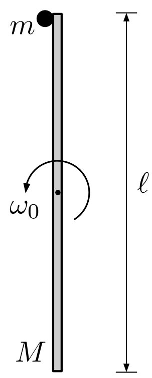
Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2019/2020, Sessione di Gennaio/Febbraio, Secondo Appello, 7 Febbraio 2020, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1 Una sbarra sottile rigida, di massa $M = 5.00$ kg e lunghezza $\ell = 120$ cm è disposta orizzontalmente e può ruotare con attrito trascurabile intorno ad un asse verticale passante per il suo centro (vedi la figura a fianco in cui la sbarra è vista dall'alto). Ad un estremo della sbarra è saldato un punto materiale di massa $m = 1.50$ kg.
Il sistema (sbarra + punto materiale) sta ruotando ad una velocità angolare $\omega_0 = 100$ giri/min e, ad un certo istante, il punto materiale di massa m si stacca dalla sbarra.
Dapprima, supponendo che nel distacco si conservi l'energia cinetica del sistema, determinare:



a) le velocità lineare, v, del punto materiale e angolare, ω, della sbarra subito dopo il distacco;

Invece, nell'ipotesi che dopo il distacco del punto materiale la sbarra risulti in quiete, calcolare:

b) la velocità v del punto materiale subito dopo il suo distacco;

c) la variazione ΔK di energia cinetica del sistema, mostrando che è positiva;

d) suggerire una modalità di distacco che possa giustificare il valore positivo di ΔK.

Soluzione Il distacco del corpo di massa m dalla sbarra può essere visto come un urto (anche se al contrario) in cui, dato che la sbarra è vincolata, non si conserva la quantità di moto del sistema. Infatti, all'occorrenza, l'asse intorno al quale ruota la sbarra eserciterà delle forze sul sistema in modo tale che il centro della sbarra non si sposti. Ma dato che tali forze hanno sede (sono applicate) in tale punto, il momento angolare del sistema calcolato proprio rispetto a tale punto si conserverà. E questo sarà indipendente dalla conservazione o meno dell'energia cinetica.
Detto questo, supponiamo che nel distacco l'energia cinetica del sistema sia conservata e affrontiamo la domanda a). Le due seguenti relazioni esprimono le conservazioni del momento angolare e dell'energia cinetica

$$\begin{cases} I\omega_0 = I_{cm}\omega + \dfrac{1}{2}mlv \\ \\ \dfrac{1}{2}I\omega_0^2 = \dfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

dove I e I_{cm} sono, rispettivamente, i momenti d'inerzia dell'intero sistema e della sola sbarra calcolati rispetto all'asse di rotazione. Ovviamente si ha

$$I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2 = 0.600 \text{ kg}\cdot\text{m}^2; \qquad I = I_{cm} + \frac{1}{4}m\ell^2 = 1.14 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Perciò, ricavando ω dalla prima e sostituendo nella seconda, dopo qualche passaggio (dove è utile tenere presente che $I - I_{cm} = \frac{1}{4}m\ell^2$), si ricava la seguente equazione per la velocità v

$$4v^2 - 4\ell\omega_0 v + \ell^2\omega_0^2 = 0,$$

dalla quale otteniamo

$$v = \frac{2\ell\omega^0 \pm \sqrt{4\ell^2\omega_0^2 - 4\ell^2\omega_0^2}}{4} = \frac{\ell\omega_0}{2} = 6.28 \text{ m/s}.$$

Conseguentemente si ha anche

$$\omega = \frac{2I\omega_0 - m\ell v}{I_{cm}} = \frac{2I\omega_0 - \frac{m\ell^2\omega_0}{2}}{2I_{cm}} = \frac{4I - m\ell^2}{4I_{cm}}\omega_0 = \omega_0 = 10.5 \text{ rad/s} = 100 \text{ giri/min}.$$

Come si vede, in tal caso, la velocità di rotazione della sbarra rimane uguale a quella che aveva prima del distacco. D'altronde, a guardar bene, anche la velocità del punto materiale rimane uguale! Questi fatti stanno a dimostrare che la conservazione dell'energia cinetica può manifestarsi solo se il punto materiale fosse, di fatto, solo appoggiato alla sbarra e non saldato ad essa.
In effetti, è facile vedere che in questo specifico caso si conserva anche la quantità di moto del sistema. Questo è dovuto al fatto che, come appena detto, il punto materiale di massa m non è saldato alla sbarra e quindi, nel suo distacco, di fatto non esercita forze impulsive sulla sbarra che, conseguentemente, può continuare a ruotare alla stessa velocità angolare. Perciò, anche l'asse intorno a cui ruota la sbarra non produce forze esterne e da qui la conservazione della quantità di moto.
Nel caso in cui la sbarra si fermi dopo il distacco di m, ovviamente l'energia cinetica non sarà conservata e quindi possiamo usare solo la conservazione del momento angolare summenzionata. Ora potremo scrivere

$$I\omega_0 = \frac{1}{2}m\ell v \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{2I}{m\ell}\omega_0 = \frac{2\left(\frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\right)}{m\ell}\omega_0 = \frac{(M+3m)\ell\omega_0}{6m} = 13.3 \text{ m/s}.$$

L'energia cinetica iniziale del sistema è

$$K_i = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 62.5 \text{ J}.$$

La variazione di energia cinetica del sistema è quindi

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{4I^2}{m^2\ell^2}\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \left(\frac{4I}{m\ell^2} - 1\right)K_i = \frac{4I_{cm}}{m\ell^2}\cdot K_i = \frac{M}{4m}\cdot K_i = 52.1 \text{ J}.$$

che dimostra che l'energia cinetica è aumentata.
Usualmente, quando l'energia non si conserva, entrano in gioco delle dissipazioni. Ma le dissipazioni producono riduzioni, non aumento di energia! Nel presente caso, l'aumento di energia non può essere dovuto a dissipazioni; l'unica possibilità è che ci sia stata la trasformazione di qualche altra energia in energia cinetica aggiuntiva. Ad esempio: il distacco di m potrebbe essere stato causato da una piccola carica esplosiva con conseguente trasformazione di energia chimica in energia cinetica; in alternativa, il corpo di massa m potrebbe essere in posizione da una congegno a catapulta che ad un certo punto è scatta trasformando dell'energia potenziale elastica in energia cinetica.

PROBLEMA 2 Per mezzo di una pompa dell'acqua viene prelevata da un lago e inviata fino ad una località di montagna attraverso un tubo di diametro $d = 15.0$ cm. La superficie del lago e la pompa sono a quota $h_1 = 500$ m, mentre il villaggio si trova a quota $h_2 = 2000$ m. L'acqua viene pompata al ritmo di 100 m^3 al giorno.
Nell'ipotesi che non ci siano dissipazioni, ne nella pompa ne nel tubo, determinare:

a) la velocità dell'acqua all'interno del tubo;
b) la pressione della stessa all'uscita dalla pompa;
c) la potenza che deve essere fornita alla pompa durante il pompaggio dell'acqua.

Soluzione Dai dati del problema abbiamo che la portata volumica del tubo è pari a

$$R_V = 100 \text{ m}^3/\text{giorno} = 1.1574\cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 1.1574 \ \ell/\text{s}.$$

Da questa, essendo $R_V = Av$ dove A è la sezione del tubo e v la velocità dell'acqua, otteniamo immediatamente

$$v = \frac{R_V}{A} = \frac{4R_V}{\pi d^2} = 6.55\cdot 10^{-2} \text{ m/s}.$$

Il moto dell'acqua nel tubo è stazionario e quindi tra l'uscita dalla pompa e l'uscita dell'acqua in quota possiamo applicare Bernoulli ottenendo

$$p + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad \Rightarrow \qquad p = p_0 + \rho g(h_2 - h_1) = 1.48\cdot 10^7 \text{ Pa} = 146 \text{ atm}.$$

Ora, per valutare la potenza della pompa, possiamo ragionare come segue. Una massa $\Delta m = \rho \Delta V$ di acqua inizialmente in quiete alla superficie del lago (alla quota h_1), dopo essere stata aspirata dalla pompa, raggiunge la quota h_2 acquisendo un'energia meccanica

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 + \Delta m \cdot g(h_2 - h_1) = \left[\frac{1}{2}v^2 + g(h_2 - h_1)\right]\Delta m.$$

In un intervallo di tempo Δt la massa Δm di acqua espulsa dalla pompa è pari a

$$\Delta m = \rho R_V \Delta t,$$

e quindi l'energia acquisita dall'acqua (per mezzo della pompa) nel tempo Δt è

$$\Delta E = \left[\frac{1}{2}v^2 + g(h_2 - h_1)\right]\rho R_V \Delta t.$$

Non essendovi dissipazioni tale energia corrisponde anche all'energia che il motore che tiene in azione la pompa dovrà utilizzare nello stesso intervallo di tempo. Perciò, la potenza prodotta dal motore è

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \left[\frac{1}{2}v^2 + g(h_2 - h_1)\right]\rho R_V = 17.0 \text{ kW}.$$

Notare: essendo v molto piccola, la potenza della pompa è praticamente tutta spesa per produrre il salto di pressione necessario a spingere l'acqua fino al 2000 m.

PROBLEMA 3 Un recipiente cilindrico con pareti adiabatiche è diviso in due parti da un pistone a tenuta anch'esso adiabatico libero di scorrere lungo l'asse del cilindro stesso. Lo scomparto 1 del recipiente contiene $n_1 = 1.00$ mol di un gas ideale **monoatomico**; nello scomparto 2 abbiamo $n_2 = 2.50$ mol di un gas ideale **biatomico**. Il volume complessivo del recipiente è $V = 50.0$ dm^3.
Sapendo che inizialmente il sistema è in equilibrio e che in tale condizione i due gas sono alle temperature $T_{1i} = 250$K e $T_{2i} = 300$K, si determini:

a) il rapporto V_2/V_1 tra i volumi dei due scomparti e le pressioni dei due gas.

Successivamente, il pistone viene bloccato e (come per magia) reso permeabile al calore. Al raggiungimento del nuovo equilibrio, determinare:

b) la temperatura e le pressioni dei gas nei due scomparti;

c) di quanto varia l'entropia del sistema.

Infine, se il pistone venisse sbloccato e lasciato libero di muoversi,

d) quali sarebbero i volumi finali dei due scomparti quando il sistema raggiunge il nuovo stato di equilibrio?

Soluzione Essendo il pistone libero di muoversi, l'equilibrio comporta che le pressioni dei gas nei due scomparti debbano essere uguali: $p_{1i} = p_{2i} = p_i$. Conseguentemente, dalla legge dei gas ideali abbiamo

$$p_i = \frac{n_1 R T_{1i}}{V_{1i}} = \frac{n_2 R T_{2i}}{V_{2i}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_{2i}}{V_{1i}} = \frac{n_2 T_{2i}}{n_1 T_{1i}} = 3.00,$$

dalle quali si ricava facilmente che

$$V_{1i} = \frac{1}{4}V = 12.5 \text{ dm}^3; \quad V_{2i} = \frac{3}{4}V = 37.5 \text{ dm}^3; \qquad p_i = \frac{4 n_1 R T_{1i}}{V} = 1.66 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.64 \text{ atm}.$$

Ora, se il pistone viene bloccato in quella posizione e reso permeabile al calore, i due gas potranno scambiare calore e raggiungere l'equilibrio termico. Ma, dato che il recipiente rimane adiabatico, il sistema non potrà scambiare calore con l'esterno. Pertanto, osservando che i gas non compiono lavoro (il pistone non si sposta), dalla 1^a legge della termodinamica abbiamo

$$\Delta E_{int,1} + \Delta E_{int,2} = Q_1 + Q_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n_1 c_{V,1}(T_f - T_{1i}) + n_2 c_{V,2}(T_f - T_{2i}) = 0,$$

dalla quale si ricava

$$T_f = \frac{n_1 c_{V,1} T_{1i} + n_2 c_{V,2} T_{2i}}{n_1 c_{V,1} + n_2 c_{V,2}} = \frac{3n_1 T_{1i} + 5n_2 T_{2i}}{3n_1 + 5n_2} = 290.32 \text{ K}.$$

Le pressioni dei due gas sono quindi

$$p_{1f} = \frac{n_1 R T_f}{V_{1i}} = \frac{4n_1 R T_f}{V} = 1.93{\cdot}10^5 \text{ Pa} = 1.91 \text{ atm}; \qquad p_{2f} = \frac{n_2 R T_f}{V_{2i}} = \frac{4n_2 R T_f}{3V} = 1.61{\cdot}10^5 \text{ Pa} = 1.59 \text{ atm}.$$

La variazione di entropia del sistema si ottiene ricordando che per un gas ideale che passa tra gli stati i e f si ha

$$\Delta S = n c_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

Nel nostro caso, considerando i gas nei due scomparti e tenendo presente che i loro volumi non cambiano, abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 c_{V,1} \ln\left(\frac{T_f}{T_{1i}}\right) + n_2 c_{V,2} \ln\left(\frac{T_f}{T_{2i}}\right) = \frac{3}{2} n_1 R \ln\left(\frac{T_f}{T_{1i}}\right) + \frac{5}{2} n_2 R \ln\left(\frac{T_f}{T_{2i}}\right) = 0.160 \text{ J/K}.$$

Se il pistone venisse sbloccato ovviamente (notare che $p_{1f} > p_{2f}$) tenderebbe a muoversi in modo che il volume dello scomparto 1 aumenti. E chiaramente, la cosa procederà fino a che la pressione finale nei due scomparti non si equilibri. Ovviamente, nello stato finale, la temperatura dei due gas sarà la stessa, anche se questo non vuol dire che si manterrà pari alla T_f calcolata sopra! Comunque, indicando con p'_f e T'_f le comuni pressione e temperatura dei due gas nel nuovo stato finale, possiamo scrivere

$$p'_f V'_{1f} = n_1 R T'_f; \qquad p'_f V'_{2f} = n_2 R T'_f \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V'_{2f}}{V'_{1f}} = \frac{n_2}{n_1} = 2.50,$$

e quindi

$$V'_{1f} = \frac{V}{3.50} = \frac{2}{7} V = 14.3 \text{ dm}^3; \qquad V'_{2f} = \frac{2.50}{3.50} V = \frac{5}{7} V = 35.7 \text{ dm}^3.$$