Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2019/2020, Sessione di Settembre, Primo Appello, 1 Settembre 2020, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

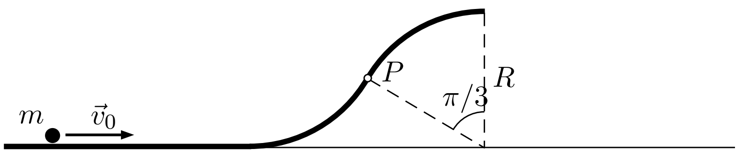
PROBLEMA 1

Un punto materiale di massa m viene lanciato (verso destra) con velocità iniziale v_0 sulla guida schematizzata in figura. La guida è costituita da un primo tratto orizzontale e da un secondo tratto costituito da due archi di circonferenza di raggio $R = 2.00$ m di apertura angolare $\pi/3$ che si raccordano nel punto P (il arco ha la concavità verso l'alto, il secondo verso il basso, vedi figura); la sommità della guida (che è anche il suo punto finale) è anche a quota R dal suolo. La guida è perfettamente liscia e quindi non presenta attriti!

A. Determinare il minimo valore di v_0 che può permettere al corpo di raggiungere la sommità della guida. Supporre poi che il corpo venga lanciato con una velocità iniziale pari a $\sqrt{3/2}$ volte quella ottenuta nel punto **A**. In tali condizioni calcolare:

B. l'altezza dal suolo a cui il corpo si stacca dalla guida;

C. la massima altezza raggiunta dal corpo.



Soluzione

La risposta al punto **A.** è immediata: data l'assenza zà di attriti nel moto del corpo possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica e quindi tra il punto di lancio e la sommità della guida possiamo scrivere la relazione

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_f^2.$$

Il minimo valore di v_0 che permette al corpo di raggiungere la sommità della guida sarà quello in corrispondenza del quale è $v_f = 0$. Perchò

$$v_{0,min}^2 = 2gR \qquad \Rightarrow \qquad v_{0,min} = \sqrt{2gR} = 6.26 \text{ m/s}.$$

Poniamo ora la velocità iniziale a $v_0 = \sqrt{3/2}v_{0,min}$ (cioè $v_0^2 = 3/2v_{0,min}^2 = 3gR$) e ragioniamo sul moto del corpo lungo la guida. È immediato capire che fino al punto P in cui si raccordano i tratti circolari della guida, il corpo non può staccarsi da essa. Notando che la quota di P è pari a

$$h_P = R - R\cos(\pi/3) = R/2,$$

e utilizzando la conservazione dell'energia meccanica otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_P + \frac{1}{2}mv_P^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_P^2 = v_0^2 - 2gh_P = 3gR - gR = 2gR.$$

Nel tratto che segue, invece, c'è la possibilità che il corpo si stacchi dalla guida e quindi scriviamo la sua equazione del moto. Ipotizzando che il corpo sia in contatto con la guida, per le componenti delle forze perpendicolari alla guida stessa abbiamo

$$ma_\perp = -m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta,$$

dove θ è l'angolo rispetto alla verticale ($\theta = \pi/3$ in P e poi decresce a 0 alla sommità della guida). La dipendenza di v dall'angolo θ può essere ricavata, ancora una volta, con la conservazione dell'energia meccanica,

$$\frac{1}{2}mv_P^2 = mgR[\cos\theta - \cos(\pi/3)] + \frac{1}{2}mv^2(\theta) = mgR\left[\cos\theta - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}mv^2(\theta),$$

da cui si ricava

$$v^2(\theta) = v_P^2 - gR\,[2\cos\theta - 1] = gR(3 - 2\cos\theta).$$

Inserendo quest'ultima nell'equazione del moto e ricavando la normale N otteniamo

$$N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} = mg\,[\cos\theta - (3 - 2\cos\theta)] = mg(3\cos\theta - 3).$$

È importante notare che per θ minore di $\pi/3$ tale espressione darebbe un valore di N sempre negativo: questo sta a significare che in realtà, il corpo si stacca dalla guida proprio in P! Quindi ah una quota pari a

$$h_P = R/2 = 1.00 \text{ m}.$$

In tale punto, la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_P$ ha componenti

$$v_{P,x} = v_P\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{2gR}; \qquad v_{P,y} = v_P\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2gR},$$

Dato che il corpo si stacca dalla guida in P, negli istanti successivi seguirà un moto parabolico e quindi per la proiezione del suo moto lungo la verticale, si avrà

$$y(t) = h_P + v_{P,y}t - \frac{1}{2}gt^2; \qquad v_y(t) = v_{P,y} - gt.$$

Nell'istante in cui v_y si annulla, il corpo si troverà alla massima quota. Quindi

$$v_y(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{v_{P,y}}{g} \qquad \Rightarrow \qquad h_{max} = h_P + \frac{v_{P,y}^2}{2g} = \frac{R}{2} + \frac{3}{4}\frac{2gR}{2g} = \frac{5}{4}R = 2.50 \text{ m}.$$

PROBLEMA 2

Una sfera omogenea di massa $M = 30.0$ kg e raggio R è appoggiato su un piano inclinato che forma un'angolo $\theta = \pi/6$ con l'orizzontale. Gli estremi di una molla ideale (di massa trascurabile) tra il centro della sfera e un sostegno rigido saldato al piano inclinato: la molla ha costante elastica $k = 30.0$ N/cm.

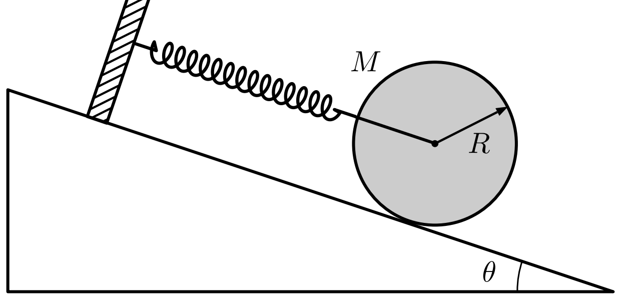
Supponendo che il piano inclinato presenti un'attrito tale da non permettere lo scivolamento della sfera (cioè la sfera rotola senza slittare), calcolare:

A. l'allungamento della molla quando la sfera è in equilibrio statico e il modulo della forza di attrito statico (tra sfera e piano inclinato) presente in tali condizioni;

B. il periodo con cui oscilla la sfera se lasciata andare dalla posizione in cui la molla è a riposo;

C. il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s affinchè l'oscillazione della sfera senza scivolamento (di cui al punto B.) possa realizzarsi.

[*Il momento d'inerzia di una sfera omogea rispetto ad un'asse per il suo centro è* $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$.]



Soluzione Prendiamo un asse x parallelo al piano inclinato diretto verso il basso con origine coincidente con la posizione del centro di massa della sfera quando la molla è a riposo.
Quando la sfera è in equilibrio statico, il momento delle forze che agiscono su di essa rispetto al suo punto di contatto con il piano inclinato deve essere nullo. Da tale condizione si ottiene

$$MgR\sin\theta - RF_e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_e = Mg\sin\theta = \frac{1}{2}Mg,$$

dove $F_e = k\Delta x$ è il modulo della forza elastica esercitata dalla molla. Quindi l'allungamento della molla, che per la scelta dell'asse x corrisponde all'ascissa del c.d.m. della sfera, è

$$x_{eq} = \frac{Mg}{2k} = 4.90 \text{ cm}.$$

L'equilibrio comporta anche la seguente

$$Mg\sin\theta - F_e + f_s = 0$$

dove f_s è il modulo dell'eventuale forza di attrito statico agente sulla sfera da parte del piano inclinato. Si noti che, dato il risultato precedente, si ha

$$f_s = F_e - Mg\sin\theta = 0,$$

che ci dice che in tali condizioni la forza di attrito statico è nulla!
Se la sfera viene lasciata andare dalla posizione in cui la molla è a riposo, essa prenderà ed effettuare un moto oscillatorio armonico di ampiezza Δx_0 intorno alla posizione di equilibrio. Non essendoci dissipazioni possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica e scrivere la seguente

$$0 = \frac{1}{2}kx^2 - Mgx\sin\theta + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

dove x individua la posizione istantanea del centro di massa della sfera.
Tenendo presente che la sfera, mentre oscilla, segue un moto di puro rotolamento, si ha $\omega = v_{cm}/R$ e quindi, sostituendo l'espressione di I_{cm}, la precedente diventa

$$\frac{1}{2}kx^2 - Mgx\sin\theta + \frac{7}{10}Mv_{cm}^2 = 0.$$

Derivando rispetto al tempo ricaviamo l'equazione del moto seguente

$$kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - Mg\sin\theta\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{7}{5}Mv_{cm}\cdot\frac{\mathrm{d}v_{cm}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Essendo $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{cm}$ e $\frac{\mathrm{d}v_{cm}}{\mathrm{d}t} = a_{cm}$ l'equazione precedente diventa

$$\frac{7}{5}Ma_{cm} = -kx + Mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{5}Ma_{cm} = -k(x - x_{eq}),$$

dove, nell'ultima espressione, abbiamo fatto la sostituzione $kx_{eq} = Mg\sin\theta$.
Dividendo tutto per $\frac{7}{5}M$ otteniamo la seguente

$$a_{cm} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{5k}{7M}(x - x_{eq}),$$

che ha la forma dell'equazioni del moto per oscillazioni armoniche con pulsazione e periodo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5k}{7M}} \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{7M}{5k}} = 0.743 \text{ s}.$$

La soluzione dell'equazione del moto è

$$x(t) = x_{eq}[1 - \cos(\omega_0 t)] \qquad \Rightarrow \qquad v_{cm}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_0 x_{eq} \sin(\omega_0 t)$$

da cui si ha

$$a_{cm}(t) = \frac{\mathrm{d}v_{cm}}{\mathrm{d}t} = \omega_0^2 x_{eq} \cos(\omega_0 t),$$

che ci permette di ricavare che il massimo modulo dell'accelerazione del centro di massa durante l'oscillazione della sfera è

$$a_{cm,max} = \omega_0^2 x_{eq} = \frac{5k}{7M}\frac{Mg}{2k} = \frac{5}{14}g \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{max} = \frac{a_{cm,max}}{R} = \frac{5}{14}\frac{g}{R}$$

Applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare all'asse passante il centro di massa della sfera possiamo scrivere che

$$I_{cm}\alpha = Rf_s \qquad \Rightarrow \qquad f_s = \frac{I_{cm}\alpha}{R},$$

e da questa ricaviamo che il massimo modulo della forza di attrito statico durante l'oscillazione è

$$|f_s|_{max} = \frac{I_{cm}\alpha_{max}}{R} = \frac{2}{5}MR^2\frac{5}{14}\frac{g}{R^2} = \frac{1}{7}Mg.$$

Infine, dato che per forza di attrito statico è $|f_s| \leq \mu_s N$, nel nostro caso dovremo avere

$$\mu_s \geq \frac{|f_s|_{max}}{N} = \frac{|f_s|_{max}}{Mg\cos\theta} = \frac{1}{7}Mg \cdot \frac{2}{\sqrt{3}Mg} = \frac{2}{7\sqrt{3}} = 0.165.$$

PROBLEMA 3

Ad un gas ideale biatomico ($n = 2.5$ mol) che si trova inizialmente nello stato caratterizzato dalla pressione $p_1 = 2.0$ atm e volume $V_1 = 30$ l viene fatto seguire un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni: *i*) una compressione adiabatica reversibile fino allo stato con pressione $p_2 = 2p_1$; *ii*) una trasformazione isocora reversibile fino ad una pressione $p_3 = 3p1$; *iii*) una espansione politropica (del tipo $pV^k = \text{cost.}$) fino a tornare allo stato iniziale.

A. Schematizzare il ciclo nel piano p–V;

B. Calcolare i valori di pressione, temperatura e volume degli stati 1, 2 e 3;

C. Determinare l'esponente k della trasformazione politropica $3 \to 1$ e la variazione di entropia subita dal gas in tale trasformazione;

D. Calcolare il lavoro compiuto dal gas nell'intero ciclo.

Soluzione

La temperatura dello stato iniziale (stato 1) è

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 292 \text{ K}$$

Nella compressione adiabatica il gas segue la legge $pV^\gamma = \text{cost.}$ con $\gamma = c_p/c_V = 7/5$ fino alla pressione $p_2 = 2p_1$. Quindi

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/7} V_1 = 0.61\, V_1 = 18.3 \text{ l}.$$

e

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = 1.22\, \frac{p_1 V_1}{nR} = 1.22\, T_1 = 356 \text{ K}.$$

Infine per lo stato 3 si ha

$$V_3 = V_2 = 18.3 \text{ l}, \qquad p_3 = 3p_1, \qquad T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = 1.83\, T_1 = 534 \text{ K}.$$

Nella trasformazione politropica tra gli stati 3 e 1 il gas segue la legge $pV^k = \text{cost.}$. Quindi

$$p_3 V_3^k = p_1 V_1^k \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^k = \frac{p_1}{p_3} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\ln(p_1/p_3)}{\ln(V_3/V_1)} = \frac{\ln(1/3)}{ln(0.61)} = 2.22.$$

Per il calcolo della variazione di entropia lungo la trasformazione $3 \to 1$ potremmo procedere anche ad un calcolo diretto. In alternativa, anche al fine di semplificare il calcolo, facciamo appello al fatto che l'entropia è una funzione di stato e che quindi in un ciclo la sua variazione è nulla; nel caso presente, la variazione di entropia nella trasformazione adiabatica reversibile $1 \to 2$ è nulla e perciò dovrà essere

$$\Delta S_{3,1} = -\Delta S_{2,3} = -\int_2^3 \frac{dQ}{T} = -nc_V \int_{T_2}^{T^3} \frac{dT}{T} = -n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = -n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -21.0 \text{ J/K}.$$

Per completare, calcoliamo il lavoro prodotto dal gas nell'intero ciclo che sarà pari alla somma dei lavori compiuti nelle trasformazioni $1 \to 2$ e $3 \to 1$ dati dalle seguenti

$$L_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2 - p_1V_1) = -\frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = -3.34 \cdot 10^3 \text{ J},$$

$$L_{3,1} = \int_{V_3}^{V_1} pdV = p_3 V_3^k \int_{V_3}^{V_1} V^{-k} dV = \frac{1}{1-k}(p_1V_1 - p_3V_3) = -0.82nR(T_1 - T_3) = 4.14 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Perciò si ha

$$L = L_{1,2} + L_{3,1} = 7.97 \cdot 10^2 \text{ J}.$$