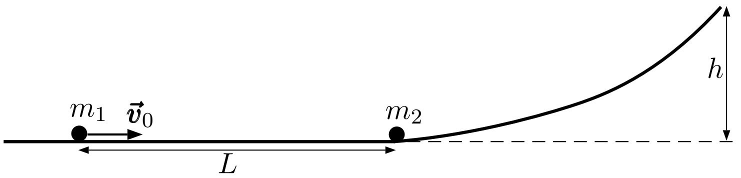
Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)

A.A. 2019/2020, Sessione di Gennaio/Febbraio, Primo Appello, 21 Gennaio 2020, Prova scritta

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1 Due corpi puntiformi sono posti su un piano orizzontale ad una distanza iniziale $L = 140$ cm (vedi figura). Il corpo 1 ha massa $m_1 = 1.00$ kg e all'istante $t = 0$ viene lanciato verso destra con una velocità iniziale $\vec{v}_0$; il corpo 2, di massa $m_2 = 3.00$ kg, è inizialmente fermo e si trova in corrispondenza del inizio di una rampa la cui sommità è ad una quota h rispetto al piano orizzontale. Nel suo moto lungo il piano orizzontale il corpo 1 risente di un attrito dinamico con $\mu_k = 0.500$. La rampa invece è perfettamente liscia.



Sapendo che l'urto tra i due corpi è perfettamente elastico e che, dopo l'urto, il corpo 1 torna indietro fermandosi esattamente nella sua posizione originaria, determinare:

a) il modulo v_0 della velocità iniziale del corpo 1;

b) la velocità del corpo 2 subito dopo l'urto;

c) il valore massimo valore di h, h_{max}, sapendo che il corpo 2 riesce a raggiungere la sommità della rampa.

Soluzione Indichiamo con v_1 e v_1' le velocità del corpo 1 subito prima e subito dopo l'urto con il 2; indichiamo invece con v_2' la velocità del corpo 2 subito dopo l'urto.

Sapendo che dopo l'urto il corpo 1 raggiunge esattamente il punto originario, utilizzando il teorema dell'energia cinetica, possiamo scrivere

$$-\frac{1}{2}m_1(v_1')^2 = -f_k L = -\mu_k m_1 g L,$$

dove $f_k = \mu_k m_1 g$ è il modulo della forza di attrito dinamico. Pertanto otteniamo

$$v_1' = -\sqrt{2\mu_k g L},$$

dove si è scelta la radice negativa sapendo che $\vec{v}_1'$ è diretta verso sinistra.

Per l'urto, applicando le conservazioni della quantità di moto e dell'energia cinetica, possiamo scrivere le seguenti

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2 & (*) \\ \\ m_1 v_1^2 = m_1 (v_1')^2 + m_2 v_2^2 & (**) \end{cases}$$

Tali equazioni si possono riscrivere come segue

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2 \\ \\ m_1[v_1^2 - m_1(v_1')^2] = m_2 v_2^2 \end{cases}$$

dalle quali, dividendole membro a membro, si ottiene la seguente

$$v_1 + v_1' = v_2.$$

Mettendo questa relazione a sistema con la $(*)$ e risolvendo, si ricava

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} v_1'; \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} v_1'$$

Conseguentemente, si ha

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} v_1' = \frac{2m_1}{m_2 - m_1} \sqrt{2\mu_k g L} = 3.71 \text{ m/s}.$$

Per calcolare la velocità iniziale del corpo 1 riutilizziamo il teorema dell'energia cinetica applicandolo al suo primo spostamento e scrivendo

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -f_k L = -\mu_k m_1 g L$$

e da questa si ricava

$$v_0^2 = v_1^2 + 2\mu_k g L \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2\mu_k g L}$$

e quindi

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\right)^2 (v_1')^2 + 2\mu_k g L} = \sqrt{\left[\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\right)^2 + 1\right] 2\mu_k g L} = 8.29 \text{ m/s}.$$

Nel moto del corpo 2 sulla rampa non ci sono attriti: quindi si conserva l'energia meccanica. Conseguentemente, il valore massimo di h corrisponderà alla quota in corrispondenza della quale il corpo 2 si fermerà. Cioè dovrà essere

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g h_{max} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h_{max} = \frac{v_2^2}{2g} = 70.2 \text{ cm}.$$

PROBLEMA 2 Su di un piano orizzontale sono posti il corpo 1, di massa $m_1 = 50.0$ kg, e un cilindro omogeneo di raggio $R = 20.0$ cm e massa $m_2 = 30.0$ kg (vedi figura). Il centro di massa del cilindro e il cubo sono agganciati tramite una corda inestensibile di massa trascurabile.

Sull'asse del cilindro può essere applicata una coppia di momento $\vec{\tau}$ in verso orario (vedi figura). L'attrito statico e dinamico tra entrambi i corpi ed il piano di appoggio è determinato dai coefficienti $\mu_s = 0.700$ e $\mu_k = 0.400$. Determinare:

a) il massimo valore del modulo di $\vec{\tau}$, $\tau_{eq,max}$, entro cui entrambi i corpi rimangono in equilibrio statico;

Supporre poi che venga applicato un $\vec{\tau}$ di modulo $2\tau_{eq,max}$ e che il risultato sia che i centri di massa dei due corpi rimangono fermi, mentre il cilindro prende a ruotare sul posto.

b) Dimostrare che la situazione prospettata è compatibile con le condizioni imposte;

c) Determinare l'accelerazione angolare del cilindro.

Soluzione Se entrambi i corpi sono in equilibrio statico, applicando la seconda legge della dinamica nelle forme lineare (ad entrambi) e angolare (all'asse del cilindro), potremo scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} 0 = T - f_{1s} & (1) \\ 0 = f_{2s} - T & (2) \\ 0 = \tau - R f_{2s} & (3) \end{cases}$$

dove f_{1s} e f_{2s} sono i moduli delle forze di attrito statico sul corpo 1 e sul cilindro, mentre T è il modulo della tensione della corda. Da queste ottiene

$$\tau = R f_{2s}; \qquad T = f_{2s}; \qquad f_{1s} = T = f_{2s}.$$

Quindi, tenendo presente che

$$f_{1s} \leq \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g = 343 \text{ N}; \qquad f_{2s} \leq \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g = 206 \text{ N},$$

si vede immediatamente che l'equilibrio statico sarà possibile fino a che

$$\tau \leq \tau_{eq,max} = \mu_s m_2 g R = 41.2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Consideriamo ora il caso in cui all'asse del cilindro è applicata una coppia di momento $\tau = 2\tau_{eq,max} = 2\mu_s m_2 g R = 82.4\ \mathrm{N\cdot m}$. Le equazioni del moto nelle condizioni descritte nel testo del problema sono le seguenti

$$\begin{cases} 0 = T - f_{1s} & (4) \\ 0 = f_{2k} - T = \mu_k m_2 g - T & (5) \\ I_{cm}\alpha = \tau - R f_{2k} = 2\tau_{eq,max} - \mu_k m_2 g R & (6) \end{cases}$$

Dalle (4) e (5) si ottiene

$$T = \mu_k m_2 g \qquad \Rightarrow \qquad f_{1s} = T = \mu_k m_2 g = 118\ \mathrm{N}.$$

che è perfettamente compatibile con la quiete del corpo 1 (essendo $f_{1s} < \mu_s m_1 g = 343$ N)!
Infine, dalla (6) si ricava

$$\alpha = \frac{4\tau_{eq,max}}{m_2 R^2} - \frac{2\mu_k g}{R} = \frac{4\mu_s m_1 g R}{m_2 R^2} - \frac{2\mu_k g}{R} = \left(\frac{2\mu_s m_1}{m_2} - \mu_k\right)\frac{2g}{R} = 98.1\ \mathrm{rad/s^2}.$$

Anche se questo va al di là di quanto richiesto dal testo del problema, si potrebbe controllare che ipotizzando il moto dei centri di massa dei due corpi, si arriva sempre ad un assurdo. Ad esempio, si potrebbe ipotizzare che il cilindro si muova di moto di puro trascinando il corpo 1. Le equazioni del moto sarebbero le seguenti

$$\begin{cases} m_1 a = T - f_{1k} & (7) \\ m_2 a = f_{2s} - T & (8) \\ I_{cm}\dfrac{a}{R} = 2\tau_{eq,max} - R f_{2s} & (9) \end{cases}$$

dove a è l'accelerazione (comune) dei centri di massa dei due corpi e si è già utilizzata la condizione di puro rotolamento $\alpha = a/R$. Risolvendo la (9), otteniamo

$$f_{2s} = \frac{2\tau_{eq,max}}{R} - \frac{1}{2}m_2 R^2 \cdot \frac{a}{R^2} = 2\mu_s m_2 g - \frac{1}{2}m_2 a$$

dove si è esplicitato che $I_{cm} = \frac{1}{2}m_2 R^2$. In tali condizioni, se vogliamo che sia $f_{2s} \leq f_{2s,max} = \mu_s m_2 g$ dovrebbe essere

$$f_{2s} = 2\mu_s m_2 g - \frac{1}{2}m_2 a \leq \mu_s m_2 g \qquad \Rightarrow \qquad a \geq 2\mu_s g.$$

Ma combinando le eq.ni (7) e (8) con quest'ultima si ricava

$$f_{2s} = f_{1k} + (m_1 + m_2)a = \mu_k m_1 g + (m_1 + m_2)a,$$

dalla quale, ponendo $a \geq 2\mu_s g$, si ottiene la condizione

$$f_{2s} \geq [\mu_k m_1 + 2\mu_s(m_1 + m_2)]g,$$

che è un assurdo, dato che f_{2s}, come si è già detto, non può mai superare il valore $\mu_s m_2 g$!
Come ultimo controllo si potrebbe supporre che il cilindro slitti trascinando il corpo 1. In tal caso le eq.ni del moto sarebbero le seguenti

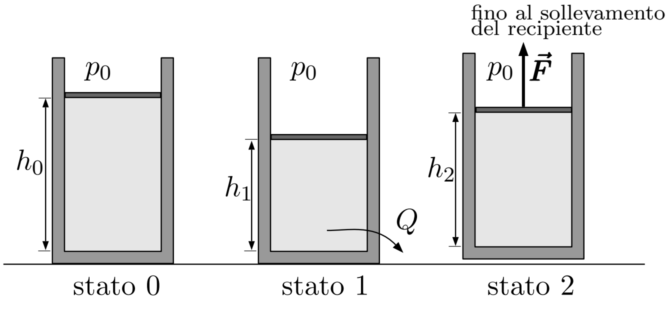
$$\begin{cases} m_1 a = T - f_{1k} \\ m_2 a = f_{2k} - T \\ I_{cm}\alpha = 2\tau_{eq,max} - R f_{2k} \end{cases}$$

dove ora a e α devono essere considerate come indipendenti.
Dalle prime due si otterrebbe

$$(m_1 + m_2)a = f_{2k} - f_{1k} = \mu_k(m_2 - m_1)g \qquad \Rightarrow \qquad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\mu_k g < 0$$

che è già un assurdo perché, ovviamente, i due corpi non possono accelerare verso sinistra!

PROBLEMA 3 Un recipiente cilindrico ad asse verticale, di sezione interna $A = 4.00\ \mathrm{dm}^2$ e massa $M = 100$ kg, è chiuso superiormente da un pistone a tenuta di sezione A e massa trascurabile, che può scorrere verticalmente con attrito trascurabile.



Recipiente e pistone sono costituiti da un materiale abiabatico.
Il recipiente contiene n moli di un gas ideale **biatomico** e l'ambiente circostante è alla pressione atmosferica normale p_0. In queste condizioni (stato 0) il pistone si trova ad una distanza $h_0 = 40.0$ cm dal fondo e il gas è ad una temperatura $T_0 = 300$ K (vedi figura).

a) Calcolare n.

Poi, si estrae lentamente calore dal gas fino a che il pistone è a distanza $h_1 = 30.0$ cm dal fondo (stato 1).

b) Determinare il calore Q estratto dal gas nella trasformazione e la sua nuova temperatura T_1.

Successivamente, il pistone viene lentamente tirato verso l'alto (tramite una forza applicata ad esso) fino a che il recipiente non si stacca dal pavimento (stato 2).

c) Calcolare la distanza finale h_2 a cui si porta il pistone dal fondo del recipiente e la nuova temperatura T_2 del gas.

Soluzione Tenendo presente che il volume iniziale occupato dal gas è pari a $V_0 = Ah_0$, il numero di moli sarà

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{p_0 A h_0}{RT_0} = 0.650 \text{ mol.}$$

Durante l'estrazione del calore la pressione dell'ambiente circostante rimane costante e pari a p_0. Pertanto, se nel passare dallo stato 0 allo stato 1 la distanza del pistone dal fondo del recipiente si riduce h_1, possiamo scrivere

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = \frac{V_1}{V_0} T_0 = \frac{h_1}{h_0} T_0 = 225 \text{ K.}$$

Conseguentemente, tenendo presente che il calore specifico a pressione costante del gas è $c_p = \frac{7}{2}R$, la quantità di calore scambiata dal gas è

$$Q = nc_p(T_1 - T_0) = \frac{7}{2} nR \left(\frac{h_1}{h_0} - 1 \right) T_0 = -1.42 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

Quindi dal gas viene estratta una quantità di calore $|Q| = 1.42 \cdot 10^3$ J.
Quando il sistema raggiunge lo stato 2 (in cui il recipiente non poggia più sul pavimento), cos'è che sostiene il recipiente? Ovviamente, il peso del recipiente dovrà essere bilanciato dalla risultante delle forze di pressione (diretta verso l'alto) causata dalla riduzione di pressione del gas (causata dalla sua espansione). L'equilibrio del recipiente comporta

$$(p_0 - p_2)A - Mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = p_0 - \frac{Mg}{A} = 7.680 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

Nel passaggio dallo stato 1 allo stato 2, il gas non scambia calore con l'ambiente (recipiente e pistone sono adiabatici): quindi, dato che il pistone viene anche sollevato lentamente, il gas subisce una trasformazione adiabatica reversibile. Pertanto potremo scrivere

$$p_0 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{p_0}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{1/\gamma}$$
$$\Rightarrow \qquad h_2 = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{5/7} h_1 = 1.22 \cdot h_1 = 36.6 \text{ cm,}$$

dove abbiamo abbiamo usato il fatto che per un gas biatomico è $\gamma = 7/5$.
Analogamente, per le temperature abbiamo

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$
$$\Rightarrow \qquad T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{2/5} T_1 = 0.923 \cdot T_1 = 208 \text{ K.}$$
