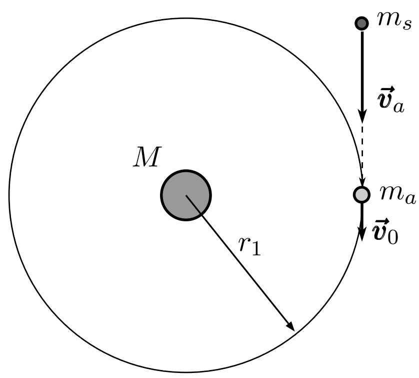
TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1

Un satellite di massa $m_s = 1000$ kg ruota intorno alla Terra in un'orbita circolare di raggio $r_1 = 1.5 \cdot 10^4$ km (vedi figura). Per il satellite, determinare:

A. modulo v_0 della sua velocità e modulo, direzione e verso (li si specifichi rispetto alla figura) del suo momento angolare $\vec{\ell}_0$ rispetto al centro della Terra.

Ad un certo istante un'asteroide, di massa $m_a = 200$ kg, che si muove nel piano dell'orbita del satellite, lo colpisce in direzione parallela alla sua velocità (come mostrato in figura). Al momento dell'impatto con il satellite l'asteroide ha una velocità $v_a = 10 \cdot v_0$. Sapendo che la collisione tra i due è istantanea e **perfettamente anelastica**, determinare:



B. la velocità v del corpo (satellite + asteroide) subito dopo la collisione e l'energia che viene dissipata nell'urto.

Infine, pensando al moto del corpo (satellite + asteroide) dopo la collisione:

C. stabilire (giustificando la risposta) quale tipo di traiettoria (chiusa o aperta) esso seguirà.

[Massa della Terra e costante gravitazionale sono $M = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg e $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.]

Soluzione Finché il satellite è nell'orbita circolare di raggio r_1 deve essere

$$m_s \frac{v_0^2}{r_1} = G\frac{Mm_s}{r_1^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 5.15 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 1.85 \cdot 10^4 \text{ km/h.}}$$

Essendo $\vec{r}_1$ e $\vec{v}_0$ mutuamente perpendicolari, il modulo del momento angolare è

$$\boxed{\ell_0 = r_1 m_s v_0 = 7.72 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}}$$

La direzione di $\vec{\ell}_0$ è perpendicolare al piano dell'orbita e il suo verso è (guardando la figura) entrante.
L'urto è perfettamente anelastico e quindi si conserva solo la quantità di moto. Pertanto, lungo la direttrice di moto dei due posiiamo scrivere

$$m_a v_a + m_s v_0 = (m_a + m_s)v \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \frac{m_a v_a + m_s v_0}{m_a + m_s} = \frac{10 m_a + m_s}{m_a + m_s} v_0 = 2.50 \cdot v_0 = 1.29 \cdot 10^4 \text{ m/s.}}$$

L'energia persa nella collisione tra asteroide e satellite è

$$\boxed{W = K_i - K_f = \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \frac{1}{2} m_s v_0^2 - \frac{1}{2}(m_a + m_s)v^2 = \frac{1}{2}\frac{81 m_a m_s}{m_a + m_s} v_0^2 = 1.79 \cdot 10^{11} \text{ J.}}$$

Ciò che determina il tipo di traiettoria che seguirà il corpo che viene a formarsi nella collisione è il segno della sua energia meccanica. Calcolandone il valore otteniamo

$$\boxed{E_{mecc} = \frac{1}{2}(m_a + m_s)v^2 - G\frac{M(m_a + m_s)}{r_1} = 9.9846 \cdot 10^{10} \text{ J} - 3.18896 \cdot 10^{10} \text{ J} = 6.79 \cdot 10^{10} \text{ J} > 0.}$$

Il segno positivo di E_{mecc}, ci dice che il corpo non è più legato alla Terra: esso seguirà una traiettoria aperta che quindi sarà di tipo iperbolico.

In alternativa si poteva considerare il valore della velocità a distanza r_1 dal centro della terra, pari a

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}} = 7.29 \cdot 10^3 \text{ m/s},$$

e notare che la velocità v del corpo che si forma nell'urto è maggiore di questa.

PROBLEMA 2

Un cilindro omogeneo, di massa $M = 20.0$ kg e raggio $R = 20.0$ cm è appoggiato su un piano orizzontale **perfettamente liscio**. Al suo centro di massa è agganciata una corda ideale al cui altro estremo è appeso (tramite una puleggia ideale) un corpo di massa $m_1 = 6.00$ kg. Intorno al cilindro è avvolta una seconda corda ideale al cui altro estremo è appeso (tramite una seconda puleggia ideale) un corpo di massa m_2. Si noti che, assendo il piano d'appoggio perfettamente liscio, il cilindro scivolerà su di esso e quindi seguirà un moto roto–traslatorio.

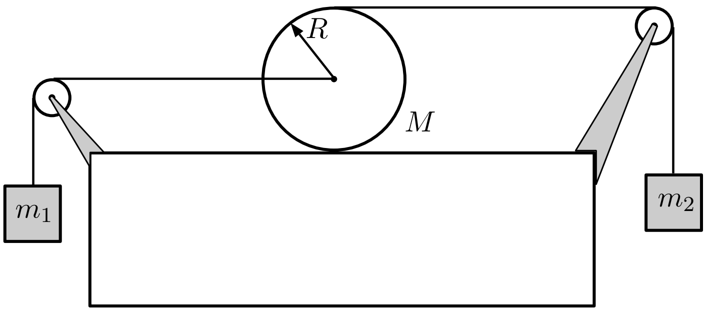
Nell'ipotesi che la corda avvolta intorno al cilindro non scivoli mai rispetto alla sua superficie:

A. scrivere le equazioni del moto dei corpi 1 e 2 e del cilindro.

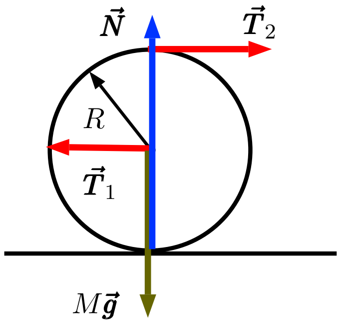
Quindi, determinare:

B. la massa che deve avere il corpo 2 affinché il centro di massa del cilindro rimanga in quiete;

C. i corrispondenti valori delle accelerazioni lineari a_1 e a_2 dei corpi 1 e 2 e angolare α del cilindro.



Soluzione Le forze che agiscono sul cilindro sono quelle indicate nella figura a fianco dove $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ sono le forze determinate dalle due corde, mentre $\vec{N}$ è la reazione normale del piano di appoggio e $M\vec{g}$ la forza gravitazionale.



Per scrivere le equazioni del moto dei corpi 1 e 2 prendiamo degli assi verticali diretti uno verso l'alto e l'altro verso il basso; per il centro di massa del cilindro consideriamo un asse orizzontale verso destra. L'applicazione della seconda legge (nelle forme lineare e angolare) porta al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \\ m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \\ M a_{cm} = T_2 - T_1 \\ I_{cm}\alpha = R T_2 \end{cases} \qquad (*)$$

dove le prime due riguardano i corpi 1 e 2 e per esse si sono scelti due assi verticali orientati concordemente al loro moto. a_{cm} e α sono le accelerazioni lineare (del centro di massa) e angolare del cilindro e $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

il suo momento d'inerzia rispetto all'asse per il suo c.d.m. Si noti che alle quattro equazioni $(*)$ si potrebbe aggiungere anche la seguente

$$0 = N - Mg \qquad \Rightarrow \qquad N = Mg,$$

ininfluente per la dinamica del sistema!

Essendo nullo l'attrito tra cilindro e piano di appoggio, il cilindro seguirà un moto roto–traslatorio e, in generale, a seconda delle masse dei corpi 1 e 2 il suo centro di massa potrebbe muoversi sia verso destra che verso sinistra. Invece la sua rotazione non può essere che oraria. Conseguentemente, se v_{cm} è la velocità istantanea del centro di massa del cilindro (positiva se verso destra) e ω è la sua la velocità angolare istantanea, allora la velocità istantanea di un punto alla sommità del cilindro, v_s, sarà pari a

$$\boxed{v_s = v_{cm} + R\omega.}$$

Derivando rispetto al tempo ambo i membri otteniamo quindi

$$a_s = a_{cm} + R\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_2 = a_1 + R\alpha},$$

dove abbiamo anche tenuto conto del fatto che è $a_1 = a_{cm}$ e $a_s = a_2$.

Inserendo l'ultima relazione, le equazioni $(*)$ diventano

$$\boxed{\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \\ m_2(a_1 + R\alpha) = m_2 g - T_2 \\ M a_1 = T_2 - T_1 \\ \frac{1}{2} M R^2 \alpha = R T_2 \end{cases}} \qquad (**)$$

Ora, se il centro di massa del cilindro rimane in quiete, allora è $\boxed{a_1 = a_{cm} = 0}$. Conseguentemente, le equazioni $(**)$ diventano

$$\begin{cases} 0 = T_1 - m_1 g \\ m_2 R\alpha = m_2 g - T_2 \\ 0 = T_2 - T_1 \\ \frac{1}{2} M R \alpha = T_2 \end{cases} \qquad (***)$$

Estraendo T_1 e T_2 dalle prime due equazioni e inserendole nella terza dalle quali si ottiene subito

$$T_2 = T_1 \qquad \Rightarrow \qquad (m_2 - m_1)g = m_2 R\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{m_2 - m_1}{m_2} \cdot \frac{g}{R}$$

Inserendo questa nella quarta equazione delle $(***)$ otteniamo

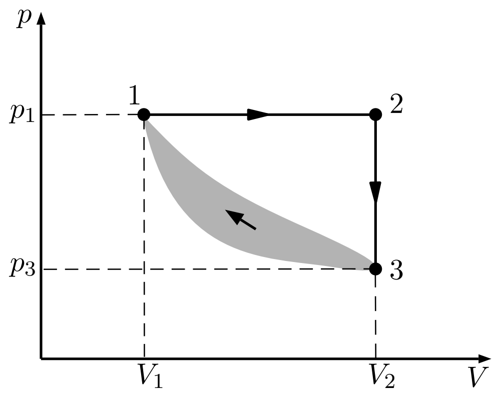
$$MR\alpha = 2T_2 = 2m_1 g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M(m_2 - m_1)}{m_2} = 2m_1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{m_2 = \frac{Mm_1}{M - 2m_1} = 15.0 \text{ kg.}}$$

Sostituendo questa nelle precedenti, abbiamo

$$\boxed{\alpha = \frac{2m_1}{M}\frac{g}{R} = 29.4 \text{ rad/s}^2} \qquad \boxed{a_2 = R\alpha = \frac{2m_1}{M} g = 5.89 \text{ m/s}^2.}$$

PROBLEMA 3

Un gas ideale **biatomico** ($n = 10.0$ mol), segue il ciclo schematizzato in figura dove la trasformazioni $1 \to 2$ e $2 \to 3$ sono rispettivamente un'**isobara** e un'**isocora** entrambe **reversibili**; invece la trasformazione $3 \to 1$ è un'**adiabatica irreversibile**. I volumi degli stati 1 e 2 sono rispettivamente $V_1 = 125$ dm^3 e $V_2 = 3 \cdot V_1$; la pressione degli stati 1 e 2 è pari a $p_1 = 2.00$ atm. La temperatura dello stato 3 è T_3.



A. Determinare le temperature T_1 e T_2 degli stati 1 e 2;

B. Determinare i calori scambiati, Q_{12} e Q_{23}, e le variazioni di entropia, ΔS_{12} e ΔS_{23}, del gas nelle trasformazioni $1 \to 2$ e $2 \to 3$ (nel secondo caso scrivere le espressioni in funzione di T_3);

C. Dimostrare che la natura **adiabatica e irreversibile** della trasformazione $3 \to 1$ è incompatibile con $T_3 = T_1$;

D. Determinare il rendimento del ciclo nel caso di $T_3 = T_1/2$.

Soluzione Per le temperature degli stati 1 e 2 abbiamo

$$\boxed{T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 305 \text{ K},}$$

e

$$\frac{T_2}{V_2} = \frac{T_1}{V_1} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 3T_1 = \frac{3p_1V_1}{nR} = 914 \text{ K}.}$$

Nella trasformazione $1 \to 2$ il calore scambiato e la variazione di entropia del gas sono

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{12} &= nc_p(T_2 - T_1) = n\frac{7}{2}R \cdot 2T_1 = 7p_1V_1 = 1.77 \cdot 10^5 \text{ J;} \\ \Delta S_{12} &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = nc_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} = nc_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = nc_p \ln 3 = 320 \text{ J/K.} \end{aligned}}$$

Le analoghe quantità per la trsformazione $2 \to 3$ hanno le espressioni seguenti

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{23} &= nc_V(T_3 - T_2) = nc_V(T_3 - 3T_1); \\ \Delta S_{23} &= \int_2^3 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = nc_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{\mathrm{d}T}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_3}{3T_1}\right). \end{aligned}}$$

Essendo l'entropia una funzione di stato, in un qualsiasi ciclo termodinamico la sua variazione deve essere nulla. Pertanto deve essere

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_{31} = -\Delta S_{12} - \Delta S_{23}.$$

Ponendo $T_3 = T_1$ avremmo quindi

$$\boxed{\Delta S_{31} = -\Delta S_{12} - \Delta S_{23} = -nc_p \ln 3 - nc_V \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -nc_p \ln 3 + nc_V \ln 3 = -n(c_p - c_V)\ln 3 = -nR\ln 3 < 0,}$$

Questo risultato è incompatibile con la natura abiabatica e irreversibile della trasformazione $3 \to 1$, dato che, per la 2^a legge della termodinamica, deve essere $\Delta S_{31} > 0$!
Invece ponendo $T_3 = \frac{1}{2}T_1$ si ha

$$\Delta S_{31} = -\Delta S_{12} - \Delta S_{23} = -nc_p \ln 3 - nc_V \ln\left(\frac{1}{6}\right) = nR\left[-\frac{7}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 6\right] = 52.7 \text{ J/K},$$

che è maggiore di zero come richiesto.
Utilizzando la 1^a legge della termodinamica e tenendo presente che è un'adiabatica, il lavoro scambiato nella $3 \to 1$ si ricava come segue

$$L_{31} = -\Delta E_{int,31} = -nc_V(T_1 - T_3) = -n\frac{5}{2}R \cdot \frac{1}{2}T_1 = -\frac{5}{4}p_1V_1 = -3.16 \cdot 4 \text{ J},$$

e, conseguentemente, essendo $L_{23} = 0$, il lavoro nell'intero ciclo è

$$L = L_{12} + L_{31} = p_1(V_2 - V_1) - \frac{5}{4}p_1V_1 = \left(2 - \frac{5}{4}\right) p_1V_1 = \frac{3}{4}p_1V_1.$$

Notando poi che il calore viene assorbito solo nella trasformazione $1 \to 2$, il rendimento del ciclo è

$$\boxed{\eta = \frac{L}{Q_{12}} = \frac{\frac{3}{4}p_1V_1}{7p_1V_1} = \frac{3}{28} = 0.107.}$$
