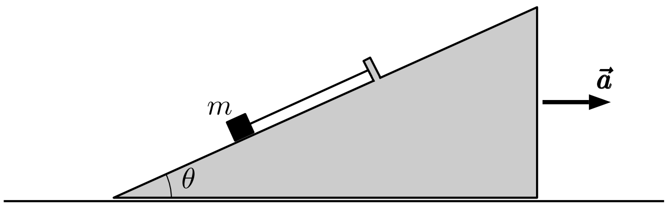
Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2019/2020, Sessione di Giugno/Luglio, Primo Appello, 24 Giugno 2020, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1 Un corpo di massa $m = 2.50$ kg è appoggiato su un cuneo ed è mantenuto in posizione tramite una corda ideale (inestensibile e di massa trascurabile) con l'altro estremo fissato al cuneo stesso (vedi figura). Il cuneo, la cui superficie piana superiore è inclinata di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale, può scivolare senza attrito sul piano sottostante.
Supponendo che il cuneo si muova di moto uniformemente accelerato verso destra (come indicato in figura) con accelerazione a, determinare:

A) le ampiezze della reazione normale $\vec{\boldsymbol{N}}$ agente sul corpo di massa m e della tensione T della corda, nel caso di $a = g$;
B) il minimo valore di a, a_{min}, al di sopra del quale il corpo di massa m si stacca dal cuneo;
C) l'angolo α (rispetto all'orizzontale) che la corda avrebbe nel caso di $a = \frac{5}{4} \cdot a_{min}$, dove a_{min} è quello calcolato al punto B).



Soluzione Finché il corpo di massa m poggia sul cuneo, oltre alla forza di gravità $m\vec{\boldsymbol{g}}$ esso risentirà della reazione normale $\vec{\boldsymbol{N}}$ (da parte del cuneo) e della forza $\vec{\boldsymbol{T}}$ diretta verso il punto di ancoraggio della corda e di modulo pari alla tensione della corda stessa. Dato che il corpo si muove solidalmente con il cuneo dovrà essere

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = m\vec{\boldsymbol{g}} + \vec{\boldsymbol{N}} + \vec{\boldsymbol{T}}.$$

Proiettando tale relazione vettoriale lungo un asse x orizzontale verso destra e un asse y verticale verso l'alto otteniamo le seguenti

$$\begin{cases} ma = -N\sin\theta + T\cos\theta \\ 0 = -mg + N\cos\theta + T\sin\theta \end{cases}$$

Conseguentemente, dalla prima ricaviamo la seguente

$$T = \frac{ma + N\sin\theta}{\cos\theta},$$

che inserita nella seconda ci permette di ottenere

$$\frac{(ma + N\sin\theta)\sin\theta}{\cos\theta} + N\cos\theta - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ma\sin\theta + N(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = mg\cos\theta,$$

e quindi

$$N = mg\cos\theta - ma\sin\theta; \qquad T = ma\cos\theta + mg\sin\theta.$$

Nel caso di $a = g$ abbiamo

$$N = mg\cos\theta - mg\sin\theta = mg(\cos\theta - \sin\theta) = mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 8.98 \text{ N};$$

e

$$T = mg\cos\theta + mg\sin\theta = mg(\cos\theta + \sin\theta) = mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 33.5 \text{ N}.$$

Quando il corpo si staccherà dal cuneo la reazione normale si annullerà. Quindi, per a_{min} abbiamo

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad g\cos\theta = a\sin\theta \quad \Rightarrow \quad a = a_{min} = \frac{g}{\tan\theta} = \sqrt{3}\cdot g = 17.0 \text{ m/s}^2.$$

Per accelerazioni del cuneo maggiori di a_{min}, il corpo si stacca dal cuneo e la corda sarà inclinata (rispetto all'orizzontale) di un angolo $\alpha < \theta$. In tal caso, data l'assenza di $\vec{\boldsymbol{N}}$, dovrà essere $m\vec{\boldsymbol{a}} = m\vec{\boldsymbol{g}} + \vec{\boldsymbol{T}}$ e quindi

$$\begin{cases} ma = T\cos\alpha \\ 0 = -mg + T\sin\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{ma}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad ma\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg$$

e quindi

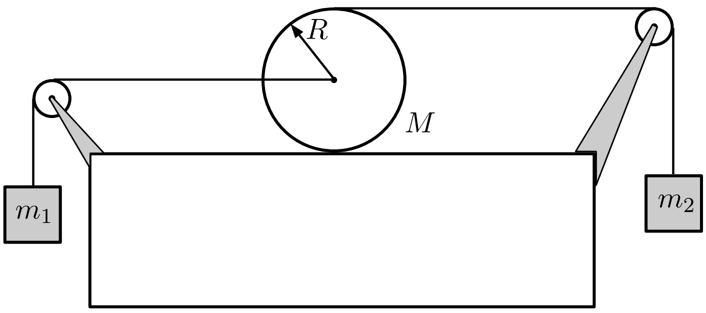
$$\tan\alpha = \frac{g}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{g}{a}\right) = \arctan\left(\frac{g}{\frac{5}{4}\cdot a_{min}}\right) = \arctan\left(\frac{4}{5\sqrt{3}}\right) = 24.8°.$$

PROBLEMA 2 Un cilindro omogeneo, di massa $M = 15.0$ kg e raggio $R = 20.0$ cm è appoggiato su un piano orizzontale. Al suo centro di massa è agganciata una corda ideale al cui altro estremo è appeso (anche tramite una puleggia ideale) un corpo di massa $m_1 = 5.00$ kg. Intorno al cilindro è avvolta una seconda corda ideale al cui altro estremo è appeso (tramite una seconda puleggia ideale) un corpo di massa m_2. Supponendo che la corda avvolta intorno al cilindro non scivoli rispetto alla sua superficie e che il cilindro stesso non scivoli mai sul piano di appoggio, determinare:

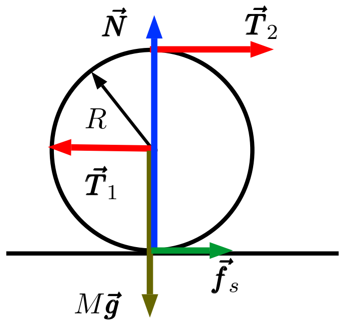
A) la massa che deve avere il corpo 2, $m_{2,eq}$, affinché l'intero sistema sia in equilibrio statico, nonché il modulo e la direzione della forza di attrito statico agente sul punto del cilindro in contatto con il piano di appoggio;

B) l'accelerazione del centro di massa del cilindro quando è $m_2 = 2\cdot m_{2,eq}$.

C) il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito statico, $\mu_{s,min}$, affinchè il cilindro possa effettivamente muoversi come nel punto B) senza scivolare sul piano.



Soluzione Le forze che agiscono sul cilindro sono quelle indicate nella figura a fianco cove $\vec{\boldsymbol{T}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{T}}_2$ sono le forze determinate dalle due corde, mentre $\vec{\boldsymbol{f}}_s$ è la forza di attrito statico che, per scelta personale, abbiamo supposto diretta verso destra.



Pertanto, applicando la seconda legge della dinamica nelle forme lineare e angolare al cilindro possiamo scrivere le seguenti (asse x orizzontale verso destra e asse y verticale verso l'alto):

$$\begin{cases} 0 = T_1 - m_1 g \\ 0 = T_2 - m_2 g \\ 0 = T_2 - T_1 + f_s \\ 0 = N - Mg \\ 0 = RT_2 - Rf_s \end{cases}$$

Quindi, si ottengono immediatamente

$$m_2 = m_{2,eq} = \frac{1}{2} m_1 = 2.50 \text{ kg}; \qquad f_s = T_2 = m_2 g = \frac{1}{2} m_1 g = 24.5 \text{ N}.$$

Se la massa del corpo 2 è pari a $2 \cdot m_{2,eq} = m_1$ il sistema non sarà più in equilibrio: il corpo 2 scenderà, il corpo 1 salirà mentre il cilindro rotolerà verso destra. Ora, l'uso della seconda legge (nelle due forme) ci porta alle seguenti

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \\ m_1 a_2 = m_1 g - T_2 \\ M a_{cm} = T_2 - T_1 + f_s \\ 0 = N - Mg \\ I_{cm} \alpha = RT_2 - Rf_s \end{cases} \tag{$*$}$$

dove le prime due riguardano i corpi 1 e 2 e per essi si sono scelti due assi verticali orientati concordemente al loro moto. a_{cm} e α sono le accelerazioni lineare (del centro di massa) e angolare del cilindro e $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ il suo momento d'inerzia rispetto all'asse per il suo c.d.m.
Se il cilindro non slitta, il suo moto è di puro rotolamento: quindi $\alpha = \dfrac{a_{cm}}{R}$. Inoltre è

$$a_1 = a_{cm}; \qquad a_2 = 2a_{cm}.$$

Utilizzando tali relazioni, estraendo T_1 e T_2 dalle prime due equazioni delle ($*$) e sostituendole nella terza e la quinta sempre delle ($*$), e sostituendo l'espressione di I_{cm}, si ottengono le seguenti

$$\begin{cases} (M + 3m_1)\, a_{cm} = f_s \\ \left(\frac{1}{2} M + 2m_1\right) a_{cm} = m_1 g - f_s \end{cases}$$

Da queste si ricava

$$a_{cm} = \frac{2m_1}{3M + 10m_1} g = 1.03 \text{ m/s}^2; \qquad f_s = \frac{2(M + 3m_1)m_1}{3M + 10m_1} g = 31.0 \text{ N}$$

Infine, dato che $f_s \leq \mu_s N$, abbiamo

$$\mu_s \geq \frac{f_s}{N} \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \mu_{s,min} = \frac{f_s}{Mg} = \frac{2(M + 3m_1)m_1}{(3M + 10m_1)M} = 0.210.$$

PROBLEMA 3 Un recipiente cilindrico di volume $V = 2.5 \cdot 10^{-2}$ m^3, con pareti adiabatiche, è diviso in due scomparti da un pistone a tenuta di spessore e massa trascurabili, costituito da un buon conduttore termico e libero di muoversi con attrito trascurabile. Il primo scomparto è occupato da $n_1 = 1.50$ mol di un gas ideale monoatomico, mentre il secondo contiene $n_2 = 2.50$ moli di un gas ideale biatomico.
All'inizio il pistone è bloccato in una posizione tale da dividere il recipiente in due scomparti di uguale volume. In tali condizioni i due gas sono in equilibrio termico alla temperatura $T_i = 300$ K.

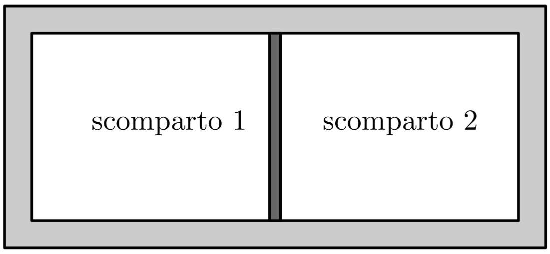
A) Determinare le pressioni, p_{1i} e p_{2i}, dei gas.

Poi il pistone viene sbloccato e lasciato libero e il sistema dopo un pò di tempo raggiunge, spontaneamente, l'equilibrio termodinamico e meccanico. Sapendo che la pressione finale dei gas nei due scomparti è $p_f = 3.93 \cdot 10^5$ Pa:

B) determinare i volumi finali, V_{1f} e V_{2f}, dei due scomparti e la temperatura T_f dei gas;

C) dire come si potrebbe definire la trasformazione che ha portato il sistema dallo stato iniziale (quello del punto A)) all'attuale stato finale, specificando, giustificando la risposta, se è reversibile o irreversibile;

D) calcolare la variazione di energia interna, ΔE_{int}, subita dal sistema in tale trasformazione.



Soluzione Per il calcolo delle pressioni dei gas nello stato iniziale abbiamo tutti dati, quindi si ha

$$p_{1,i} = \frac{n_1 R T_i}{V/2} = \frac{2 n_1 R T_i}{V} = 2.99 \cdot 10^5 \text{ Pa}; \qquad p_{2,i} = \frac{n_2 R T_i}{V/2} = \frac{2 n_2 R T_i}{V} = 4.99 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Quando il pistone viene sbloccato prenderà a muoversi verso lo scomparto 1, dato che questo ha una pressione più bassa. Osservare che, in tal caso, il movimento del pistone segue una dinamica *spontanea* e cioè determinata dalle spinte che esse riceve a causa delle differenze di pressione e alla fine (al raggiungimento dell'equilibrio meccanico, si posizionerà in un punto tale da rendere le pressioni dei due scomparti uguali. Inoltre, il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico presuppone (essendo il pistone permeabile al calore) che nello stato finale i due gas avranno anche la stessa temperatura T_f.
In tali condizioni, per i due gas potremo scrivere

$$p_f V_{1f} = n_1 R T_f; \qquad p_f V_{2f} = n_2 R T_f,$$

dalle quali, dividendo membro a membro, si ottiene

$$\frac{V_{1f}}{V_{2f}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Ma essendo $V_{1f} + V_{2f} = V$ è facile ricavare che

$$V_{1f} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} V = 9.37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; \qquad V_{2f} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} V = 1.56 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Ora che conosciamo i volumi finali dei due scomparti possiamo calcolare la temperatura finale, che sarà

$$T_f = \frac{p_f V_{1f}}{n_1 R} = \frac{p_f V_{2f}}{n_2 R} = \frac{p_f V}{(n_1 + n_2) R} = 295 \text{ K}.$$

La trasformazione che porta il sistema nell'attuale stato finale, essendo spontanea è sicuramente **irreversibile**! Inoltre, sebbene i due gas possono scambiare calore tra loro (attraverso il pistone), essendo il recipiente adiabatico, il sistema nel suo complesso (formato dai due gas) non scambia calore con l'ambiente circostante. Perciò, la trasfomazione è un'**abiabatica irreversibile**!
La variazione di energia interna del sistema è

$$\Delta E_{int} = \Delta E_{int,1} + \Delta E_{int,2} = (n_1 c_{V1} + n_1 c_{V1})(T_f - T_i) = R \left[\left(\frac{3}{2} n_1 + \frac{5}{2} n_2 \right) (T_f - T_i) \right] = -324 \text{ J}.$$
